数理科学特論３　課題

群 $T = \{\ldots, t^{-2}, t^{-1}, t^0 = 1, t, t^2, \ldots\}$ を考えます。積の演算は $t^i \cdot t^j = t^{i+j}$ です。群 T の整係数群環を R で表します：$R = \{n_i t^i + \cdots + n_j t^j | i \leq \cdots \leq j,\ n_k \in \mathbb{Z}\}$. 次の各設問に答えなさい。

1. R の単元 (ユニット) は $\pm t^i$ の形の元のみであることを示しなさい。つまり、

$$(n_i t^i + \cdots + n_j t^j)(m_k t^k + \cdots + n_l t^l) = 1$$

   (ただし、$i \leq \cdots \leq j$, $k \leq \cdots \leq l$, $n_i \neq 0$, $n_j \neq 0$, $m_k \neq 0$, $m_l \neq 0$) であるならば、$i = j$, $k = l$, $n_i = \pm 1$, $m_k = \pm 1$ であることを示しなさい。
2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1+t & t^2 \\ 2t^{-1}+1 & 1+t \end{pmatrix}$ の行列式を計算しなさい。
3. 次の２つの変形を使って上の行列 A を単位行列に変形しなさい。
   (1) I 型の基本変形。
   (2) II 型の基本変形。ただしかけることのできるのは R のユニット。

提出先：２０号館５階　山崎 (正) 研究室

期　限：7月２５日　正午

用　紙：自由