1　リプシッツ写像

1.1　リプシッツ写像の基礎

定義 1.1. 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) の間の写像 f に対し、正の定数 λ で、任意の x, $x' \in X$ に対して

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') \qquad (\forall x,\ \forall x' \in X)$$

をみたすものが存在するとき、f は λ **リプシッツ**または単に**リプシッツ**であるという。また、λ を f の**リプシッツ定数**とよぶ。

注意. 上の条件式は $x = x'$ のときは任意の λ に対してなりたっている。したがって次の条件と同値になる：

$$\frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')} \leq \lambda \qquad (\ x \neq x' \in X\ )$$

$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ についての、関連する概念を復習する。$N(x;\delta)$ は X における x の開 δ 近傍[1] $\{x' \in X | d_X(x, x') < \delta\}$ を表すものとする。

定義 1.2. (1) 任意の $x \in X$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$f(N(x;\delta)) \subset N(f(x);\epsilon)$$

をみたす $\delta > 0$ が存在するとき、f は**連続**であるという。
(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$f(N(x,\delta)) \subset N(f(x), \epsilon) \qquad (\forall x \in X)$$

をみたす $\delta > 0$ が存在するとき、f は**一様連続**であるという。

命題 1.3. f：リプシッツ $\Longrightarrow$ f：一様連続 $\Longrightarrow$ f：連続

問 1.4. 次のおのおのの写像は上のどの条件を満たしているか。ただし、$\mathbb{R}$ およびその部分集合には $d(x, x') = |x - x'|$ による距離を与えるものとする。

1. $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sin x$.
2. $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
3. $X = Y = (0, \infty)$, $f(x) = 1/x$.
4. $X = (-\pi/2, \pi/2)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$.

問 1.5. (1) 任意の連続写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ は一様連続であるか。X がコンパクトとすればどうか。
(2) 任意の一様連続写像 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ はリプシッツであるか。X がコンパクトとすればどうか。

問 1.6. $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ はリプシッツであり、$A \subset X$ は有界部分集合とするとき、$f(A)$ は Y の有界部分集合であることを示せ。

[1] これに対し x の閉 δ 近傍 $\{x' \in X | d_X(x, x') \leq \delta\}$ は $B(x;\delta)$ で表すことにする。

リプシッツ写像の具体例を述べるために、線形空間のノルムの同値について復習する。

定義 1.7. 線形空間 V のふたつのノルム $\| \ \|_1, \| \ \|_2$ が**同値**であるとは、次の条件をみたす正の定数 $K > 0,\ L > 0$ が存在することをいう：

$$K\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le L\|x\|_1 \qquad (\forall x \in V)\ .$$

例. $\mathbb{R}^n$ の次のノルムはすべて互いに同値である $(x = (x_1, \cdots, x_n))$。

1. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\ ,$
2. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ ,$
3. $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\ |x_2|, \cdots, |x_n|\}\ .$

これらのノルムによって定まる距離関数をそれぞれ $d_1,\ d_2,\ d_\infty$ とする：$d_i(x, x') = \|x - x'\|_i$ $(i = 1, 2, \infty)$。このとき、恒等写像 $1 : (\mathbb{R}^n, d_i) \to (\mathbb{R}^n, d_j)$ はいずれもリプシッツである。

問 1.8. $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ の部分距離空間

$$X = \{(x_1, x_2) | 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 = 0\}\ ,$$
$$Y_a = \{(x_1, x_2) | 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 = ax_1\}$$

を考える。ただし a は実定数とする。写像 $f : X \to Y_a$ を $f(x, 0) = (x, ax)$ で定めるとき、f が 1 リプシッツであるような定数 a の範囲を求めよ。

例. 単位円周 $S^1 = \{\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\ \}$ の上にふたつの距離 $d,\ d'$ を考える：

1. d は $\mathbb{R}^2$ のユークリッドの距離の誘導する距離、すなわち
$$d(x, x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$$
2. d' は円周に沿った最短の道の長さ (弧長) による距離

このとき、恒等写像 $1 : (S^1, d) \to (S^1, d')$ およびその逆写像はいずれもリプシッツである。

命題 1.9. $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ および $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ が共にリプシッツならば、合成 $g \circ f : (X, d_X) \to (Z, d_Z)$ もリプシッツである。

問 1.10. 任意の線形写像 $f : (\mathbb{R}^m, d) \to (\mathbb{R}^n, d)$ はリプシッツであることを示せ。ただしふたつの d は命題 1.1 のいずれかの距離とする。(3 つのうちのいずれを選んでも結果は変わらないことは命題 1.9 からわかる。)

以下しばらく、区間上で定義された実数値関数について考えることにする。

命題 1.11. f は (1) 開区間 (無限区間も含む) 上の微分可能関数であるかまたは (2) $[a, b]$ 上の連続関数で (a, b) 上で微分可能であるものとする。f が λ リプシッツであるためには $|f'(x)| \le \lambda$ であることが必要十分である。

証明. 微分係数の定義および平均値の定理による。 □

命題 1.12. 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を考える。もし $a < c < b$ であり、f の $[a, c]$ への制限が λ リプシッツ、$[c, b]$ への制限が λ' リプシッツであるならば、f は $\lambda + \lambda'$ リプシッツである。

証明. 区間 $[a,b]$ の 2 点 x, x' をとる; $x < c < x'$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x')-f(x)|}{|x'-x|} &\le \frac{|f(x')-f(c)|}{|x'-x|} + \frac{|f(c)-f(x)|}{|x'-x|} \\
&= \frac{|x'-c|}{|x'-x|}\cdot\frac{|f(x')-f(c)|}{|x'-c|} + \frac{|c-x|}{|x'-x|}\cdot\frac{|f(c)-f(x)|}{|c-x'|} \\
&\le \lambda' + \lambda
\end{aligned}$$

他の場合も同様、または明らか。 □

定義 1.13. 開区間上の関数が C^1 **級**であるとは、各点で微分可能で、導関数 $f'(x)$ が連続であることをいう。閉区間上の関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が C^1 **級**であるとは、区間 $[a,b]$ を含むような、ある開区間 (a',b') 上の C^1 級関数に拡張することとする。これは、端点における微分係数を片側極限を用いて定義して $f'(x)$ が $[a,b]$ で連続であることを要求することと同じである。例えば $[-1,1]$ 上の連続関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ は C^1 級ではない。

命題 1.14. 有界閉区間上の C^1 級関数はリプシッツである。

定義 1.15. 関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が**区分的に** C^1 であるとは、区間 $[a,b]$ を適当に細分すると f が各部分閉区間で C^1 級になることをいう。

系 1.16. 区分的に C^1 級な関数はリプシッツである。

問 1.17. 区分的に C^1 級でないようなリプシッツ関数 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ の例を示せ。

リプシッツ写像の微分可能性について次の事実が知られている：

定理 1.18. リプシッツ写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はほとんどすべての点で (つまり、測度 0 の集合の外で) 微分可能である。

ここで、集合 $S\subset\mathbb{R}$ が測度 0 であるとは、任意の $\epsilon>0$ に対して、有限個または可算個の閉区間の列 $[a_n,b_n]$ で次をみたすものが存在することをいう：

1. $S\subset\bigcup_n[a_n,b_n]$,
2. $\sum_n(b_n-a_n)<\epsilon$.

例えば自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ や有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は測度 0 である。実際、高々可算個の点からなる部分集合は必ず測度 0 である。一方、正の長さを持つ区間は測度 0 ではない。非可算無限個の点からなり、かつ測度 0 の集合の例としてカントール集合がある。

問 1.19. S は $\mathbb{R}$ の測度 0 の部分集合、$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はリプシッツ写像とする。このとき、像 $f(S)$ は測度 0 であることを示せ。

上では主に $\mathbb{R}$ または区間の上のリプシッツ写像を考えたが、より一般の次元の空間の上のリプシッツ写像として、次の例が知られている。

定理 1.20. 有限多面体の間の単体的写像はリプシッツである。

1.2　双リプシッツ同相

定義 1.21. 同相写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ は、f および f^{-1} がともに λ リプシッツであるとき、λ **双リプシッツ同相写像**または単に**双リプシッツ同相写像**であるという。またそのような写像があるとき、(X,d_X) と (Y,d_Y) は λ **双リプシッツ同相**または単に**双リプシッツ同相**であるという。

例. (1) 任意の有界閉区間は互いに双リプシッツ同相である。任意の有界開区間も互いに双リプシッツ同相である。一方、開区間 $(0,1)$ と $\mathbb{R}$ は同相であるが、双リプシッツ同相ではない。
(2)$(\mathbb{R}^n,d_1)$, $(\mathbb{R}^n,d_2)$, $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ は互いに双リプシッツ同相である。
(3) $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ が全単射であり、かつ、すべての $x,x'\in X$ に対して $d_Y(f(x),f(x'))=d_X(x,x')$ が成り立つとき、f は**等長写像**であるといい、(X,d_X) と (Y,d_Y) は**等長**であるという。等長ならば、1 双リプシッツ同相である。

1.3　群論に現れる距離空間

双リプシッツ同相な状況が自然に現れる例が、「群論」の中にあるので、紹介する。

Γ を群とし、F は Γ の部分集合とする。$F^{\pm}=F\cup\{\gamma^{-1}|\gamma\in F\}$ とおく。$\langle F\rangle$ を次のように定める：

$$\langle F\rangle=\{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n \mid n\geq 0,\ \gamma_i\in F^{\pm}\ \}\ .$$

ただし、上の式で $n=0$ の場合の積は単位元 e を表すものと考える。すると $\langle F\rangle$ は F を含む Γ の部分群で最も小さいものとなる。$\langle F\rangle=\Gamma$ であるとき、F は Γ の**生成系**であるといい、F の元を Γ の**生成元**とよぶ。

例えば $\Gamma=\{e,g,g^2,\cdots,g^{m-1}\}$ を位数 m の巡回群とするとき、$\{g\}$ は Γ の生成系である：$\Gamma=\langle g\rangle$。また S_m を m 文字 $1,2,\cdots,m$ の置換群とするとき、互換の全体 $\{(i,j)|0\leq i<j\leq m\}$ は S_m の生成系である。

さて、F が Γ の生成系であるとき、任意の元 $\gamma\in\Gamma$ は、有限個の $\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_n\in F^{\pm}$ を用いて、$\gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ と表すことができる。そのような n の最小値を $\|\gamma\|_F$ または単に $\|\gamma\|$ と書き、F の定める γ の**語長**と呼ぶ。

命題 1.22. $\|\gamma\delta\|\leq\|\gamma\|+\|\delta\|\ ,\quad \|\gamma\|=\|\gamma^{-1}\|\ .$

命題 1.23. Γ の元 γ,δ に対して $d(\gamma,\delta)=\|\gamma^{-1}\delta\|_F$ と定めると d は Γ の上の距離関数 $d_F:\Gamma\times\Gamma\to\mathbb{R}$ を定める。d を、生成系 F の定める**語距離**と呼ぶ。

証明. $d(\gamma,\epsilon)=\|\gamma^{-1}\epsilon\|=\|(\gamma^{-1}\delta)(\delta^{-1}\epsilon)\|\leq\|\gamma^{-1}\delta\|+\|\delta^{-1}\epsilon\|$ □

問 1.24. 語距離 d は左不変であること、つまり、任意の $\alpha\in\Gamma$ に対して等式 $d(\alpha\gamma,\alpha\delta)=d(\gamma,\delta)$ が成り立つことを示せ。

問 1.25. F が有限集合と仮定すると、任意の $R\geq 0$ および任意の元 γ に対して、γ を中心とした半径 R の閉球体

$$B_\Gamma(\gamma;R)=\{\ \delta\in\Gamma\mid d(\gamma,\delta)\leq R\ \}$$

は有限個の元しか含まない理由を説明せよ。

もちろん、生成系 F を取り替えれば、対応する語距離 d も変わってしまうが、有限生成な場合については次が成り立つ：

定理 1.26. F, F' が Γ の有限な生成系とし、F, F' の定める語距離をそれぞれ d, d' とする。このとき、恒等写像 $1 : (\Gamma, d) \to (\Gamma, d')$ は双リプシッツ同相写像である。

証明. $C = \max\{\ d'(e, \gamma) \mid \gamma \in F^{\pm}\ \}$ とおき、任意の α, $\beta \in \Gamma$ に対して、$n = d(\alpha, \beta)$ とおく。定義より $\alpha^{-1}\beta = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n$ $(\gamma_i \in F^{\pm})$ と書ける。

$$\begin{aligned}
d'(\alpha, \beta) &= d'(e, \alpha^{-1}\beta) = d'(e, \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n) \\
&\leq d'(e, \gamma_1) + d'(\gamma_1, \gamma_1\gamma_2) + \cdots + d'(\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_{n-1}, \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n) \\
&= d'(e, \gamma_1) + d'(e, \gamma_2) + \cdots + d'(e, \gamma_n) \\
&\leq Cn = Cd(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

より、$1 : (\Gamma, d) \to (\Gamma, d')$ はリプシッツであることがわかる。逆写像についても同様。 □

問 1.27. 次のおのおのの語距離を調べよ。

1. 無限巡回群 $T = \langle a \mid - \rangle$, $F = \{a\}$.
2. ランク 2 の自由アーベル群 $T \times T = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\ \rangle$, $F = \{a, b\}$.