2　完備性

双リプシッツ同相では保たれるが一般の同相写像では必ずしも保たれない性質のなかに、空間の「完備性」がある。この節では、完備性に関して学習する。

2.1　基礎的定義

定義 2.1. 距離空間 (X,d) の**点列**とは、写像 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ のことをいう。一般に、$\varphi(n) = x_n$ のような表現をし、φ を (x_n) で表すことが多い。

定義 2.2. 点列 (x_n) が点 $x \in X$ に**収束する**とは、数列 $(d(x_n,x))$ が 0 に収束すること、すなわち、任意の $\epsilon > 0$ に対し、次が成り立つような自然数 N が存在することをいう：

$$n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \geq N \Longrightarrow d(x_n,x) < \epsilon \quad .$$

定義 2.3. 点列 (x_n) が**コーシー列** (または**基本列**) であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、次が成り立つような自然数 N が存在することをいう：

$$n,m \in \mathbb{N} \text{ かつ } n,m \geq N \Longrightarrow d(x_n,x_m) < \epsilon \quad .$$

命題 2.4. コーシー列は必ず有界である。

命題 2.5. 収束する点列はコーシー列である。逆は必ずしも成り立たないが、コーシー列 (x_n) が収束する部分列を持てば、(x_n) 自身も収束する。

定義 2.6. 距離空間 (X,d) において、任意のコーシー列が必ず収束するとき、(X,d) は**完備**であるという。

例. (0) $\mathbb{Q}$ は、実数直線の部分距離空間と考えるとき、完備ではない。
(1) 実数直線 $\mathbb{R}$ は完備である。
(2) 完備空間の積空間は完備である。したがって、ユークリッド空間 $E^n = (\mathbb{R}^n, d)$ は完備である。
(3) ユークリッド空間 E^n から一点を取り除いてできる空間は完備ではない。
(4) さらに一般に、ユークリッド空間 E^n の部分距離空間 Y が完備になるためには、Y が E^n の閉部分集合であることが必要十分である。
(5) もっと一般に、完備距離空間 X の部分距離空間 Y が完備になるためには、Y が X の閉部分集合であることが必要十分である。
(6) 有限生成な群は語距離に関して完備である。

2.2　コンパクト性との関係

完備性と関連する概念に「コンパクト性」がある。コンパクトであることの一般的定義はいささかわかりにくいので、ここでは距離空間の場合について話を限ることにする。

定義 2.7. 距離空間 (X,d) において、任意の点列が必ず収束する部分列をもつとき、(X,d) は**点列コンパクト**であるという。距離空間においてはコンパクト性と点列コンパクト性の概念は一致することが知られているので、以後「点列」を省略して「コンパクト」ということにする。

コンパクトであるならば明らかに有界であるが、実はさらに次のより強い性質をもつことがわかる。

定義 2.8. (X, d) において、任意の $\epsilon > 0$ に対しある有限部分集合 $F \subset X$ で

$$\bigcup_{a \in F} N(a; \epsilon) = X$$

が成り立つとき、(X, d) は**全有界**であるという。ただし $N(a; \epsilon)$ は X における点 a の ϵ 近傍である。

命題 2.9. 距離空間 (X, d) がコンパクトならば、全有界である。

証明. 仮に全有界でないとすると、ある $\epsilon > 0$ に対して、どんな有限集合 F に対しても

$$\bigcup_{a \in F} N(a; \epsilon) \neq X$$

となる。まず、$x_1 \in X$ を任意に選ぶ。$N(x_1; \epsilon) \neq X$ であるから $x_2 \in X - N(x_1; \epsilon)$ をとれる。$\bigcup_{i=1}^{2} N(x_i; \epsilon) \neq X$ であるから、$x_3 \in X - \bigcup_{i=1}^{2} N(x_i; \epsilon) \neq X$ をとれる。これを続けて、点列 (x_n) を

$$x_n \in X - \bigcup_{i=1}^{n-1} N(x_i; \epsilon) \neq X$$

となるようにとれる。するとすべての n, m に対して $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ である。このような点列は決して収束する部分列をもたないから、(X, d) がコンパクトであるという仮定に反する。よって全有界でなければならない。 □

命題 2.10. (X, d) は全有界とする。このとき X の任意の点列に対しコーシー列であるような部分列が存在する。

証明. (x_n) を与えられた点列とする。その部分列 $x^{(1)}$ で、任意の n, m に対して $d(x_n^{(1)}, x_m^{(1)}) < 1$ をみたすものを見つける：X の有限部分集合 F で

$$\bigcup_{a \in F} N(a; 1/2) = X$$

をみたすものをとる。するとどれかの $N(a; 1/2)$ $(a \in F)$ の中にはいるような部分列 $(x_n^{(1)})$ がとれる。明らかにこの部分列が上の条件をみたしている。これを続けて、順に、$(x_n^{(k-1)})$ の部分列 $(x_n^{(k)})$ を、$d(x_n^{(k)}, x_m^{(k)}) < 1/k$ $(\forall n, m)$ となるようにとる。すると、点列 $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots$ が求めるコーシー列である。 □

定理 2.11. 距離空間 (X, d) において、コンパクトであることと、全有界かつ完備であることは同値である。

証明. (X, d) がコンパクトであるとする。全有界であることはすでに示した。(X, d) のコーシー列 (x_n) をとると、定義より (x_n) は収束する部分列をもつ。命題 2.5 により、(x_n) 自身も収束する。よって (X, d) は完備である。逆に (X, d) が全有界かつ完備であるとする。任意の点列は、全有界性より、コーシー列であるような部分列をもつが、完備性よりその部分列は収束する。 □

2.3　写像とコーシー列

命題 2.12. $f : (X, d) \to (Y, d)$ は連続であるとする。もし (X, d) の点列 (x_n) が収束するならば、(Y, d) の点列 $(f(x_n))$ も収束する。実際、$x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$ となる。

上のように、連続写像は点列の収束性は保つのだが、一般に「コーシー列である」という性質は保たない。例えば $x_n = 1/n$ で定まる $X = (0, \infty)$ の点列は、コーシー列であるが、同相写像 $f : X \to X; f(x) = 1/x$ を考えると $f(x_n) = n$ となり、$(f(x_n))$ は有界でなく、したがってコーシー列ではない。しかし、リプシッツ写像に関しては次が成り立つ：

命題 2.13. リプシッツ写像は、コーシー列をコーシー列に移す。

命題 2.14. 完備な距離空間と双リプシッツ同相である距離空間は完備である。

問 2.15. リプシッツ定数 λ が $\lambda < 1$ をみたしているようなリプシッツ写像 $f : (X, d) \to (X, d)$ は**縮小写像**と呼ばれる。これに関し次の問に答えよ。
(1) 点 $x \in X$ を任意に固定する。$x_n = f^{n-1}(x)$ で定められる点列 (x_n) はコーシー列であることを証明せよ。
(2) (X, d) は完備であると仮定すると、上で定めた点列 (x_n) はある点 $a \in X$ に収束する。このとき $f(a) = a$ であることを示せ。
(3) X の点 b で $f(b) = b$ をみたすものはただひとつしかないことを示せ。

2.4　距離空間の完備化

定義 2.16. 距離空間 (X, d) に対し、距離空間 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ および写像 $i : X \to \widetilde{X}$ の組で次の 3 条件をみたすものを (X, d) の**完備化**という：

1. $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ は完備である。
2. i が等長写像 $i : X \to i(X)$ を定める。
3. $i(X)$ は $\widetilde{X}$ で稠密である; つまり $\overline{i(X)} = \widetilde{X}$

任意の距離空間が完備化をユニークにもつことが知られている。