3　弧長距離空間

この章では J. Roe の教科書 “Lectures on Coarse Geometry” (AMS) や M. Gromov の “Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces” (Birkhäuser) などをもとに、「弧長距離」に関する基礎的事項を解説する。

3.1　距離空間の弧長距離

定義 3.1. 区間からの連続写像 $f : [a,b] \to X$ を距離空間 (X,d) の**道** あるいは **弧** あるいは **連続曲線**などという。道 f の**長さ** (あるいは**弧長**) $\ell(f)$ を次式で定める：

$$\ell(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} d(f(t_{i-1}), f(t_i)) \ .$$

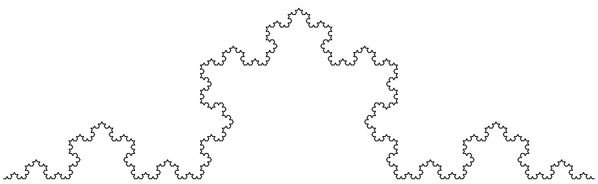
ただし sup は区間 $[a,b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b_0$ すべてに対する上記の形の総和の上限を表すものとし、上限が存在しない場合は ∞ とする。

命題 3.2. $f : [a,b] \to X$ に対し、必ず $d(f(a), f(b)) \le \ell(f)$ が成り立つ。

例. X がユークリッド空間で f が微分可能である場合は、$\ell(f)$ は次の積分で与えられる：

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt \ .$$

例. Koch 曲線 (雪片曲線) は弧長無限大である。



定義 3.3. 距離空間 (X,d) に新しい距離関数 (無限大の値を取る可能性があるので、正確には「距離関数もどき」)δ を次のように定める：

$$\delta(x,x') = \inf\{\ell(f) \mid f : [0,1] \to X,\ f(0) = x,\ f(1) = x'\} \ .$$

これを (X,d) の**弧長距離関数**と呼ぶ。

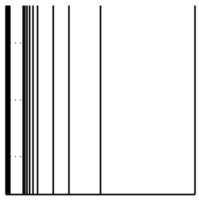
命題 3.4. 任意の x, x' に対し、$d(x,x') \le \delta(x,x')$ が成り立つ。従って恒等写像 $1 : (X,\delta) \to (X,d)$ はリプシッツである。

しかし恒等写像 $1 : (X,d) \to (X,\delta)$ は一般にリプシッツとは限らないし、連続とも限らない。つまり位相空間として (X,d) と (X,δ) は異なるものである可能性がある。いくつかの例を見てみよう。

例. ユークリッド平面の単位円のつくる距離空間を (X,d) とおく。(X,d) の弧長距離関数 δ は §1 で扱った、円弧に沿ってはかった距離である。この場合、恒等写像 $1 : (X,d) \to (X,\delta)$ が双リプシッツ同相写像であることはすでに調べた。

例. ユークリッド平面の部分距離空間 (X,d) を次式で定義する：

$$X=\{0,\ 1,\ 1/2,\ 1/3,\ \cdots,\ 1/n,\ \cdots\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0\}\ .$$



このとき、恒等写像 $1:(X,d)\to(X,\delta)$ は連続写像ではない。

例. Koch 曲線の像のつくる平面の部分距離空間を (X,d) とおく。このとき, 任意の $x\neq x'\in X$ に対して, $\delta(x,x')=\infty$ である。したがって、(X,δ) の位相は離散位相となる（任意の部分集合が開集合)。したがって恒等写像 $1:(X,d)\to(X,\delta)$ は不連続である。

以上のように $1:(X,d)\to(X,\delta)$ は必ずしも連続ではないし、さらには (X,d) の (連続な) 道 $f:[0,1]\to X$ は (X,δ) では連続とは限らない (例えば Koch 曲線)。しかし、長さが有限な道に関して次のことがわかる：

命題 3.5. 有限な長さを持つ道 $f:[a,b]\to X$ と $a\le t\le b$ を満たす t に対して、$f_t:[a,t]\to X$ を $f_t(s)=f(s)$ で定める。このとき $t\mapsto\ell(f_t)$ で定まる実数値関数 $[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続である。これより、f は (X,δ) においても連続であることがわかる。

定義 3.6. 距離空間 (X,d) において $d=\delta$ であるとき (X,d) を**弧長距離空間**と呼ぶ。

定理 3.7. 実は, 任意の距離空間 (X,d) に対し, (X,δ) は弧長距離空間である。つまり、(X,δ) の弧長距離関数は δ に一致する。

上の 3 つの例で、確かに (X,δ) が弧長距離空間であることが容易に確かめられる。弧長距離空間および弧長距離空間でない空間の具体例をもっと見てみよう。

例. $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ の定める平面の部分距離空間 (X,d) は弧長距離空間である。しかし、2 点 $(1,0)$, $(-1,0)$ を結ぶ弧長 2 の道は X の中に存在しない。一方、$\mathbb{R}^2-\{(0,y)|-1<y<1\}$ の定める平面の部分距離空間 (Y,d) は弧長距離空間ではない。実際 $p=(1,0)$, $q=(-1,0)$ とおくと, $d(p,q)=2$ であるが $\delta(p,q)=2\sqrt{2}$ である。

例. どの 2 点の距離も有限であるような通常の距離空間 (X,d) が弧長距離空間であるならば、任意の 2 点が (X,d) の道で結べなければならない。つまり弧状連結でなければならない。言い換えれば、弧状連結でない距離空間は決して弧長距離空間ではない。例えば $\mathbb{R}-\{0\}$, $\mathbb{Q}$ などは弧長距離空間ではない。

例. Γ を有限集合 F の生成する群とする。Γ に語距離を入れた距離空間は離散距離空間であるから、$\Gamma=\{e\}$ の場合を除いて弧長距離空間ではない。そこで、Γ の元を頂点とし、頂点 x と頂点 y を $x^{-1}y$ または $y^{-1}x$ が F の元であるとき一本の辺で結ぶことにより、Γ の **Caley グラフ**を定義する。Caley グラフには各辺の頂点の距離が 1 になるような弧長距離が入る。このとき頂点の作る部分距離空間の距離関数は Γ の語距離である。

3.2 弧長距離空間の性質

弧長距離空間のもつ特色を調べよう。

定理 3.8. 距離空間 (X, d) に関する次の条件は同値である：

1. 任意の点 $x, y \in X$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し, 次を満たす $z \in X$ が存在する：

$$d(x,z) \leq \frac{1}{2}d(x,y) + \epsilon, \quad d(z,y) \leq \frac{1}{2}d(x,y) + \epsilon \ .$$

2. 任意の点 $x, y \in X$ と $r_1 + r_2 \leq d(x,y)$ をみたす任意の $r_1, r_2 > 0$ に対し, 次がなりたつ：

$$d(B(x;r_1), B(y;r_2)) \leq d(x,y) - r_1 - r_2 \ .$$

定理 3.9. 弧長距離空間 (X, d) は上の条件 1 および 2 をみたす．また完備距離空間 (X, d) が上の条件 1 または 2 をみたすならば, (X, d) は弧長距離空間である。

命題 3.10. (X, d) は弧長距離空間、(Y, d) は任意の距離空間とする。写像 $f : X \to Y$ に関する次の条件は同値である：

1. 任意の $R > 0$ に対し次を満たす $S > 0$ が存在する：

$$d(x,x') < R \Rightarrow d(f(x), f(x')) < S \ .$$

2. 次を満たす $R > 0$, $S > 0$ が存在する：

$$d(x,x') < R \Rightarrow d(f(x), f(x')) < S \ .$$