4 粗な写像

この章では J. Roe の教科書 “Lectures on Coarse Geometry” (AMS) の第一章をもとに、「粗な写像」に関する基礎的事項を解説する。これはリプシッツ性と密接な関連を持つ。なお、ここで扱う距離空間は非有界なものが中心となる。

4.1 基礎的な定義

定義 4.1. 必ずしも連続とは限らない 写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ が**粗** (**コース coarse**) であるとは、次の 2 条件がみたされることをいう：

1. f は**有界型**である。すなわち、任意の $R>0$ に対して次をみたす $S>0$ が存在する：
$$d_X(x,x')\le R \Longrightarrow d_Y(f(x),f(x'))\le S\ .$$
2. f は**プロパー**である。すなわち、Y の任意の有界部分集合 B に対し、その f による逆像 $f^{-1}(B)$ は X の有界部分集合である。

例. (1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を $f(n)=an+b$ (a, b は整数の定数) で定める。f は粗になるためには $a\ne 0$ であることが必要十分である。
(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z};\ f(x)=[x]$ は粗である。
(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x^3$ は粗でない。

粗 (コース) であるためのふたつの条件をもう少し丁寧に見てみよう。まず最初に有界型であることに関連した別の性質を導入する。

定義 4.2. 必ずしも連続とは限らない写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ が**漸近的にリプシッツ**であるとは
$$d_Y(f(x),f(x'))\le\lambda d_X(x,x')+A \qquad (\ \forall x,\ x'\in X\ )$$
をみたす定数 λ, A が存在することをいう。

補題 4.3. (X,d) は弧長距離空間、Y は任意の距離空間とする。このとき写像 $f:X\to Y$ に関する次の 3 つの条件は同値である：

1. f は漸近的にリプシッツである。
2. f は有界型である。
3. ある正の数 R, S に対して、$d(x,x')\le R\Rightarrow d(f(x),f(x'))\le S$ が成り立つ。

定義 4.4. 集合 X から距離空間 (Y,d) への写像 f, f' が**近い**とは、$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{\ d(f(x),f'(x))\mid x\in X\ \}$ が有界であることをいう。

例. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $f(x)=x$, $g(x)=x+4$, $h(x)=[x]$ はすべて互いに近い。

定義 4.5. 距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y) が**粗 (コース) 同値**であるとは、粗な写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ で $g\circ f$ と 1_X、$f\circ g$ と 1_Y がそれぞれ近いものが存在することをいう。f, g を**粗 (コース) 同値写像**という。

例. (1) $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ は粗同値である。
(2) 双リプシッツ同相写像は粗同値写像である。

4.2 群作用と粗同値

今の例の (1) はもっと一般的な形に拡張できる。そのためにいくつかの定義をする。

定義 4.6. (1) 距離空間 (または一般の位相空間) X に対し、X から X 自身への同相写像の全体の集合を $\mathrm{Homeo}(X)$ と書く。これは合成により群の構造をもつ。
(2) 群 Γ の距離空間 X への**作用**とは群の準同型写像 $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(X)$ のことをいう。$\phi(\gamma)(x)$ をしばしば $\gamma \cdot x$ または単に γx と表す。また、X の部分集合 A に対し $\phi(\gamma)$ による A の像を $\gamma \cdot A$ または単に γA とかく。さらに $\cup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(A)$ を $\Gamma \cdot A$ とかく。ϕ は写像 $\Gamma \times X \to X$ を $(\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x$ で定める。

問 4.7. 上の書き方に従うとき、等式 $(\gamma\gamma') \cdot x = \gamma \cdot (\gamma' \cdot x)$, $1 \cdot x = x$ が成り立つことを示せ。

例. 群 $\mathbb{Z}$ の直線 $\mathbb{R}$ への作用を $\phi(n)(x) = n + x$ で定める。本当に作用になっていることを確かめよ。

定義 4.8. A は距離空間 X の部分集合とする。
(1) A が X の**コンパクト部分集合**であるとは、もし $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X の開集合の族で $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \supset A$ であるならば、必ずそのうちの有限個 $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_k}$ で $\bigcup_{i=1}^{k} U_{\lambda_i} \supset A$ をみたすものが存在することをいう。これは、A に X の誘導する距離空間の構造を入れたとき, A が第 2 節の意味でコンパクトであることと同値である。
(2) A が X の中で**相対コンパクト**であるとは、X における A の閉包が X のコンパクト部分集合であることをいう。

定義 4.9. 距離空間 X が**局所コンパクト**であるとは、各点 $x \in X$ がコンパクトな近傍を持つことをいう。

問 4.10. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は局所コンパクトではないことを証明せよ。

定義 4.11. 群 Γ が距離空間 X に作用しているとする。
(1) あるコンパクト部分集合 K に対して、$\Gamma \cdot K = X$ が成り立つとき、作用は**ココンパクト**であるという。
(2) 各 $x \in X$ に対しうまく x の近傍 U_x をとると、有限個の γ を除き、$\gamma U_x \cap U_x =$ が成り立つとき、作用は**プロパー**であるという。
(3) 各 $\gamma \in \Gamma$ に対し $\phi(\gamma) : X \to X$ が距離同型 (アイソメトリー) であるとき、Γ は**アイソメトリーで作用する**という。

例. 群 $\mathbb{Z}$ はユークリッド直線 $\mathbb{R}$ にプロパーかつココンパクトにアイソメトリーで作用している。

補題 4.12. 群 Γ が連結距離空間 X にプロパーかつココンパクトにアイソメトリーで作用しているとする。このとき、X は局所コンパクトかつ完備であり、Γ は有限生成である。

定理 4.13. (Švarc-Milnor) X は弧長距離空間で、群 Γ が X にプロパーかつココンパクトにアイソメトリーで作用しているとする。このとき Γ は X に粗同値である。粗同値写像は $\gamma \mapsto \gamma \cdot x_0$ で与えられる。ただし x_0 は任意に固定された X の点である。

系 4.14. Γ は有限生成の群で、Γ' はその指数有限な部分群とする。このとき包含写像 $\Gamma' \to \Gamma$ は粗同値写像である。