閉曲面のワード表示の変形

[基本変形リスト]

1. 文字を取り替える。
2. 式を巡回的に並べ替える：$AB \longleftrightarrow BA$
3. $Aaa^{-1}B \longleftrightarrow AB \longleftrightarrow Aa^{-1}aB$, ただし $AB \neq \emptyset$ とする。
4. $AaBCa^{-1}D \longleftrightarrow AaCBa^{-1}D$
5. $AB^{-1}aaC \longleftrightarrow AaBaC \longleftrightarrow AaaB^{-1}C$
6. 式全体 A を A^{-1} で置き換える。

目標：以下のどれかに変形する。

(1) aa^{-1}　　(S^2)

(2) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$　　(nT^2)

(3) $a_1a_1a_2a_2\dots a_na_n$　　(nP^2)

つまり与えられたワードを aa や $aba^{-1}b^{-1}$ のような「基本部品」の和で表すことを目標とする。

注意. 基本変形 5 から、aa の形の基本部品はワード中の任意の箇所に移動させることができることがわかる。基本部品 $aba^{-1}b^{-1}$ に関しても同じことが言える。

$$
\begin{aligned}
&ABaba^{-1}b^{-1}C = ABaba^{-1}\boxed{b^{-1}C} \xrightarrow{2} \boxed{b^{-1}C}ABaba^{-1} = b^{-1}\boxed{CA}\boxed{Ba}ba^{-1} \\
&\xrightarrow{4} b^{-1}\boxed{Ba}\boxed{CA}ba^{-1} = b^{-1}Ba\boxed{CA}\boxed{b}a^{-1} \xrightarrow{4} b^{-1}Ba\boxed{b}\boxed{CA}a^{-1} = \boxed{b^{-1}Ba}bCAa^{-1} \\
&\xrightarrow{2} bCAa^{-1}\boxed{b^{-1}Ba} = b\boxed{CA}\boxed{a^{-1}}b^{-1}Ba \xrightarrow{4} b\boxed{a^{-1}}\boxed{CA}b^{-1}Ba = ba^{-1}\boxed{CA}\boxed{b^{-1}B}a \\
&\xrightarrow{4} ba^{-1}\boxed{b^{-1}B}\boxed{CA}a = ba^{-1}b^{-1}BC\boxed{Aa} \xrightarrow{2} \boxed{Aa}ba^{-1}b^{-1}BC = Aaba^{-1}b^{-1}BC
\end{aligned}
$$

まず、同じ向きの組があるかどうか調べる。もしあればこの曲面はメビウスの帯を含む、つまり向き付け不可能である。このときは必ず (3) になる。もし、同じ向きの組がなければ、この曲面はメビウスの帯を含まない、つまり向き付け可能である。このときは (1) または (2) になる。基本変形で向き付け不可能なものと可能なものが入れ替わることはない。

最初に、同じ向きの組がない場合を考える。文字の数がひとつなら (1) であるから、以下文字が 2 つ以上あるとする。2 つの文字 a, b の組たちの位置関係は次の 2 つのどちらかになる。

“からんでいない”：$\boxed{\cdots a \cdots a^{-1} \cdots b \cdots b^{-1} \cdots}$ とか $\boxed{\cdots a^{-1} \cdots b \cdots b^{-1} \cdots a \cdots}$

“からんでいる”：$\boxed{\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots}$

もし、どの 2 つの文字の組もからんでいなければ、消去可能な組 aa^{-1} または $a^{-1}a$ がみつかるはずであるから、それを消去する。次々に繰り返して行き、最終的に (1) になる。

からんでいる２つの文字の組があったとする。基本変形 1, 2 を用いて $aAbBa^{-1}Cb^{-1}D$ の形であるとしてよい。これを以下のように変形して a, b, a^{-1}, b^{-1} を先頭にあつめることができる。

$$aAbBa^{-1}Cb^{-1}D = a\boxed{A}\boxed{bB}a^{-1}Cb^{-1}D \xrightarrow{4} a\boxed{bB}\boxed{A}a^{-1}Cb^{-1}D = ab\boxed{BA}\boxed{a^{-1}C}b^{-1}D$$
$$\xrightarrow{4} ab\boxed{a^{-1}C}\boxed{BA}b^{-1}D = \boxed{a}ba^{-1}CBA\,b^{-1}D \xrightarrow{2} ba^{-1}CBA\,b^{-1}D\boxed{a} = ba^{-1}\boxed{CBA}\boxed{b^{-1}D}a$$
$$\xrightarrow{4} ba^{-1}\boxed{b^{-1}D}\boxed{CBA}a = ba^{-1}b^{-1}DCBA\boxed{a} \xrightarrow{2} \boxed{a}ba^{-1}b^{-1}DCBA = aba^{-1}b^{-1}DCBA$$

上の変形の方針は、以下の通りである：まず a と a^{-1} の組を使って、挟まれている b を a のすぐ後に移動する。次に b と b^{-1} の組を使って、挟まれている a^{-1} を b のすぐ後に移動する。次に一旦先頭の a を末尾に回した後、a^{-1} と a の組を利用して、それらに挟まれている b^{-1} を a^{-1} のすぐ後に移動する。一度後ろに下げた a を再度先頭に戻せばよい。
次にこの $DCBA$ の部分の文字の組について、からんでいるものがあるかどうか調べる。もしどの２つの文字の組もからんでいなければ基本変形３を繰り返してこの部分を消すことができる。このとき閉曲面は T^2 である。もし、$DCBA$ の中にからんでいる c と d の２組があれば、基本変形 2 を用いて $cA'dB'c^{-1}C'd^{-1}D'$ としておいて、それに対して上の変形を用いて、$c^{-1}d^{-1}cdC'B'A'D'$ に変えることができる。$a^{-1}b^{-1}ab$ は A', B', C', D' のどこかにはいっているが、上の注意により、先頭に出すことが出来る：$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}C''B''A''D''$。また $C''B''A''D''$ の中にからんでいる組があるかどうか調べる。この手順を続けていくと、必ず (2) の状態に到達する。

次に同じ向きの組がある場合を考える。$AcBcC$ となっていれば、基本変形５により $AccB^{-1}D$ のように２つの c が隣り合うようにできる。同じ向きの組すべてに対してこれを行い、同じ向きの組の文字は隣り合っているとしてよい。さらに、上の注意により、これらはみな先頭に集めることができる：$c_1c_1c_2c_2\cdots c_mc_mX$。$X$ の部分には同じ向きの組はない。この X に対して、同じ向きの組がなかった場合の操作を行う。まず、からんでいる２つの文字の組がなければ、X は消すことができるから (3) になる。もしもしからんでいる２つの組があれば、それらを先頭に集めることができる：$a^{-1}b^{-1}abCBAD$。ここで、$c_1c_1c_2c_2\cdots c_mc_m$ は C, B, A, D のどこかにはいっている。これらは先頭に出すことが出来るから、結局 $c_1c_1c_2c_2\cdots c_mc_ma^{-1}b^{-1}abY$ の形に変形できる。さらに $C = c_1c_1\cdots c_{m-1}c_{m-1}$ とおいて、次のように変形する：

$$\begin{aligned}
c_1c_1c_2c_2\cdots c_mc_ma^{-1}b^{-1}abY &= Cc_mc_ma^{-1}b^{-1}a\boxed{bY} \xrightarrow{2} \boxed{bY}Cc_mc_ma^{-1}b^{-1}a \\
&= b\boxed{YCc_m}\boxed{c_ma^{-1}}b^{-1}a \xrightarrow{4} b\boxed{c_ma^{-1}}\boxed{YCc_m}b^{-1}a = bc_m\boxed{a^{-1}YC}c_mb^{-1}a \\
&\xrightarrow{5} bc_mc_m\boxed{(a^{-1}YC)^{-1}}b^{-1}a = bc_mc_mC^{-1}Y^{-1}a\boxed{b^{-1}}a \xrightarrow{5} bc_mc_mC^{-1}Y^{-1}aa\boxed{b} \\
&= bc_mc_mC^{-1}Y^{-1}\boxed{aab} \xrightarrow{2} \boxed{aab}bc_mc_mC^{-1}Y^{-1} = aabbc_mc_mc_{m-1}^{-1}c_{m-1}^{-1}\cdots c_1^{-1}c_1^{-1}Y^{-1}
\end{aligned}$$

元の $c_1c_1c_2c_2\cdots c_mc_mX$ と比べると、cc の形の基本部品が２個増え、X に対応する部分 Y^{-1} の長さが X よりも 4 だけ短くなっている。また Y^{-1} には同じ向きの組はない。この操作を続けていくと必ず (3) に到達する。

以上で、とりあえず目標は達成されたことになる。証明は後回しになるが、(1) S^2, (2) T^2, $2T^2$, $3T^2, \ldots$, (3) P^2, $2P^2$, $3P^2, \ldots$ たちはすべて互いに相異なることが知られている。以下ではこの事実は認めることにする。ここで証明をもう一度ざっとでよいので見て欲しいのだが、基本変形のうち最後の６は一度も使っていない！　実は基本変形６は１〜５の基本変形を繰り返し行うことによって実現できるはずである。というのは、A と A^{-1} の両者を基本変形１〜５のみを用いて (1)(2)(3) の標準形に変形できることがわかったのであるから、それらをつなげればよいのである。

さて、曲面の連結和の問題を考えることにする。まず用語の復習をしておく。2 次元円板 D^2 から閉曲面 M への埋め込みを M の「**向き**」と呼ぶことにする。ひとつの「向き」$f : D^2 \to M$ に対して、それと折り返し写像

$$r : D^2 \to D^2 \quad ; \qquad r(x, y) = (-x, y)$$

を合成して得られる $f \circ r : D^2 \to M$ を**逆の**「向き」という。埋め込みであることを保ったまま連続的に変形して移りあうとき、2 つの「向き」は同じであるとみなす。閉曲面が向き付け不可能であるならば（すなわちメビウスの帯を含めば)、その曲面は「向き」をひとつしか持たない。つまり、ある「向き」とその逆の「向き」は同じものである。閉曲面が向き付け可能であるならば（すなわちメビウスの帯を含まないならば)、その曲面はちょうどふたつの「向き」をもつ。曲面 M に「向き」を考えているとき、逆の「向き」を与えたものを $\overline{M}$ で表すことにする。閉曲面を展開図を用いてワード表示している場合は、展開図自身が平面の部分集合であるから、その中に標準的な円板をそのままの向きで相似写像により縮小したものが、中心に置かれていると思って、「向き」を与えるものとする。この規約のもとでは、展開図を裏返すことが「向き」を逆にすることに対応する。したがって、A が M のワード表示ならば、A^{-1} は $\overline{M}$ のワード表示となる。

命題. 「向き」を固定した任意の閉曲面 M に対し、M と $\overline{M}$ の間に「向き」を保つ同相写像 ϕ が存在する。

ここで、$\phi : M \to N$ が **「向き」を保つ**とは、$f : D^2 \to M$ が M の「向き」を表すとするとき、$\phi \circ f : D^2 \to N$ が N の「向き」と一致することを意味している。

証明. 「向き」がそもそも 1 つしかない場合は明らか。「向き」が 2 つある場合は、M のワード表示 A を $\overline{M}$ のワード表示 A^{-1} に基本変形 1 〜 4 を用いて変形できる。この 4 種類の変形にはいずれも「向き」を保つ同相写像が対応しているので、それらを合成して求める写像が得られる。 □

定義. ふたつの閉曲面 M, N にそれぞれ「向き」$f : D^2 \to M$, $g : D^2 \to N$ が与えられているとする。$M - f(\mathrm{int}D^2)$ と $N - g(\mathrm{int}D^2)$ の縁を $f(x, y)$ と $f \circ r(x, y) = f(-x, y)$ が貼り付くように貼り合わせたものを $M\#N$ と表し、M と N の**連結和**という。

上の命題より、次の命題が導かれる。これにより、閉曲面の連結和は用いる「向き」によらないことがわかる。

命題. $M\#N \cong M\#\overline{N}$

M, N それぞれのワード表示を A, B とする。ただし、**共通する文字を含まないようにしておく**。簡単のため、展開図 (多角形) を円板に取り替えて考える。中心にある「向き」を与える小円板を、ワード表示の始点で内接するように平行移動し、これらを用いて連結和を作る。このとき $M\#N$, $M\#\overline{N}$ のワード表示として AB, AB^{-1} をとることが出来る。上の命題より、このふたつのワード表示は基本変形 1〜5 を用いて移りあうことがわかる。より一般に、上のワード表示 AB を $A\#B$ と連結和に分けて表し、おのおのの部分 A, B について基本変形 1 〜 6 を適用することができる。試験などではどんどん使ってよい。曲面とその表示を混同させて書くと、今の例の場合は、

$$AB = A\#B \xrightarrow{\ 6\ } A\#B^{-1} = AB^{-1}$$

という変形をしていると思えばよい。3 個以上の閉曲面の連結和になっているときも同様である。