幾何学 I・幾何学演習 I 模擬試験　（7 月 7 日）

[1] xy 平面上の曲線 $\vec{p} = (\cosh t, \sinh t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ について以下の問いに答えなさい。

1. $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ とおいて t を消去し、x と y に関する方程式を求めなさい。

2. 上のパラメータ表示を点の運動と思ったときの、時刻 t における速度ベクトルを求めなさい。

3. この曲線の長さを積分を用いた式で表しなさい。

4. 点 $\vec{p}(t)$ における進行方向左向きの単位法線ベクトル $\vec{n}(t)$ を求めなさい。

5. 公式 $\kappa(t) = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$ を用いて、この曲線の点 $\vec{p}(0)$ における曲率を求めなさい。

6. この曲線を y 軸のまわりに 1 回転して得られる曲面のパラメータ表示 $\vec{q}(u, v)$, $\vec{q}_u$, $\vec{q}_v$, $\vec{q}_u \times \vec{q}_v$, 単位法線ベクトル $\vec{\nu}(u, v)$, 面積の積分表示, 第一基本量 (E, F, G), 第二基本量 (L, M, N), ガウス曲率 K を求めなさい。ただし $\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}$ のことを $\alpha(u)$ とおいて表現してもかまいません。

[2] パラメータ表示 $\vec{p} = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で与えられる曲線について、以下の問いに答えなさい。

1. $\dot{\vec{p}}(t)$ を計算しなさい。

2. 弧長パラメータ s を t の式で表しなさい。

3. この曲線の弧長を求めなさい。

4. この曲線の単位接ベクトル $\vec{e}(s)$, 主法線ベクトル $\vec{n}(s)$, 従法線ベクトル $\vec{b}(s)$ を求めなさい。

5. この曲線の曲率 $\kappa(t)$ を求めなさい。

6. この曲線の捩率 $\tau(t)$ を求めなさい。