数学要論 II 期末試験 (90 分)　問題は表面裏面に分かれています。

学生番号 :　　　　　　　　　　　　　　氏名 :

[1] 以下の各問いに答えなさい。

(1) 集合 X の上の距離関数 d とはどのようなものか、説明しなさい。

(2) $d(x, y) = x - y$ で定まる写像 $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ の上の距離関数ですか。理由をつけて答えなさい。

(3) 距離空間 (X, d) において、点 $x \in X$ の半径 r の近傍 $N(x; r)$ とはどういうものですか。説明しなさい。

(4) 距離空間 (X, d) において、点 $x \in X$ が部分集合 $A \subset X$ の内点であるとはどういうことですか。説明しなさい。

(5) ふたつの距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) が与えられたとき、写像 $f : X \to Y$ が連続であるとはどういうことですか。説明しなさい。

[2] ユークリッド直線 $(\mathbf{R}, d)$ において、集合 $A = (0,1) \cup (1,2]$ の内部 A^i, 外部 A^e, 境界 A^f, 閉包 A^a を求めなさい。（答えだけでけっこうですが、ちゃんと $\mathbf{R}$ の部分集合になっているか注意して答えて下さい。）

[3] 次の各問いに答えなさい。

(1) 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が点 $x \in X$ に収束するとはどういうことですか。説明しなさい。

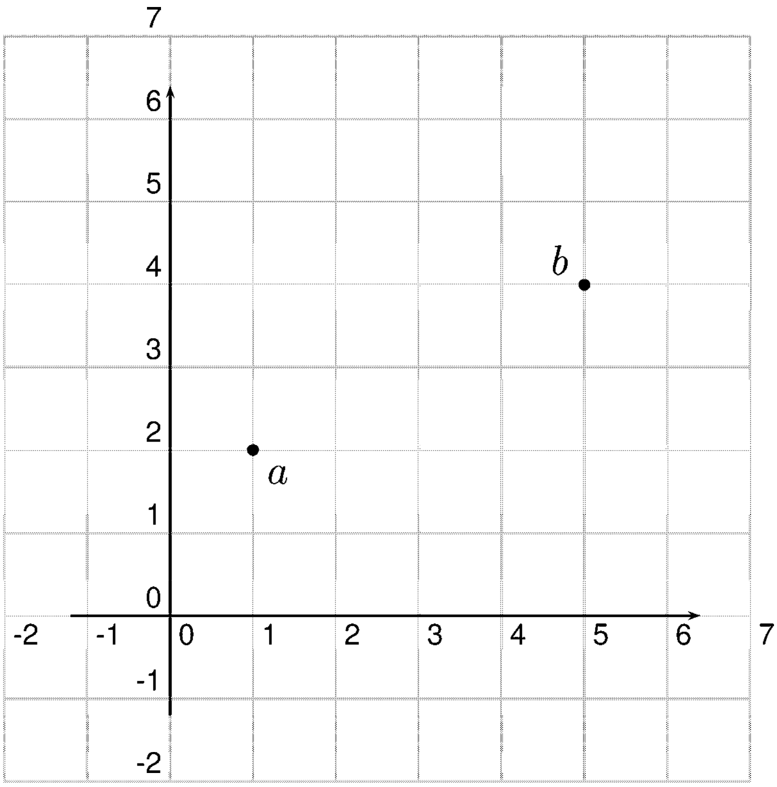
(2) d_D を $\mathbf{R}$ の上の離散距離関数とします。すなわち、$x = y$ ならば、$d_D(x, y) = 0$、$x \neq y$ ならば $d_D(x, y) = 1$ とします。$(\mathbf{R}, d_D)$ の点列 $\{x_n\}$ を $x_n = \frac{1}{n}$ で定めるとき、$\{x_n\}$ はどの点にも収束しないことを証明しなさい。

[4] 次式で定められる $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$ 上の距離関数 d に関して以下の問いに答えなさい。

$$d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$$

(1) $a = (1, 2),\ b = (5, 4)$ とするとき $d(a, b)$ を計算しなさい。

(2) 次の方程式で表される図形を描きなさい。
$d((x, y), (1, 2)) = d((x, y), (5, 4))$



[5] (X, d) は距離空間とします。部分集合 U が開集合であるとは、どういうことですか。説明しなさい。またふたつの部分集合 A, U の間に $U \subset A$ という関係があり、さらに U が開集合であるならば、$U \subset A^i$ が成り立つことを証明しなさい。（右ページを使ってください。）