数学要論 I・数学要論演習 I No.2

[1] 真理表を使って次の同値を証明しなさい。

(1) $P \vee Q \equiv Q \vee P$ (2) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

(3) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ (4) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

(5) $\neg(\neg P) \equiv P$

(6) $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$

(7) $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \equiv (P \Rightarrow Q)$

(8) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (9) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

[2] つぎのおのおのの命題（あるいは命題もどき）について、それらがもっと単純な命題や命題関数からどのようにしてつくられているか、構造を調べなさい。真であるかどうか考えなさい。またおのおのを否定した命題を作ってみなさい。

(1) n が自然数であるならば $n(n+1)$ は偶数である。

(2) x が 1 より大きい実数であるならば $x^2 > 1$ が成りたつ。

(3) $x^2 = -1$ をみたす実数 x が存在する。

(4) 任意の実数 x に対し、自然数 n で $n > x$ をみたすものが存在する。

(5) 任意の自然数 n に対して、$x > n$ が成り立つような実数 x が存在する。

(6) 任意の自然数 n に対して $x > n$ が成り立つような実数 x が、存在する。

(7) 任意の自然数 n に対し、$2^{(2^n)} + 1$ は素数である。

[3] 以下のおのおのの命題を証明しなさい。ただし A, B, C はある普遍集合 U の部分集合です。

(1) $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$ である.

(2) すべての集合 A に対して $\emptyset \subset A$ である.

(3) すべての集合 A およびすべての要素 $a \in U$ に対して, $a \in A \Longleftrightarrow \{a\} \subset A$ である.

(4) $A \subset A \cup B$. (5) $A \supset A \cap B$.

(6) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$. (7) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

(8) $A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$. (9) $A \subset B \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C$.

(10) $A \subset B \Longleftrightarrow A^c \supset B^c$.

(11) $A \subset C \Longrightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

(12) $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A^c \supset B \Longleftrightarrow A \subset B^c$.