(６０年代の) 手術の理論

based on

“Algebraic and Geometric Surgery”

by A. Ranicki

予定

１回目：準備

２回目：手術の障害類

３回目：手術の完全列

1. 多様体

定義. n **次元位相多様体** (TOP **多様体**)

$=$ **位相空間で次をみたすもの**

(1) **局所的に** $\mathbb{R}^n$

(2) **距離づけ可能である**

(3) **可分である**

（稠密で高々可算な部分集合が存在）

定義. n **次元位相多様体** (TOP **多様体**)

$=$ **位相空間で次をみたすもの**

(1) **局所的に** $\mathbb{R}^n$

(2) **ハウスドルフ　かつ　パラコンパクト**

(3) **可分である**

（稠密で高々可算な部分集合が存在）

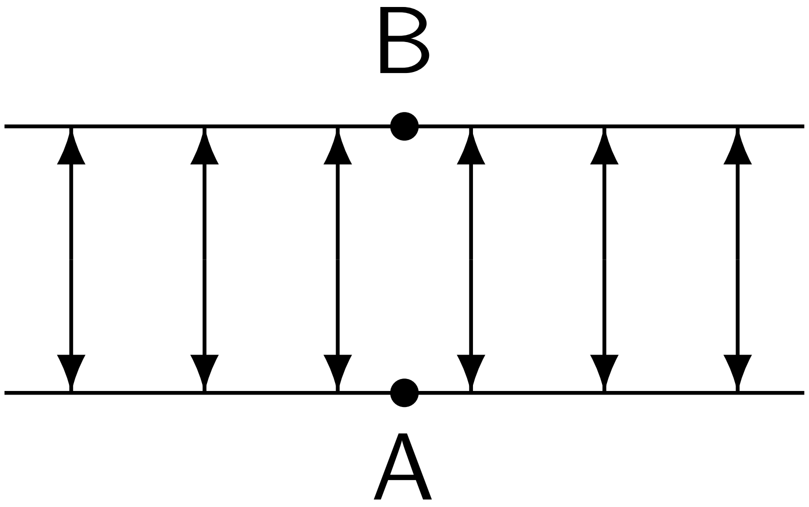
定義. n 次元位相多様体 (TOP 多様体)

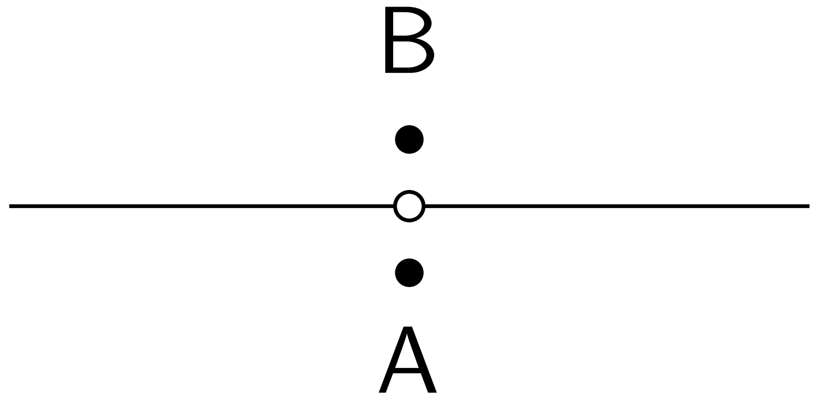
$=$ 位相空間で次をみたすもの

(1) 局所的に $\mathbb{R}^n$

(2) ユークリッド空間に埋め込み可能

局所的に $\mathbb{R}$ と同相だが，ハウスドルフではない例





２直線で A, B 以外を同一視

局所的に $\mathbb{R}$ と同相だが，パラコンパクトではない例

Long Line $= X \cup X$ （ダブル）

$X = \omega_1 \times [0, 1)$ （Long Ray）

ω_1 ： 最小の非可算順序数

定義.

(1) $\varphi : U \xrightarrow{\cong} \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ **：チャート**

(2) $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)\}$, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ **：**

アトラス

(3) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ **：**

座標変換

定義.

- 座標変換が C^∞ 微分同相なアトラス：C^∞ 構造

  位相多様体＋ C^∞ 構造＝ C^∞ 多様体

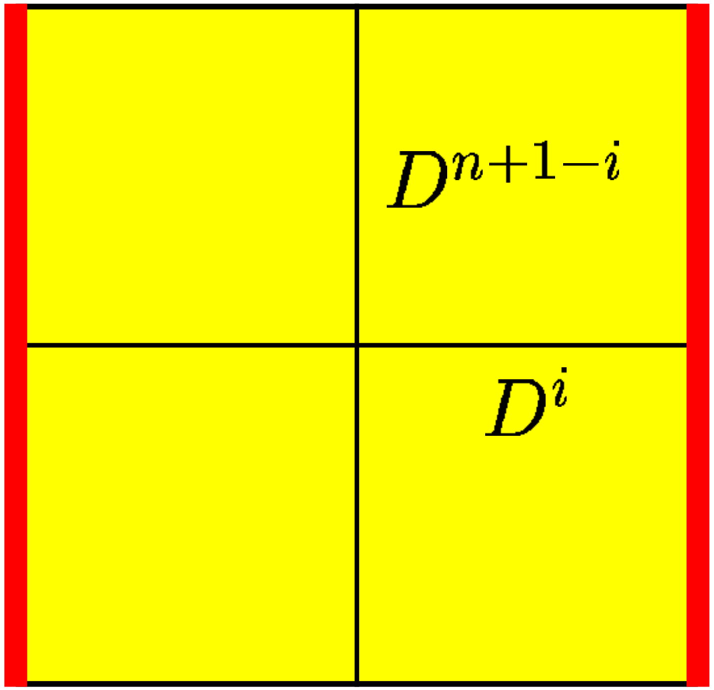
- 座標変換が PL 同相写像なアトラス：PL 構造

  位相多様体＋ PL 構造＝ PL 多様体

※写像が PL $\Longleftrightarrow$ グラフが局所有限な単体複体

2. ハンドル分解と手術

$H = D^i \times D^{n+1-i}$: $(n+1)$ 次元 i ハンドル



埋め込み $g : S^{i-1} \times D^{n+1-i} \to \partial W^{n+1}$ で

W^{n+1} に貼り付ける。

W：$(n+1)$ 次元多様体

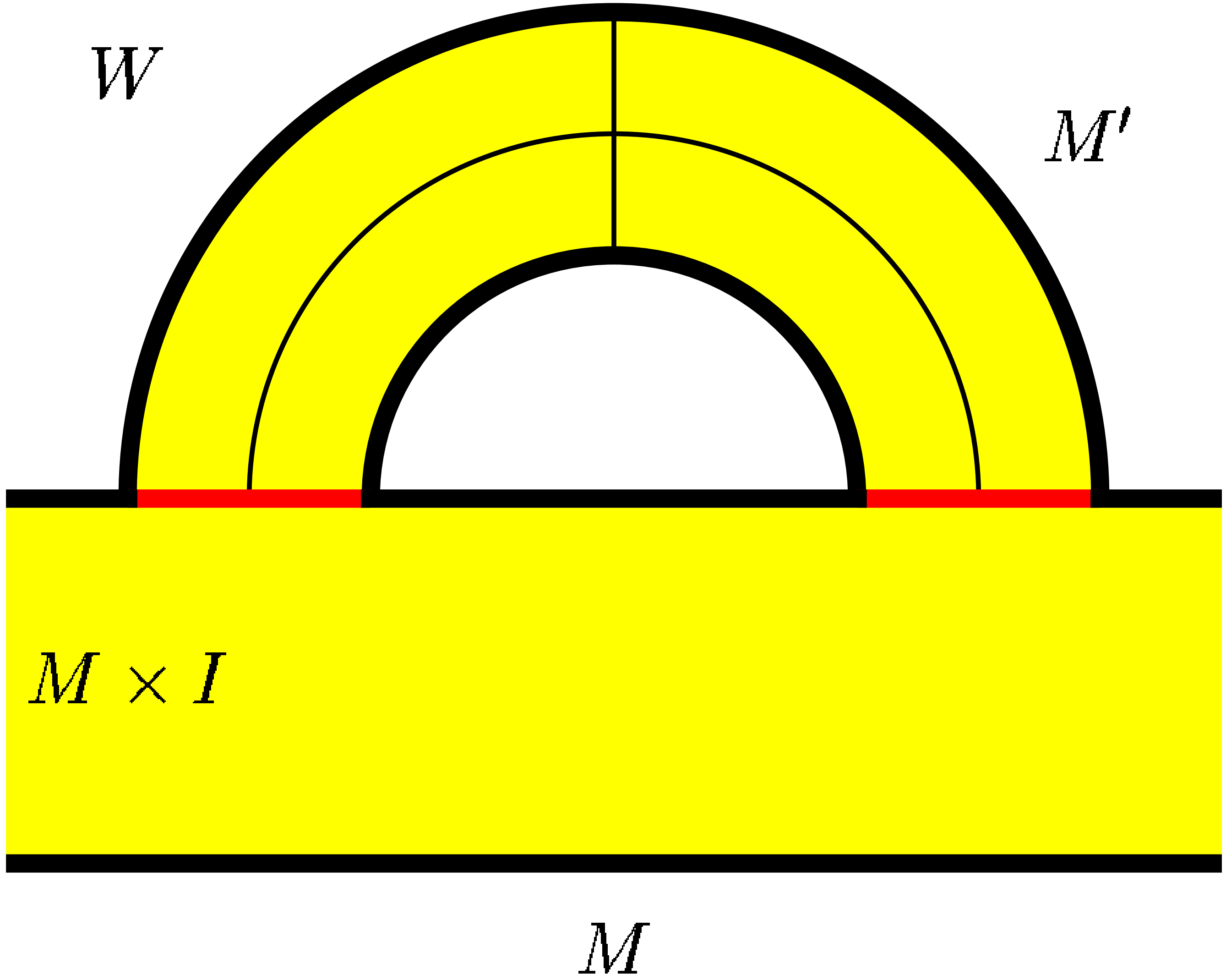
$M \subset \partial W$ は境界の余次元 0 の部分多様体

(W, M) のハンドル体構造

$$W = M \times I \cup \text{ハンドルたち（局所有限）}$$

ただし、$M \times 0 \cup \partial M \times I$ 以外に貼り付ける

最初のハンドルを貼り付けたところ：



- **ハンドル体構造** $\Longrightarrow CW$ **複体の構造**

  $\Longrightarrow$ **鎖複体**

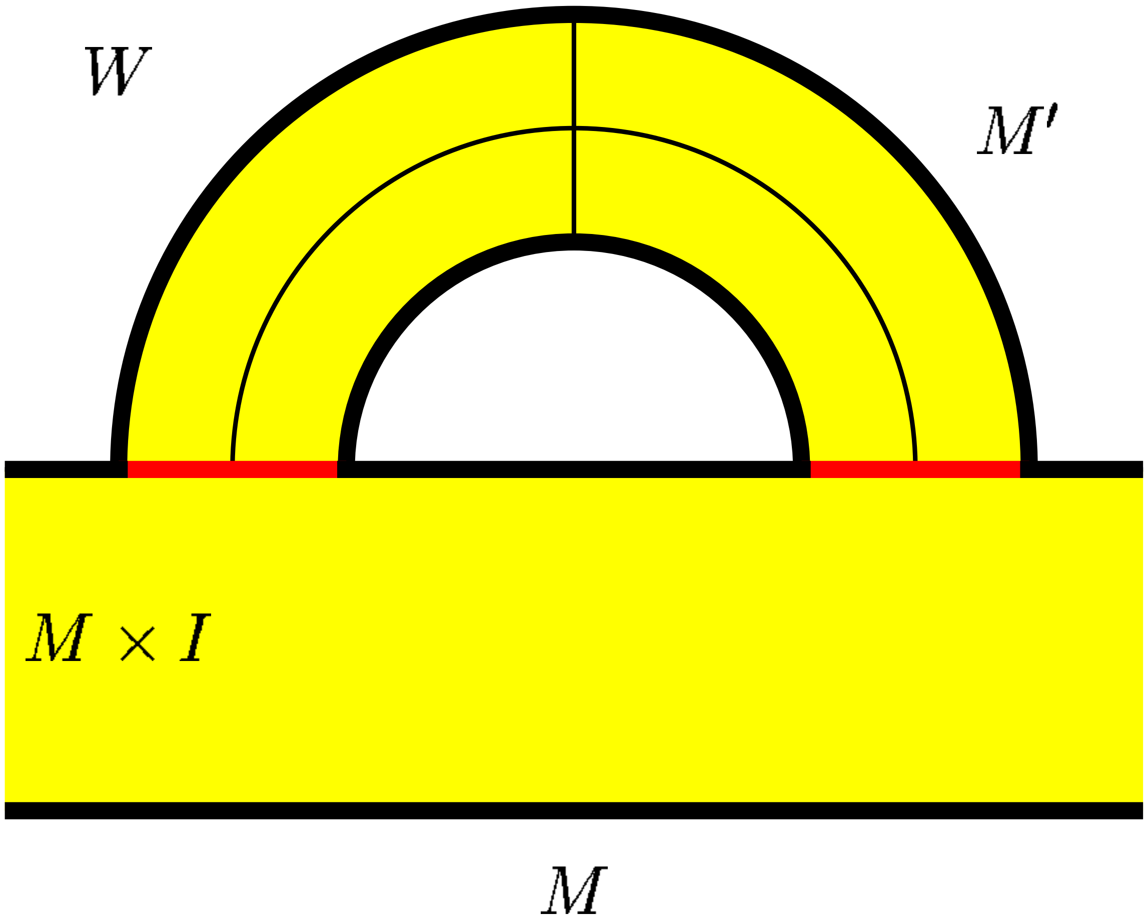
- **上下の入れ替え** $\Longrightarrow$ **双対ハンドル体**

  k **ハンドル** $\Longleftrightarrow (n+1-k)$ **ハンドル**

  （双対性）

- **ハンドル体構造の存在：**TOP $n+1=4$ **以外** OK

(多様体の) 手術：$M \Longrightarrow M'$ （W:手術のトレース）



$(k+1)$ **ハンドル（**$[\frac{n}{2}] > k$**）を貼り付けた場合：**

$$\pi_j(M') \cong \pi_j(M) \qquad j \le k-1$$

$$\pi_k(M') \cong \pi_k(M)/\langle \partial D^{k+1} \times 0 \rangle$$

理由：

(W, M) **は** k **連結で** $\langle \partial D^{k+1} \times 0 \rangle$ **は消される**

(W, M') **は** $(n-k-1)$ **連結**

※ (X, A) **が** n **連結** $\Longleftrightarrow \pi_k(X, A, *) = 0$ **(**$\forall k \le n$**)**

定理. CW 対 (X, A) が n 連結であるならば，$X^{(n)} \cup A$ は A を固定したままで A に変形する．

※ $X^{(n)}$ ：n 骨格

系. CW 対 (X, A) がすべての n に対して n 連結であるならば，X は A を固定したままで A に変形する．

系 (Whitehead の定理). もし CW 空間の間の写像 $f : X \to Y$ がすべての $i \geq 0$ に対し同型 $f_* : \pi_i(X, *) \to \pi_i(Y, *)$ を誘導するならば，f はホモトピー同値写像である.

証明. f の写像柱を考える：

$$\mathcal{M}(f) = X \times [0,1] \cup_{(x,1)\sim f(x)} Y$$

任意の写像はホモトピー的には包含写像である。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Y \arrow[d, "\simeq"] \\
X \arrow[r, hook] & \mathcal{M}(f)
\end{tikzcd}
$$

$\pi_j(\mathcal{M}(f), X) = \pi_j(f)$ と書くと

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \pi_j(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_j(\mathcal{M}(f)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_j(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
\arrow[r] & \pi_j(X) \arrow[r, "f_*", "\cong"'] & \pi_j(Y) \arrow[r] & \pi_j(f) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

$\Longrightarrow \pi_*(f) = 0$

$\Longrightarrow X \subset \mathcal{M}(f)$ はホモトピー同値

$\Longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ はホモトピー同値 $\square$

$\pi_j(f)$ の元を与えることは，次の可換図式を与えることと同じ：

$$
\begin{tikzcd}
S^{j-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
D^j \arrow[r, "h"] & Y
\end{tikzcd}
$$

定義：f は n 連結 $\iff \pi_j(f) = 0\ (\forall j \leq n)$

定理 (Hurewicz **の定理**). (X,A) **が** n **連結な** CW **対で，** X **も** A **も単連結ならば，フレビッツ写像は同型。**

$$h:\pi_{n+1}(X,A,*)\xrightarrow{\cong}H_{n+1}(X,A)$$
$$[f:(D^{n+1},S^n)\to(X,A)]\mapsto f_*[D^{n+1},S^n]$$

系. $f:X\to Y$:**単連結な** CW **複体の間の写像**

f:**ホモトピー同値** $\Longleftrightarrow f_*:H_*(X)\xrightarrow{\cong}H_*(Y)$

定理. CW 複体の間の写像 $f : X \to Y$ がホモトピー同値写像であるためには，次の２条件が満たされることが必要十分である：

(1) $f_* : \pi_1(X, *) \to \pi_1(Y, *)$ が同型写像,

(2) 普遍被覆空間の間に自然に定まる写像 $\tilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ がホモロジー群の同型を誘導する．

証明. すでに、$(n-1)$ 連結と示されたとする。

$\pi_n(f) \cong \pi_n(\tilde{f}) \cong H_n(\tilde{f}) = 0 \Longrightarrow n$ 連結 $\square$

$f : X \to Y$, $f_* : \pi_1(X) \cong \pi_1(Y) = \pi$

$\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ **：普遍被覆空間**

$C_j(\widetilde{X})$, $C_j(\widetilde{Y})$ **：**$\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ **の鎖群**

$\Rightarrow$ X, Y **の** j **胞体を基底とする自由** $\mathbb{Z}[\pi]$ **加群**

(2)$\Longleftrightarrow$ $\tilde{f} : C(\widetilde{X}) \to C(\widetilde{Y})$ **が鎖同値写像**

($\mathbb{Z}[\pi]$ **加群鎖複体として)**

$\Longleftrightarrow$ **代数的写像錐** $\mathcal{C}(\tilde{f})$ **が非輪状**

$$\Longleftrightarrow K_*(X) = H_{*+1}(\mathcal{M}(\tilde{f}), \widetilde{X}) = 0$$

定義． **写像の列** $F \to E \xrightarrow{p} B$ **は，** p **が** homotopy lifting property **を持ち** $F = f^{-1}(b)$ $(b \in B)$ **であるとき，ファイブレーションであるという．**

$$
\begin{tikzcd}
X \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "\exists g"] & B
\end{tikzcd}
$$

各空間 F, E, B が連結で基点をもち，ファイブレーション $F \to E \xrightarrow{p} B$ が基点を保つならば，ホモトピー群の完全列がある：

$$\begin{aligned}\to \pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \\ \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots \to \pi_1(B)\ .\end{aligned}$$

任意の写像はホモトピー的なファイブレーション

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"'] & B \arrow[d, equal] \\ E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

- $E = \{(x, \gamma) | x \in X,\ \gamma : I \to B,\ \gamma(0) = f(x)\}$
- $p : E \to B;\ (x, \gamma) \mapsto \gamma(1)$:**ファイブレーション**

$F = p^{-1}(b)$: f **のホモトピーファイバー**

f が基点を保ち F が連結なら完全列がある：

$$\to \pi_i(F) \to \pi_i(X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(Y) \to \pi_{i-1}(F) \to$$

次の完全列と比較 $\Longrightarrow \pi_i(f) \cong \pi_{i-1}(F)$ $(i \geq 1)$

$$\to \pi_{i+1}(f) \to \pi_i(X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(Y) \to \pi_i(f) \to$$

F が $(n-1)$ 連結 $\Longrightarrow f$ は n 連結

3. h コボルディズム定理と s コボルディズム定理

以下では，多様体はすべて向き付け可能とする．

M_0, M_1 : n **次元閉多様体**

M_0 **と** M_1 **の間の** **<u>コボルディズム</u>** $(W; M_0, M_1)$

$= W^{n+1}$ s.t. $\partial W = M_0 \sqcup M_1$

$i_0 : M_0 \xrightarrow{\simeq} W$, $i_1 : M_1 \xrightarrow{\simeq} W$ **のとき**

<u>h コボルディズム</u>

例. $(M \times [0,1]; M \times \{0\}, M \times \{1\})$

自明な h **コボルディズム**

定理 (C^∞/PL h **コボルディズム定理**—Smale)**.** $n \geq 5$ **のとき，**$(n+1)$ **次元の単連結な** h **コボルディズムは自明である．**

定理 (C^∞/PL s **コボルディズム定理**)**.** $n \geq 5$ **，**

$(W^{n+1}; M_0, M_1)$ h **コボルディズム次は同値**

(1) $(W^{n+1}; M_0, M_1)$ **が自明**

(2) **ねじれ** $\tau(W, M_0) = 0 \in Wh(\pi_1(M_0))$

TOP でも成立。

$\tau = 0$ である h コボルディズム $=$ $\underline{s \text{ コボルディズム}}$

s コボルディズム定理＋ $Wh(\{1\}) = 0$

$\Longrightarrow h$ コボルディズム定理

$R = \mathbb{Z}[\pi]$

$GL(n, R) \subset GL(n+1, R)$; $A \mapsto \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$GL(R) = \bigcup_{n \geq 1} GL(n, R)$

E **次のような行列たちの生成する部分群**

- **基本行列** $(I_n + aE^n_{i,j})$ $(i \neq j)$
- **対角成分が** $\pm g$ $(g \in \pi)$ **の形の対角行列**

$\Longrightarrow E > [GL(R), GL(R)]$

$Wh(\pi) = GL(R)/E$: <u>π **の** Whitehead **群**</u>

$Wh(\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}) = 0$ (Bass-Heller-Swan, 1964).

予想：π **がねじれをもたない** $\Longrightarrow Wh(\pi) = 0$

非自明な例：$Wh(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

(C, d) :$R = \mathbb{Z}[\pi]$ **係数の基底付き自由加群の鎖複体**

非輪状 $\Longrightarrow$ **ねじれ** (torsion) $\tau(C) \in Wh(\pi)$

非輪状 $\Longleftrightarrow$ **可縮**

$\Longleftrightarrow \exists$ chain contraction $s : C_i \to C_{i+1}$

$$(ds + sd = 1)$$

$$\bigstar\ dsd = (1 - sd)d = d$$

$$\bigstar\ (sds)^2 = sds(1 - ds)s = sdss - sdsdss = 0$$

$$\bigstar\ (dsd + sds)^2 = (d + sds)(d + sds)$$

$$= dsds + sdsd = 1$$

$dsd + sds$ は，

$$C_{\rm odd} = C_1 \oplus C_3 \oplus \cdots \longrightarrow C_{\rm even} = C_0 \oplus C_2 \oplus \cdots$$

の同型写像であり，$GL(R)$ の元を定める．
この元の像が C のねじれ $\tau(C) \in Wh(\pi)$

$(W; M_0, M_1)$: h **コボルディズム**

$\Longrightarrow M_0$ **上のハンドル分解**

$\Longrightarrow$ **対** $(W; M_0)$ **のセル分割**

$\Longrightarrow$ **普遍被覆の対** $(\widetilde{W}; \widetilde{M_0})$ **のセル分割**

$\Longrightarrow C(\widetilde{W}; \widetilde{M_0})$: **非輪状**

$\Longrightarrow \tau(C) \in Wh(\pi_1(M_0))$

$\Longrightarrow \tau(W, M_0) \in Wh(\pi_1(M_0))$

証明のキー (1) <u>折り畳みの議論</u>

C : 自由加群の鎖複体, $H_j(C) = 0$

$$\cdots \xrightarrow{\ d\ } C_{j+2} \xrightarrow{\ d\ } C_{j+1} \xrightarrow{\ d\ } C_j \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow d : C_{j+1} \to C_j$ は全射

$\Longrightarrow \exists s : C_j \to C_{j+1}$ s.t. $ds = 1 : C_j \to C_j$

証明のキー (1) 折り畳みの議論

$C \simeq C'$:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & C_{j+2} \arrow[r, "d"] & C_{j+1} \arrow[r, "d"] & C_j \arrow[r] & 0 \\
 & \oplus & \oplus & & \\
 & C_j \arrow[r, "1"] & C_j \arrow[uur, "0"] & &
\end{tikzcd}
$$

証明のキー (1) <u>折り畳みの議論</u>

$C' \cong C''$: (simple iso)

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & C_{j+2} \arrow[r, "d"] & C_{j+1} \arrow[r, "0"] & C_j \arrow[r] & 0 \\
& \oplus & \oplus & & \\
& C_j \arrow[uur, "s"] & C_j \arrow[uur, "1"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
C'_{j+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} C''_{j+1},\ C'_j \xrightarrow{-1} C''_j
$$

証明のキー (1) 折り畳みの議論

$C'' \simeq C''' :$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & C_{j+1} \arrow[r, "d"] & C_{j+1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
& \oplus & & & \\
& C_j \arrow[uur, "s"] & & &
\end{tikzcd}
$$

基本行列 $\Longleftrightarrow$ **ハンドル和の操作**

$M \xrightarrow{1} M$ **の和** $\Longleftrightarrow$ **キャンセルハンドル対の導入**

証明のキー (1) <u>折り畳みの議論</u>

$\Longrightarrow$ **隣接する２層からなる鎖複体**

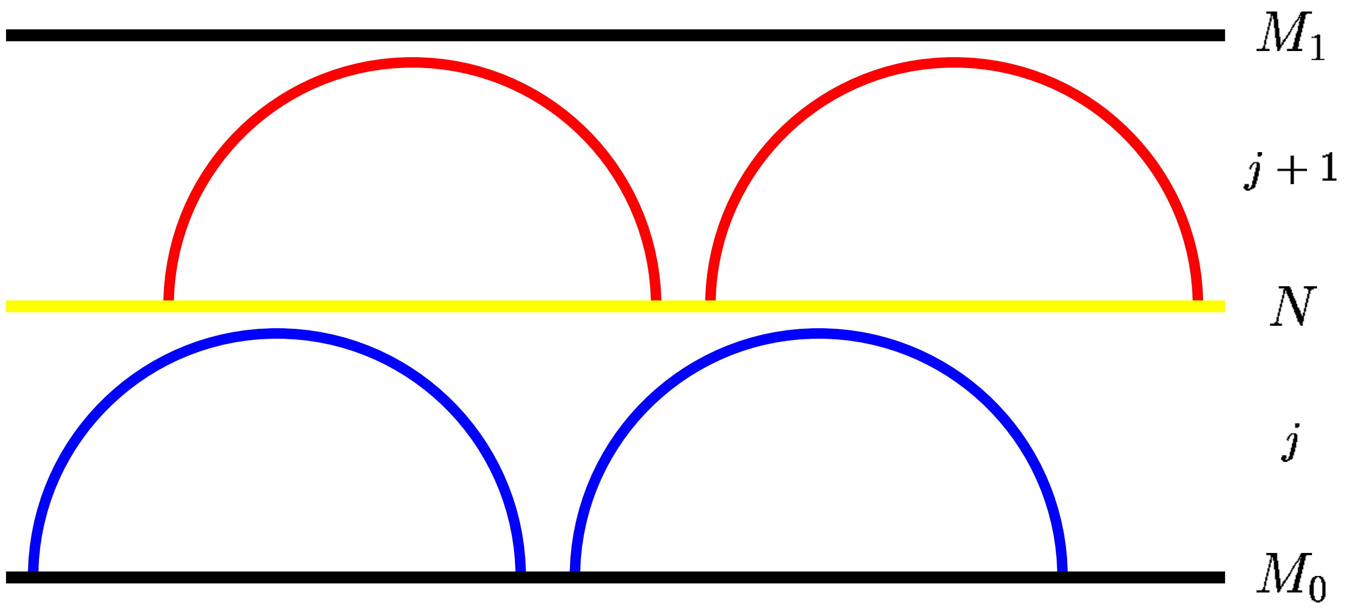
$$0 \longrightarrow C_{j+1} \xrightarrow{\quad d \quad} C_j \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow$ **隣接する２層にからなるハンドル分解**

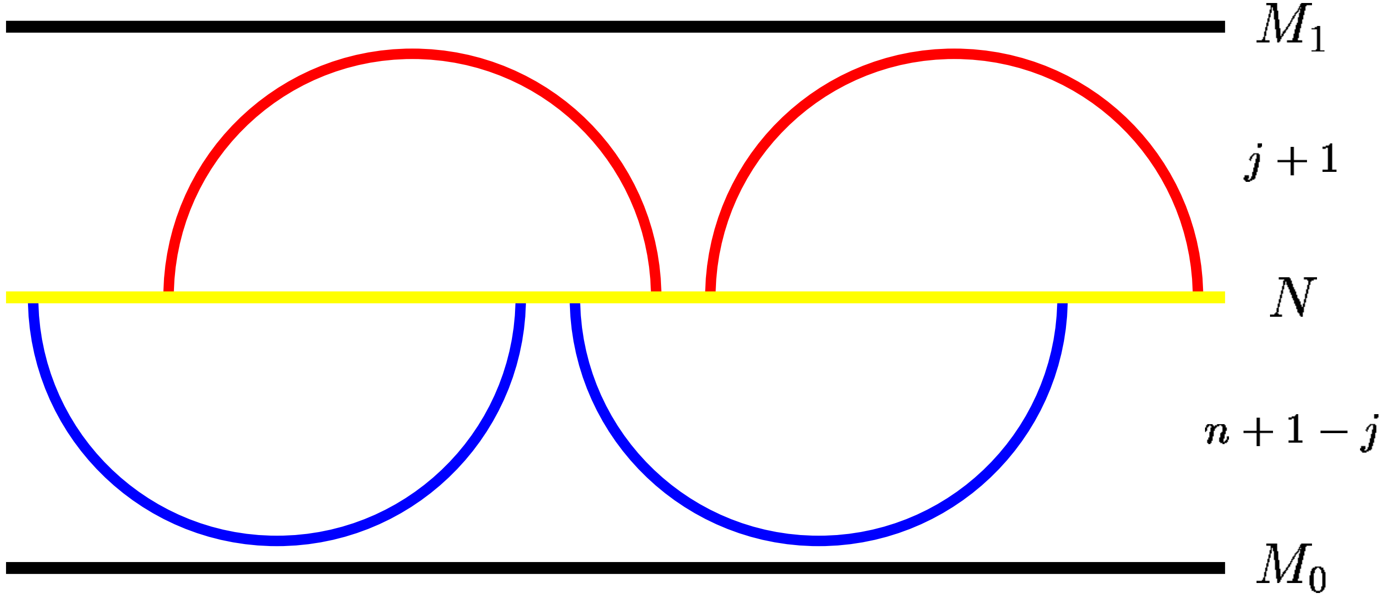
$$W = M_0 \times I \cup (j\ \textbf{ハンドル}) \cup (j+1\ \textbf{ハンドル})$$

$$N = \partial(M_0 \times I \cup (j\ \textbf{ハンドル})) - M_0 \times 0$$

証明のキー (2) ハンドル分解による実現



証明のキー (2) ハンドル分解による実現



$d : C_{j+1} \to C_j$:

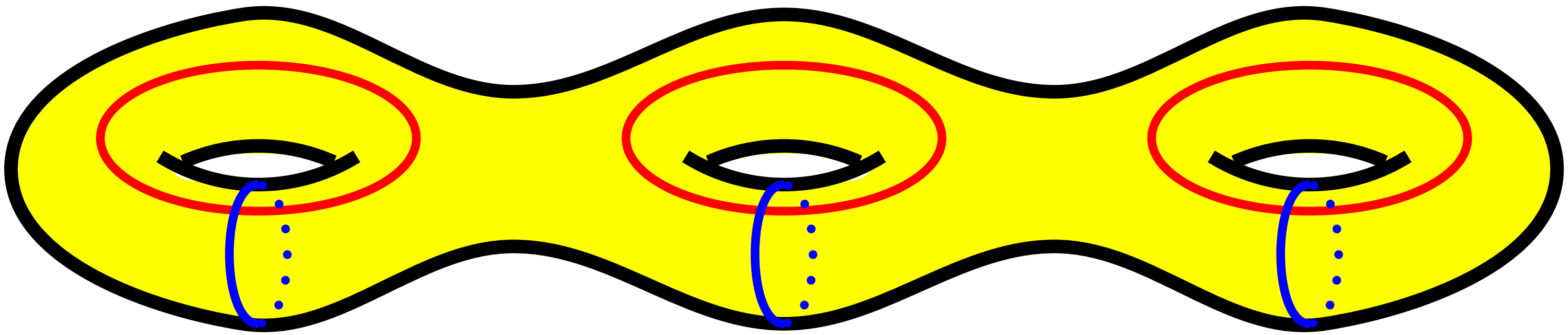
N における貼り付け球面の「交叉数」で記述

証明のキー (2) <u>ハンドル分解による実現</u>

ねじれ $\tau = 0$

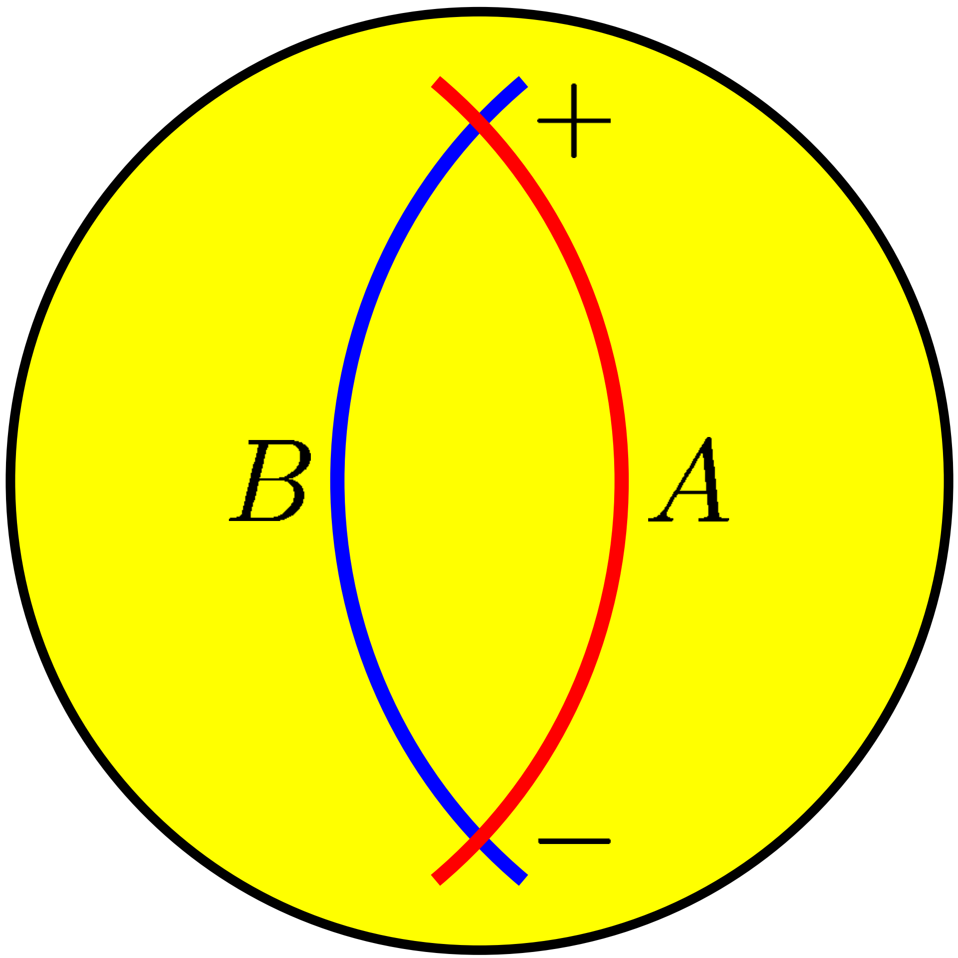
$\Longrightarrow$ 基本変形で d の行列表示は単位行列

$\Longrightarrow$ ホイットニーのトリックによるハンドル操作

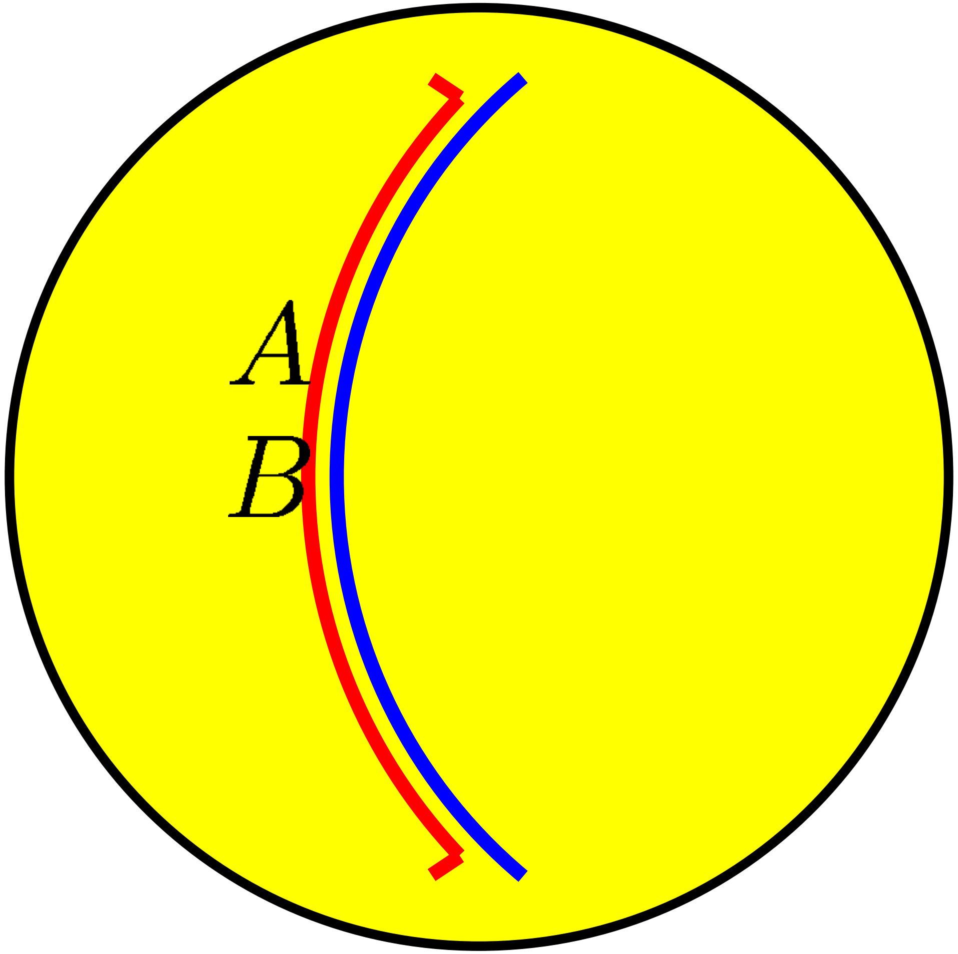


$\Longrightarrow$ ハンドルの消去 $\Longrightarrow W$: 直積

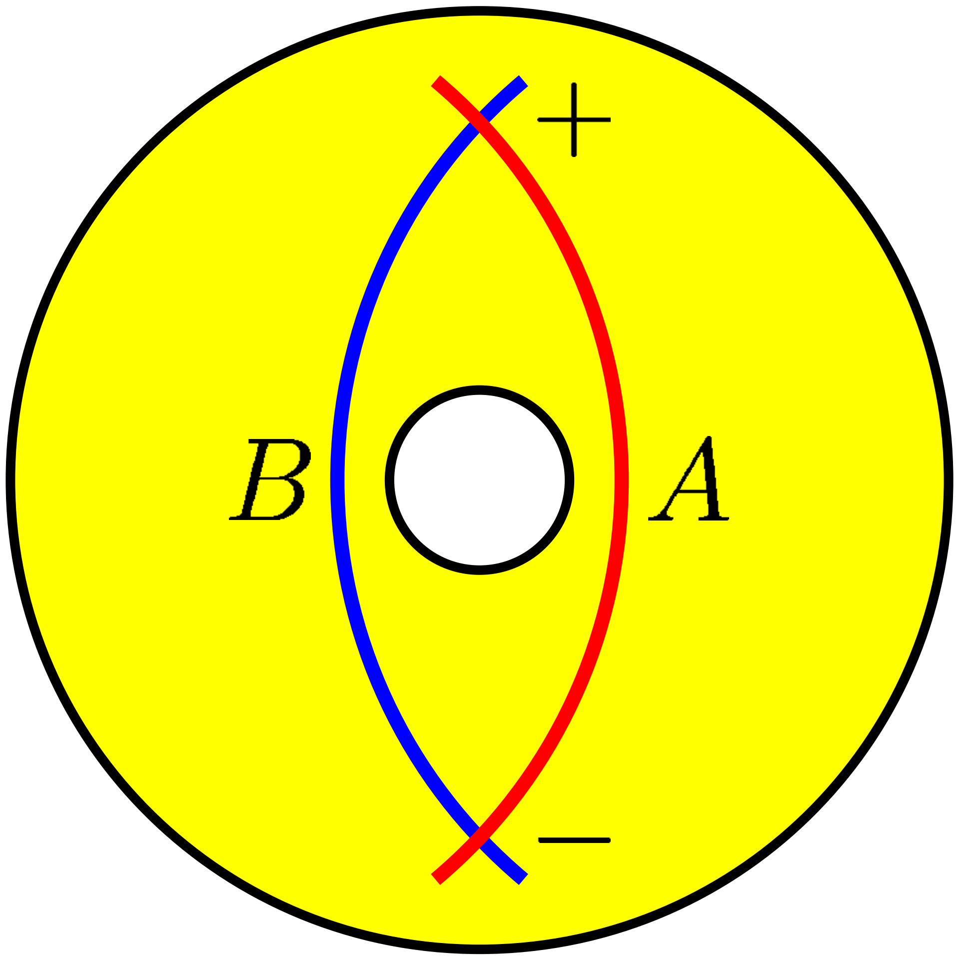
証明のキー (3) Whitney's Trick (交叉の解消)



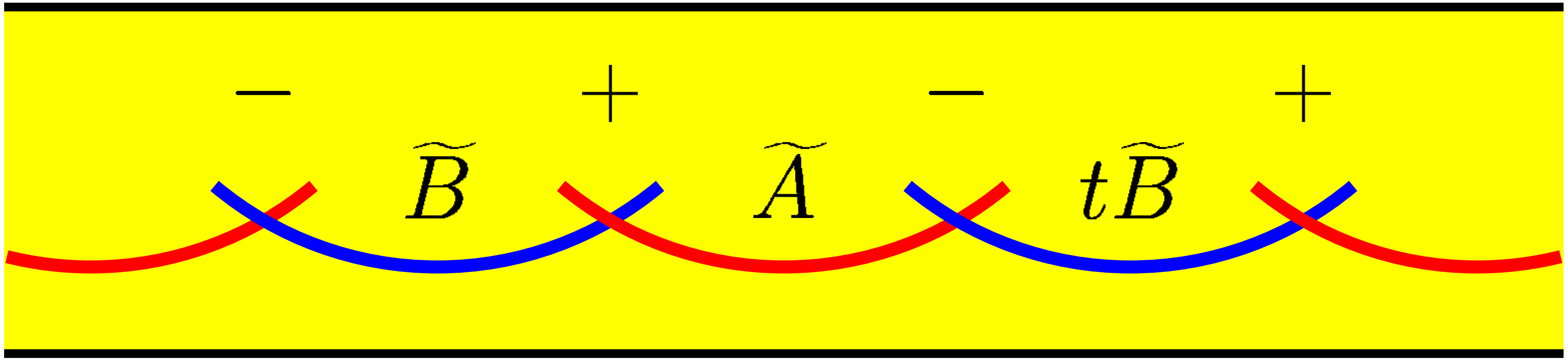
証明のキー (3) Whitney's Trick (交叉の解消)



証明のキー (3) 非単連結 な場合



証明のキー (3) 普遍被覆における交叉



$$\mathrm{int}(A, B) = 1 - t \in \mathbb{Z}[\pi]$$

存在定理

$n \geq 5,\ M_0$: n **次元多様体**, $\tau \in Wh(\pi_1(M_0))$

$\Longrightarrow \exists\ h$ **コボルディズム** $(W; M_0, M_1)$

s.t. $\tau = \tau(W, M_0) \in Wh(\pi_1(M_0))$

Milnor の双対性

$(W; M_0, M_1)$：$(n+1)$ 次元 h コボルディズム

$\Longrightarrow \tau(W, M_1) = (-1)^n \overline{\tau(W, M_0)} \in Wh(\pi)$

※

$\mathbb{Z}[\pi]$ 上の involution ：$\sum n_i g_i \longmapsto \sum n_i g_i^{-1}$

$\Longrightarrow Wh(\pi)$ 上の involution

連続する h コボルディズムの和

$(W_1; M_0, M_1)$, $(W_2; M_1, M_2)$: h コボルディズム

$$\Longrightarrow \tau(W_1 \cup W_2, M_0) = \tau(W_1, M_0) + \tau(W_2, M_1)$$

[弱 h コボルディズム定理]

$n \geq 5$

$(W; M_0, M_1)$: $(n+1)$ **次元の h コボルディズム**

$$\Longrightarrow (W - M_1, M_0) \cong (M_0 \times [0,1), M_0 \times \{0\})$$

証明. $\tau = \tau(W; M_0, M_1)$ **とおき**, h **コボルディズムの列を作る**:

$$\exists (W_1; M_1, M_2) \text{ ねじれ} = -\tau$$

$$\exists (W_2; M_2, M_3) \text{ ねじれ} = \tau$$

$$\exists (W_3; M_3, M_4) \text{ ねじれ} = -\tau$$

$$\exists (W_4; M_4, M_5) \text{ ねじれ} = \tau$$

$$\cdots$$

$$W' = W \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup \cdots$$

$$
\begin{aligned}
W' &= W \cup (W_1 \cup W_2) \cup (W_3 \cup W_4) \cup \cdots \\
&= W \cup M_1 \times [0, \infty) \\
&\cong W - M_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W' &= (W \cup W_1) \cup (W_2 \cup W_3) \cup (W_4 \cup W_5) \cup \cdots \\
&\cong M_0 \times [0, \infty) \\
&\cong M_0 \times [0, 1)
\end{aligned}
$$

$\square$

$(W; M_0, M_1)$：非自明なねじれをもつ PL h コボルディズム

$\Longrightarrow$ $\exists$PL 同型　$U = M_0 \times [0,1) \cong_{\mathrm{PL}} W - M_1$

$\Longrightarrow K = M_0 \times [0,1]/M_0 \times \{1\} \cong_{\mathrm{TOP}} L = W/M_1$

（無限遠点 ∞_K, ∞_L の追加）

K, L は有限多面体　（$c(-)$ は錐）

- $K = M_0 \times I \cup c(M_0)$
- $L = W \cup c(M_1)$

主張：$K \cong_{\mathrm{TOP}} L$ **なのに** $K \not\cong_{\mathrm{PL}} L$

$K \cong_{\mathrm{PL}} L \Longrightarrow \infty_K \mapsto \infty_L$

$\Longrightarrow W \cong_{\mathrm{PL}} M_0 \times I$ **：仮定に反する！**

$\Longrightarrow$ **次の予想の反例**

予想 (Polyhedral Hauptvermutung). **有限多面体間の同相写像** $f : K \to L$ **は** PL **同相写像にホモトピックである．**

多面体の Hauptvermutung **の最初の反例は** Milnor **により与えられた** (1961). **上の構成は** Stallings **による** (1963).

K, L **がともに** PL **多様体であるような反例は** 1960 **年代終わりに，** Kirby-Siebenmann **により与えられた．**

4. 法写像の手術 (1)
中間次元未満

カテゴリー：C^∞

ややテクニカル

$f: M^n \to X$, $f': M'^n \to X$

定義. f **と** f **の間の** **<u>ボルディズム</u>** (W, F) :

- $(W; M, M')$ **コボルディズム**
- $F: W \to X \times I$

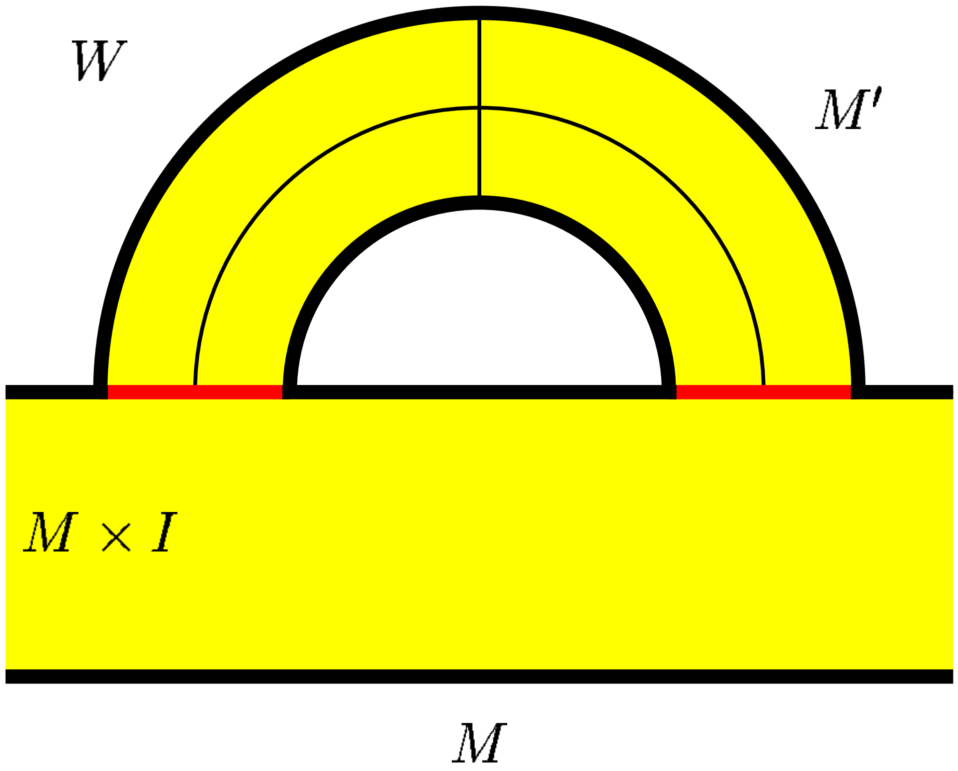
  s.t. $F|M = f \times 0$, $F|M' = f' \times 1$

写像の手術 $\Longrightarrow$ **ボルディズム　？**

$f : M^n \to X$, 埋め込み $\bar{g} : S^{k-1} \times D^{n-k-1}$

$\Longrightarrow$ $\bar{g}$ に沿った M の手術

トレース $W \simeq M \cup D^k$



f が F に拡張

$\iff$ 次の合成写像がヌル・ホモトピック

$$S^{k-1} = S^{k-1}\times 0 \subset S^{k-1}\times D^{n-k-1} \xrightarrow{\bar{g}} M \xrightarrow{\quad f \quad} X$$

そのようなヌル・ホモトピー

$\Longrightarrow \pi_k(f : M \to X)$ の元

$\pi_*(f)$ を消してホモトピー同値にしたい！

$\pi_{k-1}(f)$ の元を表す

$$(g : S^{k-1} \to M, h : D^k \to X)$$

として，

- g が埋め込みであり，かつ
- 埋め込み $\bar{g} : S^{k-1} \times D^{n-k-1}$ に拡張する

ようなものがとれるか？

もっと「データ」が必要！

M:n 次元の向き付け可能な C^∞ 閉多様体（$n \geq 5$）

$+$ 埋め込み $e : M \to \mathbb{R}^N$

$\Longrightarrow$ 法束 $\nu_M : M \to BO(k)$, $k = N - n$

$BO(k) = G_k(\mathbb{R}^\infty)$: k 次元ベクトル束の分類空間

安定化 $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{N+l} \subset \dots$

$BO(k) \subset BO(k+1) \subset \dots$

$\Longrightarrow$ 安定法束 $\nu_M : M \to BO(k) \to BO$

$BO = \bigcup_k BO(k)$

定理. 対 $(BO(k+1), BO(k))$ は k 連結である．したがって，対 $(BO, BO(k))$ も k 連結である．

証明. $BO(k+1)$ 上の普遍束に随伴する S^k 束：

$$E = \{(\vec{e}, V^{k+1}) \mid \vec{e} \in V^{k+1} \in BO(k+1),\ |\vec{e}| = 1\}$$

$$\xrightarrow{\ \ p\ \ } BO(k+1)\ ; \quad (\vec{e}, V^{k+1}) \mapsto V^{k+1}$$

$$\boxed{E \simeq BO(k)}$$

$$\Longrightarrow S^k \longrightarrow BO(k) \longrightarrow BO(k+1)$$

S^k:$(k-1)$ 連結 $\Longrightarrow (BO(k+1), BO(k))$:$k$ 連結 $\square$

$\boxed{E \simeq BO(k)}$ の写像：

$\vec{e}_1$ ： $\mathbb{R}$ の正の向きの単位ベクトル

★ $BO(k) \longrightarrow E$

$$V^k \mapsto (\vec{e}_1, \mathbb{R} \oplus V^k \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^\infty)$$

★ $E \to BO(k)$

$$(\vec{e}, V^{k+1}) \mapsto \vec{e}^{\perp} (\subset V^{k+1})$$

定義.

滑らかな n 次元多様体 M から空間 X への <u>法写像</u> $(f, b) : M \to X$ とは, 写像 $f : M \to X$ と, M の安定法束 ν_M から X 上のあるベクトル束 η への束写像 $b : \nu_M \to \eta$ で f を覆うものの組をいう.

与えられた法写像 $(f : M \to X, b : \nu_M \to \eta)$ に対しては前に述べた「写像の手術」を行うだけではいけない．得られた写像も法写像にするためには，$b \times I$ が，トレース W の法束 ν_W からの安定な束写像 $B : \eta \times I$ に拡張しなければならない．そのような手術を「法写像に対する手術」と呼ぶ．これは次の意味での法同境を与える．

定義. ふたつの法写像 $(f : M \to X, b : \nu_M \to \eta)$, $(f' : M' \to X, b' : \nu_{M'} \to \eta')$ が 法同境 であるとは, f と f' の間のボルディズム $F : W \to X \times I$, $X \times I$ 上のベクトル束 H, および F を覆う安定な束写像 $B : \nu_W \to H$ で両端への制限が b, b' になるものが存在することをいう.

X:有限 CW 複体

$(f : M^n \to X, b : \nu_M \to \eta)$:法写像

$\pi_{k+1}(f)$ の元 $x \iff$ 可換図式 ϕ

$$\phi \qquad \begin{tikzcd} S^k \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & M^n \arrow[r, dotted, "e"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R}^N \\ D^{k+1} \arrow[r, "h"] & X & \end{tikzcd}$$

f の $\underline{k\text{ はめ込み}}\ldots g$ がはめ込みのとき

f の $\underline{k\text{ 埋め込み}}\ldots g$ が埋め込みのとき

k はめ込み $\phi \mapsto \nu_b(\phi) \in \pi_{k+1}(BO, BO(n-k))$

★ $g^*\nu_M$ は自明：

$$g^*\nu_M \cong g^*f^*\eta = i^*h^*\eta \cong \varepsilon^l \text{ (自明束)}.$$

★ 埋め込み g の法束 ν_g は安定的に自明:

$$\nu_g \oplus \varepsilon^l \cong \nu_g \oplus g^*\nu_M \cong \nu_{eg} \cong \nu_{S^k} \cong \varepsilon^{N-k} \quad .$$

（S^k が $\mathbb{R}^N$ において unknotted）

つまり $\nu_g : S^k \to BO(n-k)$ **を** $BO(n-k) \to BO$ **と合成したものはヌル・ホモトピック**

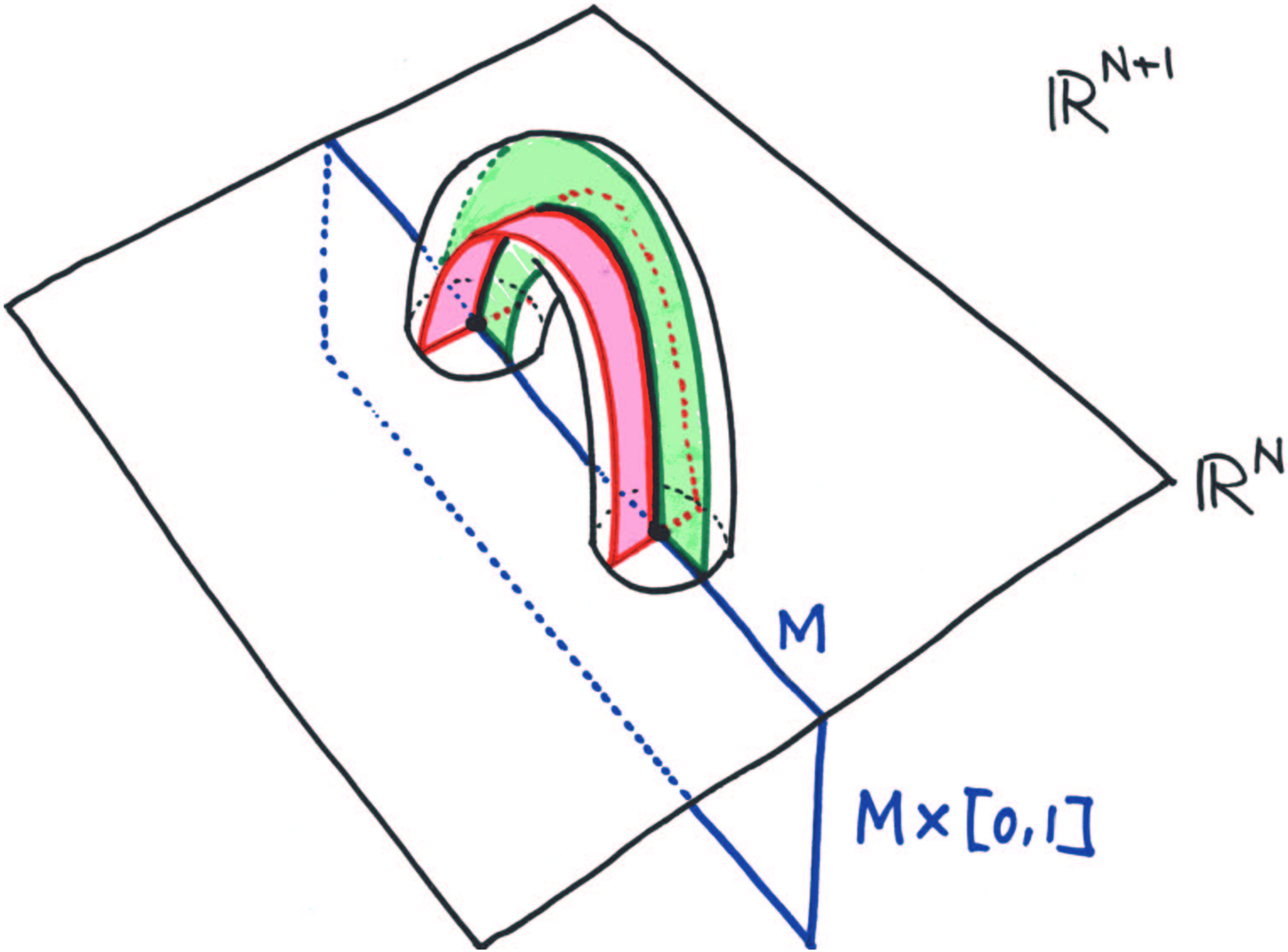
$\Longrightarrow \delta\nu : D^{k+1} \to BO$ **に拡張：**

$$\begin{tikzcd} S^k \arrow[r, "\nu_g"] \arrow[d, hook, "i"'] & BO(n-k) \arrow[d, hook] \\ D^{k+1} \arrow[r, "\delta\nu"] & BO \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \nu_b(\phi) = [\delta\nu, \nu_g] \in \pi_{k+1}(BO, BO(n-k))$$

命題. $x \in \pi_{k+1}(f)$ を (f, b) の手術で消すことができるためには，x が $\nu_b(\phi) = 0$ であるような k 埋め込み ϕ で表せることが必要十分である．

証明. 法写像に対する手術が実行できたとしてみる．$M \times [0,1] \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+1}$ とし，$(k+1)$ ハンドル $H = D^{k+1} \times D^{n-k}$ が $M \times 1$ で上から貼り付けられている状況で，それぞれの法束を考える．



$$\nu_g \oplus \varepsilon^l \cong \nu_g \oplus g^* \nu_M \cong \nu_{eg} \cong \nu_{S^k} \cong \varepsilon^{N-k} \ .$$

ν_g は，S^k と $g(S^k)$（図中の２点）を同一視すると，緑の帯の $M = M \times 1$ の部分に該当する．それを $BO(n-k) \to BO$ と合成したものは，N が十分大なので，ν_{eg}（S^k のまわりの無色の円）と思ってよい．$\delta\nu$ は埋め込まれた $D^{k+1} = D^{k+1} \times 0$ の $\mathbb{R}^{N+1}$ における法束（無色のチューブ）であり，自明である．この自明な束は，さらに，ν_W を D^{k+1} に制限した自明な束（図のピンクの帯）と H における D^{k+1} の自明な法束（図の緑の帯）の直和になって

いる．ホモトピー $\{(1-t) : D^{k+1} \longrightarrow D^{k+1}\}$ による $\delta\nu$ の引き戻しは，$\nu_b(\phi)$ のヌル・ホモトピーを与えている．

逆に，$\nu_b(\phi) = 0$ であるような k 埋め込み ϕ がとれたとする．まず，ハンドルの心棒 D^{k+1} だけを $M = M \times 1$ にはりつけておく．$\delta\nu$ は D^{k+1} の法束であり，$[\delta, \nu_g] = 0$ ということは，ν_g がこの法束の部分束として D^{k+1} 全体に拡張することを意味する．この拡張は D^{k+1} の厚み付け $H = D^{k+1} \times D^{n-k}$ を与え，h により f は D^k 上に拡張し，さらにハンドル全体に拡張する：

$$
\begin{tikzcd}
S^k \times D^{n-k} \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, hook] & M^n \arrow[d, "f"] \\
D^{k+1} \times D^{n-k} \arrow[r, "\bar{h}"] & X
\end{tikzcd}
$$

これにより，f は $F : W = M \times I \cup H \to X \times I$ に拡張する．$\delta\nu$ は η による $g^*\nu_M$ の自明化を元に定義したものだから，当然，b は D^{k+1} 上に拡張し，これを全体に拡張するのは容易である． $\square$

系 (中間次元より下の手術 (1)). X は有限 CW 複体とする．$(f : M^n \to X, b : \nu_M \to \eta)$ は法写像で，$2k+1 \leq n$ とする．このとき，任意の元 $x \in \pi_{k+1}(f)$ を (f, b) の手術で消すことができる．

証明. $k+k<n$ であるから，$g : S^k \to M$ は埋め込みとしてよい．また，$k+1 \leq n-k$ であるから，$\pi_{k+1}(BO, BO(n-k)) = 0$ となり障害はない． $\square$

命題.

$C: 0 \to C_m \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$

　　　　有限生成射影的 R 加群の鎖複体

$H_i(C) = 0 \ (i < n)$

$\implies H_n(C)$ は有限生成 R 加群

証明. $\exists s : C_i \to C_{i+1}$ R 加群準同型写像 s.t.

$$ds + sd = 1 : C_i \to C_i \qquad (i < n)$$

$Z_n = \mathrm{Ker}(d : C_n \to C_{n-1})$

とおくと，非輪状な鎖複体を得る:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, hook] & C_n \arrow[r, "d"] \arrow[l, dotted, bend left, "1-sd"] & C_{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[l, dotted, bend left, "s"] & \cdots \arrow[l, dotted, bend left, "s"]
\end{tikzcd}
$$

$\Longrightarrow$

$$Z_n \oplus C_{n-1} \oplus C_{n-3} \oplus \ldots \cong C_n \oplus C_{n-2} \oplus C_{n-4} \oplus \ldots$$

$\Longrightarrow$ K **は有限生成加群の射影像** $\Longrightarrow$ **有限生成**

$\Longrightarrow$ $H_n(C)$ **も有限生成** $\square$

定理 (中間次元より下の手術 (2)). X **は連結な有限** CW **複体とする．任意の法写像** $(f,b): M^n \to X$ **は** $[\frac{n}{2}]$ **連結な写像に法同境である．**

証明. すでに f は k 連結であると仮定すると，$\pi_{k+1}(f) = K_k(M)$ が $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ 加群として有限生成であり，$k+1 \leq [\frac{n}{2}]$ ならば，有限回の手術で消すことができる． $\square$

5. 法写像の手術 (2)
中間次元

次のステップは「中間次元の手術」であるが，ここから先は X において Poincaré 双対性が成り立つ必要がある。話を簡単にするために，以下では X も向きづけ可能な n 次元閉多様体とする．

1 **を持つ環** R **の対合**:

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b},\ \overline{ab} = \overline{b} \cdot \overline{a},\ \overline{\overline{a}} = a,\ \overline{1} = 1$$

例．群環 $R = \mathbb{Z}[\pi]$, $\sum_{g\in\pi} m_g g \mapsto \sum_{g\in\pi} m_g g^{-1}$

左 R **加群** K **の双対** $K^* = \mathrm{Hom}_R(K, R)$ **の左** R **加群構造**: $(af)(x) = f(x) \cdot \bar{a}$

Poincaré Duality

$\widetilde{X} \to X^n$: 群 π を被覆変換群とする正則被覆空間

$R = \mathbb{Z}[\pi]$

$C_i(\widetilde{X})$: $\mathbb{Z}$ 係数の有限 i チェイン全体の作る加群

$\Longrightarrow C(\widetilde{X})$ は自由左 R 加群の鎖複体

$C^i(\widetilde{X}) = \mathrm{Hom}_R(C_i(\widetilde{X}), R)$

$\Longrightarrow$ 左 R 加群鎖複体 $C^{n-*}(\widetilde{X})$

$$\boxed{\exists \xi \in C(X) \text{ s.t. } \tilde{\xi} \cap : C^{n-*}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\simeq} C(\widetilde{X})}$$

$\tilde{\xi}$ は局所有限になっている．

ξ の表すホモロジー類を $[X] \in H_n(X)$ と書く．

$f : M^n \to X^n$ が <u>次数 1</u>$\Longleftrightarrow f_*[M] = [X]$

定義. $f : M \to X$

$$K_*(M) = H_{*+1}(\tilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{X})$$ **ホモロジー核**

$$K^*(M) = H^{*+1}(\tilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{X})$$ **コホモロジー核**

命題. $(f, b) : M^n \to X$ **：次数 1 の法写像** $\Longrightarrow$

$$H_i(\widetilde{M}) = K_i(M) \oplus H_i(\widetilde{X})$$

$$H^j(\widetilde{M}) = K^j(M) \oplus H^j(\widetilde{X})$$

$$[M]\cap : K^{n-i}(M) \xrightarrow{\cong} K_i(M)$$

主張：

次数 1 **の法写像** $(f, b) : M^n \to X$ **を手術でホモトピー同値にできるための障害類は** Wall **の** $L_n(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ **群に定まる**.

$\underline{n = 2m \geq 6 \text{ の場合}}$

次数 1 の法写像 $(f : M^{2m} \to X, b)$

$\Longrightarrow$ 手術で m 連結にする

$\underline{\text{もし } (m+1) \text{ 連結なら}}$ $K_j(M) = 0 \ (j \leq m)$

$\Longrightarrow K^j(M) = 0 \ (j = 0, \ldots, m)$ (普遍係数定理)

$\Longrightarrow K_j(M) \cong K^{2m-j}(M) = 0 \ (j \geq m+1)$

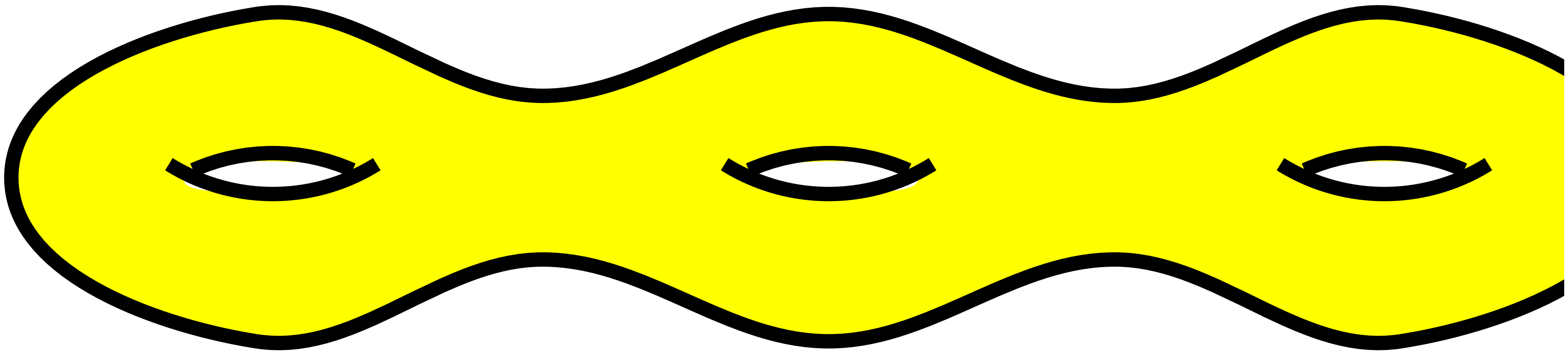
$\Longrightarrow$ ホモトピー同値写像

$\underline{n = 2m+1 \geq 5 \text{ の場合}}$ も同様

$(m+1)$ 連結にするための障害を調べる

$n = 2m$ の場合

手術可能なもの：自明な $S^{m-1} \times D^{m+1}$ での手術の繰り返しで得られる部分



$$S^m \times S^m \# S^m \times S^m \# S^m \times S^m \# \dots$$

$n = 2m$ の場合の手術障害類群 $L_{2m}(R)$ の定義:

定義. K は左 R 加群，$\varepsilon = \pm 1$ とする．
写像 $\lambda : K \times K \to R$ が R 上の <u>ε 対称形式</u>:

- $\lambda(x + x', y) = \lambda(x, y) + \lambda(x', y)$,
  $\lambda(x, y + y') = \lambda(x, y) + \lambda(x, y')$
- $\lambda(ax, by) = b\lambda(x, y)\bar{a}$
- $\lambda(y, x) = \varepsilon\overline{\lambda(x, y)}$

ε 対称形式 $\lambda \Longleftrightarrow$

随伴する R 加群準同型写像 $\lambda : K \to K^*$

λ が $\underline{\text{非退化}}$ $\Longleftrightarrow \lambda : K \to K^*$ が同型

M^{2m} :**向きづけられた閉多様体**, $\varepsilon = (-1)^m$

$\widetilde{M}$: **被覆変換群が** π **の正則被覆**

$\Longrightarrow$ **非退化** $(-1)^m$ **対称形式**

$$\lambda : H^m(\widetilde{M}) \times H^m(\widetilde{M}) \to \mathbb{Z}[\pi]; (x, y) \mapsto x([M] \cap y)$$

同一視 $H^m(\widetilde{M}) \cong H_m(\widetilde{M})$

$\Longrightarrow$ M **の (**π **被覆)**<u>**交叉形式**</u>

$$\lambda : H_m(\widetilde{M}) \times H_m(\widetilde{M}) \to \mathbb{Z}[\pi]; (x, y) \mapsto x^*(y)$$

※ x^* **は** x **のポアンカレ双対（**$[M] \cap x^* = x$**）**

定義. $\varepsilon = \pm 1$ とする.

R 上の非退化 ε ２次形式 (K, λ, μ):

- 左 R 加群 K
- K 上の非退化 ε 対称形式 $\lambda : K \times K \to R$
- ２次関数 $\mu : K \to Q_\varepsilon(R) = R/\{b - \varepsilon\bar{b} | b \in R\}$
  - $\mu(x+y) - \mu(x) - \mu(y) = \lambda(x, y) \in Q_\varepsilon(R)$,
  - $\lambda(x, x) = \mu(x) + \varepsilon\overline{\mu(x)}$

    $$\in Q^\varepsilon(R) = \{a \in R | \varepsilon\bar{a} = a\}$$
  - $\mu(ax) = a\mu(x)\bar{a} \in Q_\varepsilon(R)$

$(f,b): M^{2m} \to X^{2m}$ を m 連結な次数 1 の法写像

$\lambda: H_m(\widetilde{M}) \times H_m(\widetilde{M}) \to \mathbb{Z}[\pi]$ の制限

$\Longrightarrow \lambda: K_m(M) \times K_m(M) \to \mathbb{Z}[\pi]$

$x \in K_m(M) \Longleftrightarrow f$ の m はめ込み $\phi = (g,h)$

ν_g:安定的に自明, τ_{S^m}:安定的に自明

$\Longrightarrow g^*\tau_M = \tau_{S^m} \oplus \nu_g$:安定的に自明

$\Longrightarrow \tau_{S^m \times D^m} \dashrightarrow \tau_M$:安定的な束単射

$\Longrightarrow$ はめ込み $\bar{g}': S^m \times D^m \to M$, $g' \simeq g$

(Hirsch-Smale のはめ込み分類定理)

このとき、$\nu_b(\phi') = 0$

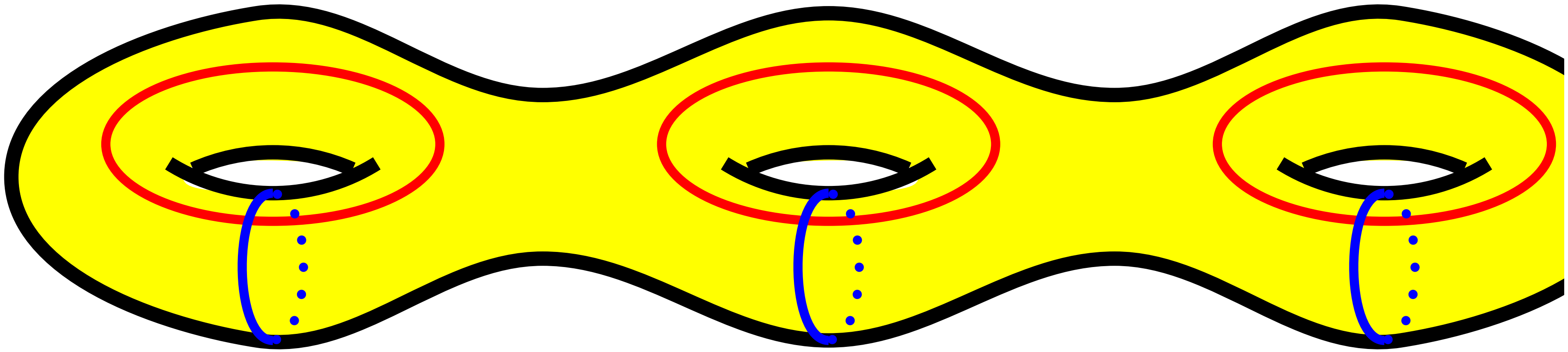
この g' に対して $\widetilde{M}$ に持ち上げた自己交叉の「和」として，$\mu(x)$ を定める．

これにより定まる非退化 $(-1)^m$ ２次形式 $(K_m(M), \lambda, \mu)$ を (f, b) の <u>核形式</u> と呼ぶ．

※ $K_m(X)$ は一般には有限生成射影加群だが、安定的に自由で、自明な手術を行って自由としてよい。

$L \Longrightarrow$ <u>**双曲形式**</u>$H_\varepsilon(L) = (L \oplus L^*, \lambda, \mu)$

- $\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} : L \oplus L^* \to (L \oplus L^*)^* = L^* \oplus L$
- $\mu(x) = f(x)$



(K, λ, μ), (K', λ', μ') **が <u>同境</u>**

$\Longleftrightarrow \exists$ **有限生成自由左** R **加群** L, L' s.t.

$$(K, \lambda, \mu) \oplus H_\varepsilon(L) \cong (K', \lambda', \mu') \oplus H_\varepsilon(L')$$

$L_{2m}(R) = \{$ 非退化 $(-1)^m$ 2 次形式 $\}/$同境

定義. ε **２次形式** (K, λ, μ) **の** lagrangian L **とは，** K **の直和因子で次の２条件を満たすもののことをいう：**

- $\mu(L) = \{0\}$,
- $L = L^{\perp} := \{y \in K | \lambda(x, y) = 0 \quad \forall x \in L\}$.

双曲形式 $H_\varepsilon(L)$ **においては** L **は** lagrangian **であるが、逆に次が成り立つ：**

定理. **非退化** ε **２次形式** (K, λ, μ) **が** lagrangian L **を持てば双曲形式** $H_\varepsilon(L)$ **と同型である.**

m **連結な次数** 1 **の法写像** $(f, b) : M^{2m} \to X^{2m}$ **の核形式** $(K_m(M), \lambda, \mu)$ **が** $L_{2m}(\mathbb{Z}[\pi])$ **で** 0 **ならば、**lagrangian **をもち、**L **に対応する手術によりホモトピー同値写像にすることができる.**

$\pi = \{1\}$ のとき $(R = \mathbb{Z}[\pi] = \mathbb{Z})$

$L_{4k}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$; $[K, \lambda, \mu] \mapsto \sigma(\lambda)/8$

$\sigma(\lambda)$: λ の符号数

$L_{4k+2}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $[K, \lambda, \mu] \mapsto \mathrm{Arf}(K, \lambda, \mu)$

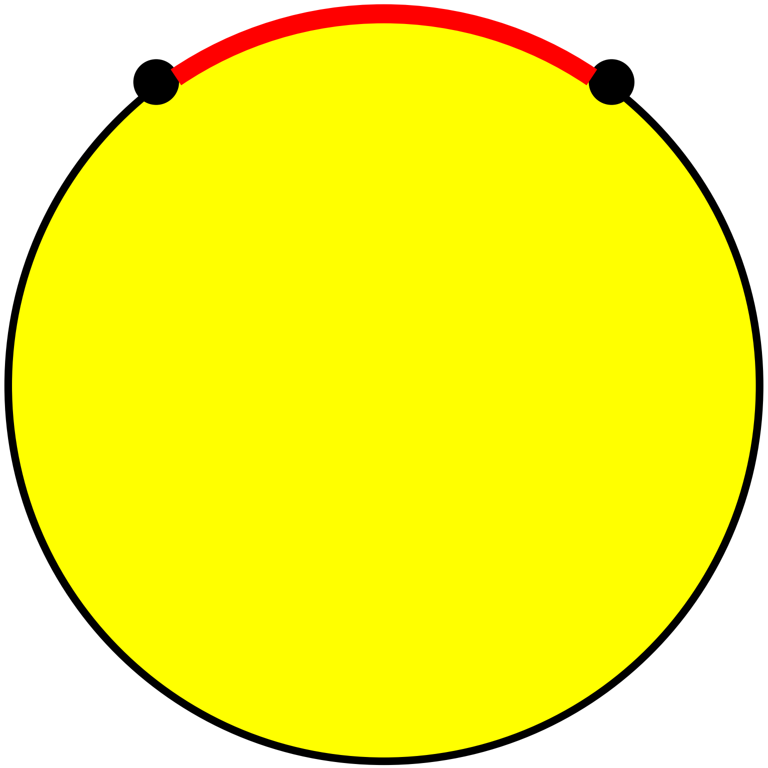
$\mathrm{Arf}(K, \lambda, \mu) = \sum_i^l \mu(x_i)\mu(y_i)$: Arf 不変量

x_1, y_1, . . . , x_l, y_l : K の symplectic basis

$n = 4k$ のときの障害類 $= (\sigma(M) - \sigma(X))/8$

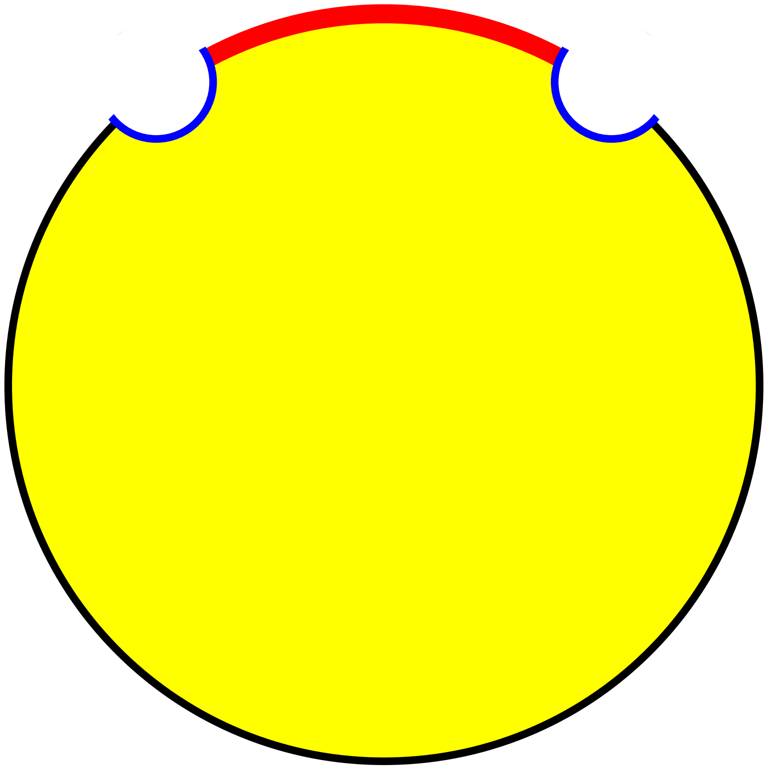
結び目 $k \subset S^3$

M : k **のザイフェルト膜**



結び目 $k \subset S^3$

M : k のザイフェルト膜 $\Longrightarrow$ 法写像



$K = K_1(M) = H_1(M)$ とおくと，交叉数により非退化な歪対称形式 $\lambda : K \times K \to \mathbb{Z}$ が定まり，mod 2 自己絡み数により λ に付随する２次関数 $\mu : K \to Q_{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が定まる．こうして得られる非退化 (-1) ２次形式 (K, λ, μ) の Arf 不変量 $(\in L_2(\mathbb{Z}))$ が結び目 k の Arf 不変量である．

K にはザイフェルト形式とよばれる半双線形形式 $\psi_0 : K \times K \to \mathbb{Z}$ が $\psi_0([c],[d]) = lk(c^+, d)$ によって定まる．ただし，c^+ はサイクル c を S の表側に押し出したもの。このとき，次の等式が成り立つ

$$\lambda(x,y) = \psi_0(x,y) - \psi_0(y,x) \in \mathbb{Z},$$
$$\mu(x) = \psi_0(x,x) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

つまり (K,λ,μ) は (K,ψ_0) によって完全に記述される．

一般の R 上の非特異 ε 2次形式 (K, λ, μ)

$\Longleftrightarrow$ **半双線形形式** $\psi_0 : K \times K \to R$ s.t.

$$\lambda(x, y) = \psi_0(x, y) + \varepsilon\,\overline{\psi_0(y, x)} \in Q^{\varepsilon}(R),$$
$$\mu(x) = \psi_0(x, x) \in Q_{\varepsilon}(R)$$

$\underline{n = 2m+1 \text{ の場合}}$ $\quad \varepsilon = (-1)^m$

定義. $\underline{\varepsilon\ \textbf{2次形成}}$ $(K, \lambda, \mu; F, G)$ **とは非退化** ε **2次形式** (K, λ, μ) **とその** lagrangian F, G **の順序対の組をいう.**

注意. **任意の** ε **2次形成は** $(H_\varepsilon(F); F, \alpha(F))$ **の形のものと同型である. ただし** $\alpha : H_\varepsilon(F) \to H_\varepsilon(F)$ **は自己同型写像. 特に** $G = F^*$ **の場合、**<u>**自明**</u> **であるという.**

m 連結な次数 1 の法写像 $(f,b): M^{2m+1} \to X$ に対して、$K_m(M)$ の生成元 x_1, ..., x_l を選ぶ。各生成元 x_i を互いに交わらない埋め込みで表す：

$$\begin{array}{ccc} S^m \times D^{m+1} & \xrightarrow{g_i} & M^{2m+1} \\ \downarrow & & \downarrow f \\ D^{m+1} \times D^{m+1} & \xrightarrow{h_i} & X^{2m+1} \end{array}$$

★この手術を実際に行うと新しい核の元が出現するおそれがあることに注意。

(f,b) の定める核形成 $(K,\lambda,\mu;F,G)$ の構成

$U=\natural_i g_i(S^m\times D^{m+1})$; M の中での境界連結和

$V=\overline{M-U}$

$\Longrightarrow$ **ヘガード分解**

$$M=U\cup_N V \qquad (N=\partial U=\partial V)$$

$$f\simeq (f_U:U\to D^n)\cup(f_V:V\to\overline{X-D^n})$$

$\Longrightarrow$ ε **２次形式** $(K=K_m(N),\lambda,\mu)$

※ 被覆は X の普遍被覆から誘導されるもの

(f, b) の定める核形成 $(K, \lambda, \mu; F, G)$ の構成（続き）

$(K_m(N), \lambda, \mu)$ は U, V の両方で 0 に同境

$\Longrightarrow$ ふたつの lagrangian （$\Rightarrow$ 次ページ）

$$F = \mathrm{im}(K_{m+1}(U, N) \xrightarrow{\partial} K_m(N)) = K_{m+1}(U, N)$$

$$G = \mathrm{im}(K_{m+1}(V, N) \xrightarrow{\partial} K_m(N)) = K_{m+1}(V, N)$$

$\Longrightarrow$ $(K_m(N), \lambda, \mu) = H_\varepsilon(F)$,

<u>(f, b) の核形成</u>: $(H_\varepsilon(F); F, G)$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & F \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, "\partial"] & & K_m(V) \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & 0 \\
& K_{m+1}(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_m(N) \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_m(M) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[rr, bend right] \arrow[ur] & & G \arrow[rr, bend right] \arrow[ur, "\partial"'] & & K_m(U) \arrow[rr, bend right] \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}
$$

$$F = K_{m+1}(M, V) = K_{m+1}(U, N)$$

$$G = K_{m+1}(M, U) = K_{m+1}(V, N)$$

注意１

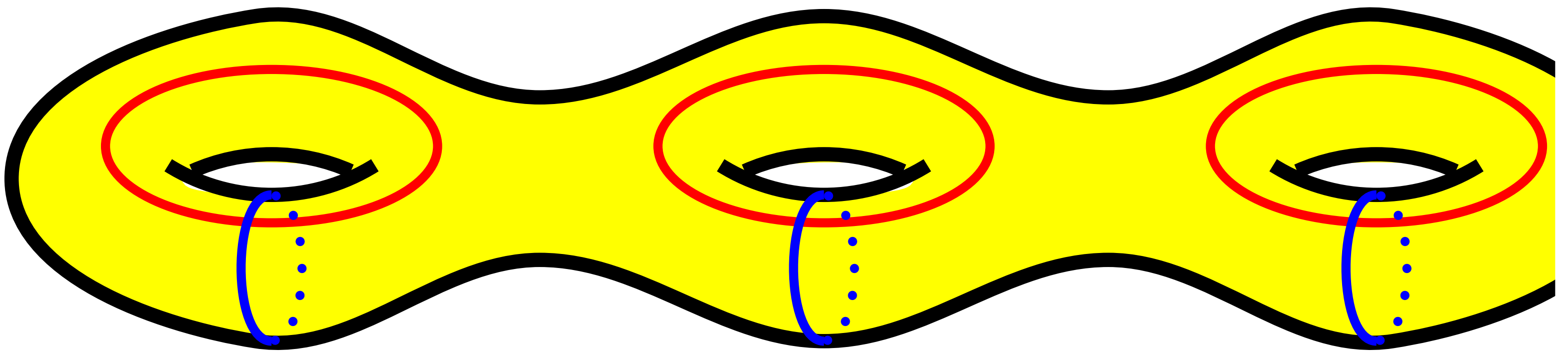
$(K_m(N), \lambda, \mu; F, G)$ が自明

$\Longleftrightarrow K_m(N) = F \oplus G$

$\Longleftrightarrow K_m(M) = K_m(N)/(F+G) = 0,$

$\quad K_{m+1}(M) = F \cap G = 0$

$\Longleftrightarrow f$ がホモトピー同値



注意２　核形成 $(H_\varepsilon(F); F, G)$ の別表示

$$F = \mathrm{im}(K_{m+1}(U,N) \xrightarrow{\partial} K_m(N)) = K_{m+1}(U,N)$$

$$G = \mathrm{im}(K_{m+1}(V,N) \xrightarrow{\partial} K_m(N)) = K_{m+1}(V,N)$$

M **に** $g_i(S^m \times D^{m+1})$ **たちで法手術を実行**

$\Longrightarrow (m+1)$ **連結な法同境**：

$$(e,a) : (W; M, M') \to X \times (I; 0, 1) \text{ 法同境}$$

$\Longrightarrow$ **別表示：**

$$(H_\varepsilon(K_{m+1}(W,M')); K_{m+1}(W,M'), K_{m+1}(W))$$

$f' : M' \to X$ がホモトピー同値とすると……

$$\Longrightarrow K_*(M') = 0$$

$$\Longrightarrow K_{m+1}(W) = K_{m+1}(W, M')$$

$\Longrightarrow$ 核形成は次ページの意味で

$(K_{m+1}(W), \lambda_W, \mu_W)$ の <u>境界</u> である

必ずしも非退化とは限らない ε ２次形式 (K, λ, μ) に対して，ε ２次形成

$$\partial(K, \lambda, \mu) = (H_\varepsilon(K); K, \Gamma_{(K,\lambda)})$$
$$\Gamma_{(K,\lambda)} = \{(x, \lambda(x))) \in K \oplus K^* | x \in K\}$$

をその <u>境界</u> という．

ε **２次形成** $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ **が** <u>**同境**</u>

$\Longleftrightarrow \exists\ B$, B' (**境界**), $\exists\ T$, T' (**自明**) s.t.

$$\mathcal{F} \oplus B \oplus T \cong \mathcal{F}' \oplus B' \oplus T' \ .$$

$L_{2m+1}(R)$

$= \{(-1)^m$ **２次形成** $(K, \lambda, \mu; F, G)\}$/**同境**

R **と** m **の偶奇のみによるアーベル群**

★ $L_{2m+1}(\mathbb{Z}) = 0$

6．手術の完全列

$G(n)$: S^{n-1} **のホモトピー同値写像の全体**

$BG(n)$: S^{n-1} **ファイブレーションの分類空間**

$S^n \subset S^{n+1} \Longrightarrow BG(n) \to BG(n+1)$

$BG = \lim BG(n)$

: **安定球面ファイブレーションの分類空間**

$BO(n) \to BG(n), \qquad BO \to BG$

G/O **ホモトピー・ファイバー**

$$G/O \longrightarrow BO \longrightarrow BG$$

X：向きづけられた C^∞ 閉多様体 $\Rightarrow$ 法構造集合

$$\mathcal{N}(X) = \{(f : M \to X, b : \nu_M \to \eta)$$
$$\mid \text{次数 1 法写像}, (*)\}/\text{法同境}$$

条件 $(*)$：次のふたつはホモトピック

$$X \xrightarrow{\eta} BO \to BG$$

$$X \xrightarrow{\nu_X} BO \to BG$$

$$[(1_X, 1_{\nu_X})] \in \mathcal{N}(X)$$

$\mathcal{S}(X)$: X の構造集合

$\mathcal{S}(X) = \{f : M^n \xrightarrow{\simeq} X \mid \text{ホモトピー同値}\}/\sim$

$f : M \to X \sim f' : M' \to X$

$\Longleftrightarrow$

$\exists(F; f, f') : (W; M, M') \to X \times (I; \{0\}, \{1\})$

s.t. $(W; M, M')$ が h 同境

定理. (Browder, Novikov, Sullivan, Wall) $n \geq 5$ とする．X は滑らかな n 次元閉多様体とし, $\pi = \pi_1(X)$ とおく．このとき次の「完全列」がある：

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathcal{N}(X \times I, \partial) \to L_{n+1}(\mathbb{Z}[\pi]) \\ \to \mathcal{S}(X) \to \mathcal{N}(X) \to L_n(\mathbb{Z}[\pi]) \ . \end{aligned}$$

$\mathcal{N}(X) \longleftrightarrow [X, G/O]$ (ホモトピー類全体の集合)

$\mathcal{N}(X \times I^i, \partial) \longleftrightarrow [X \times I^i, \partial; G/O, *]$

注意. (1) 一番右端の写像は法写像に対しその手術障害類を対応させる写像であり，その左はホモトピー同値写像に対しその定める法写像を対応させる写像である.

(2) 前節までで，滑らかな閉多様体に関する手術の理論を述べてきたが，境界のある多様体の場合でも，与えられた法写像が境界ではすでにホモトピー同値写像になっているという設定の元に，$L_*(\mathbb{Z}\pi)$ に手術のための障害類が定まることがわかる．$\mathcal{S}(X)$ より左はそのようにして得られる．

(3) **上はあくまでも「集合」の完全列であり，「群」の完全列ではない．**

特に、$L_{n+1}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathcal{S}(X)$ **は写像というより、**$L_{n+1}(\mathbb{Z}\pi)$ **の** $\mathcal{S}(X)$ **への作用である。与えられたホモトピー同値写像** $f : M \to X$ **から出発して** Wall realization **を用いて与えられた元を障害類を持つようにして作った法同境の上端を対応させる写像である．**

(4) $X = S^n$ $(n \geq 5)$ **のとき，この列は次のようになる．**

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(G/O) \longrightarrow L_{n+1}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \Theta_n& \\
\longrightarrow \pi_n(G/O) \longrightarrow L_n(\mathbb{Z})&
\end{aligned}
$$

Θ_n **は** Kervaire-Milnor **のホモトピー球面の群．**

$\Theta_7 \cong \mathbb{Z}_{28}$

(5) $X = T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1\ (n \geq 5)$

$$\mathcal{N}(T^n) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi_{n-k}(G/O)$$

$$L_j(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^n]) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_{j-k}(\mathbb{Z})$$

$$\mathcal{S}(T^n) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{S}_{n-k}$$

ただし $\mathcal{S}_n$ は次の可換群の完全列に適合する群であり、 $\mathcal{S}_n \cong \mathcal{S}(S^n)\ (n \geq 5)$;

$$\cdots \to \pi_{n+1}(G/O) \to L_{n+1}(\mathbb{Z}) \to$$
$$\mathcal{S}_n \to \pi_n(G/O) \to L_n(\mathbb{Z}) \to \cdots$$

PL 多様体やさらには位相多様体でも同様な結果が成り立つ．

しかも手術障害類群は滑らかな場合と同じ

定理. (Kirby-Siebenmann) $n \geq 5$ とする．X は n 次元の閉位相多様体とし, $\pi = \pi_1(X)$ とおく．このとき次の完全列がある：

$$\cdots \to [X \times I, \partial; G/\mathrm{TOP}, *] \to L_{n+1}(\mathbb{Z}[\pi])$$
$$\to \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X) \to [X, G/\mathrm{TOP}] \to L_n(\mathbb{Z}[\pi]) \ .$$

注意. (1) **この列が可換群の完全列になるように各項の群構造を与えることができる (L 群に関しては普通の群構造を与える). 実際、この列はあるファイブレーションのホモトピー完全列と思うことができる.**

(2) G/TOP は安定位相束の分類空間 $B\mathrm{TOP}$ から BG へのの自然な写像のホモトピーファイバーであり，$\pi_0(G/\mathrm{TOP}) = 0$，$\pi_i(G/\mathrm{TOP}) \cong L_i(\mathbb{Z})$ $(i \geq 1)$ である．$\Leftarrow \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(D^n, \partial) = \{0\}$

(3) **手術障害類群に関しては 4 周期性が成り立つが，閉多様体の構造集合の 4 周期性は必ずしも成り立たない**:

$\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X \times I^4, \partial) \cong \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X)$ or $\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X) \oplus \mathbb{Z}$

ただし，境界がある多様体 X に対しては周期性がある：

$\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X \times I^4, \partial) \cong \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X, \partial)$

(4) 構造集合の定義が h コボルディズムを用いているため，ホワイトヘッド群が自明でない場合はかならずしも h コボルディズムが直積にならない．定義を変えて s コボルディズムを使うためには，手術障害類群の定義で加群の同型の部分で，そのねじれが消えていることを要請しなければならない．そのようにして得られたものを $L_n^s(\mathbb{Z}[\pi])$ のように書き，元のものを $L_n^h(\mathbb{Z}[\pi])$ と書いて区別する．さらに，自由加群でなく，射影的加群を用いて定義した

ものは $L_n^p(\mathbb{Z}[\pi])$ と書く．これらの間には，例えば次が成り立つ：

$$L_n^s(\mathbb{Z}[\pi \times \mathbb{Z}]) \cong L_n^s(\mathbb{Z}[\pi]) \oplus L_{n-1}^h(\mathbb{Z}[\pi]),$$
$$L_n^h(\mathbb{Z}[\pi \times \mathbb{Z}]) \cong L_n^h(\mathbb{Z}[\pi]) \oplus L_{n-1}^p(\mathbb{Z}[\pi])$$

(5) $\pi_n(\mathrm{PL}/O) = \Theta_n \ (n \neq 3, 4)$

(6) $\mathrm{TOP}/\mathrm{PL} \simeq K(\mathbb{Z}_2, 3)$

X^n : aspherical **多様体** $\Longrightarrow$

(1) $\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X) = \{*\}$ **(ボレル予想)**

※ $\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X \times I^4, \partial) = 0 \Longrightarrow \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X) = 0$

※ Farrell-Jones: non-positively curved manifolds,

etc.

(2) $H_*(X; \mathbb{L}) \xrightarrow{A} L_*(\pi_1(X))$ **は同型**

または少なくとも $\otimes\mathbb{Q}$ **で** split injective

※ $H_{n+i}(X; \mathbb{L}) \cong [X \times I^i, \partial; G/\mathrm{TOP}, *]$ $(i \geq 1)$