Lurie's quasi category topos theory
— 松本堯生先生に[1]—

変換群論シンポジュウム報告集

南 範彦
(名古屋工業大学)

1. Introduction

Lurie 氏は 730 ページを超える大論文[2]

[BOOK] Jacob Lurie,
Higher Topos Theory, September 26, 2008,
http://www-math.mit.edu/ lurie/topoibook/
highertopoi.pdf

において，Quillen モデル圏よりも一般な quasi category の枠組みで Rezk 流のモデルトポスの理論を一般化し，更にそれに続く Derived Algebraic Geometry の一連の論文 [DAGI], [DAGII], [DAGIII], [DAGIV], [DAGV], [DAGVI] ⋯ において，Toën-Vezzosi 流の Homotopical Algebraic Geometry の理論も E_∞ 環スペクトラムの枠組みに拡張して導出することに成功した.

この，Lurie 氏の [BOOK] の出発点となるのが米田の補題の quasi category 版である．これに関しては，ごく最近その証明の粗筋を若干見通し良くした紹介記事を書いた：

南範彦, "Lurie's quasi category Yoneda's lemma",
京都大学数理解析研究所講究録 1612 , 変換群
の幾何とその周辺, 21-40 (2008).

---

[1]本稿を，私の若年期に身近で多くの研究の刺激をいただいた松本堯生先生に捧げます.

[2]ArXiv で download できるものは，typo がもっと有る古い version なので注意して下さい. 必ず Lurie さんのホームページに行って download して下さい！

本講演では，Lurie 氏に従い，quasi category を ∞-category とよび，上述の quasi category Yoneda's lemma を出発点として，次の示唆的な表を説明することを目標とする：

Vague analogies between Higher Category Theory and Algebra

Remark (BOOK, Remark 6.1.1.3.). *Let $\mathcal{X}$ be an ∞-category. The assumption that colimits in $\mathcal{X}$ are universal can be viewed as a kind of distributive law. We have the following table of vague analogies:*

Higher Category Theory	*Algebra*
∞-*Category*	*Set*
Presentable ∞-*Category*	*Abelian Group*
Colimits	*Sums*
Limits	*Products*
$\lim_{\rightarrow}(X_\alpha) \times_S T \simeq \lim_{\rightarrow}(X_\alpha \times_S T)$	$(x+y)z = xz + yz$
∞-*Topos*	*Commutative Ring*

この表の理解を切り口として，より多くの方々が Lurie 氏の [BOOK] 理解への試みに参入されることを，意図するのである．

なお，本稿の結果はすべて Lurie 氏の [BOOK] によるもので，著者にはオリジナリティーは一切ない．しかも大著の主結果の紹介である事も有り，証明など殆どない．[BOOK] の一部の定義と定理のただ単なる寄せ集めかも知れない．

それにも拘わらず著者がこの講演報告書を敢えて著わす所以は，Lurie 氏の [BOOK] が 730 ページ以上にもわらる余りの大作でしかも現時点ではまだ typo 等も時折見受けられるため，その重要性にもかかわらずなかなか読む気になる人が多くないという，極めて嘆かわしい現状を少しでも打破したいからである．

それゆえ本稿は，時間のない読者が [BOOK] を斜め読みするときの指針として使われることを意図して書いて有る．本稿により少しでも多くの方々が Lurie 氏の [BOOK] を読まれる気になっていただき，読み進まれる上で少しでも手助けとなれば幸いである．

2. 復習

Fact. 単体集合 S は，

$$\text{Kan 複体} \overset{\text{定義}}{\iff} 0 \leqq \forall i \leqq n, \quad \begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\forall f_i"] \arrow[d, hook] & S \\ \triangle^n \arrow[ur, dotted, "\exists f"'] & \end{tikzcd} ;$$

$$\text{小圏の nerve に} \cong \iff 0 < \forall i < n, \quad \begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\forall f_i"] \arrow[d, hook] & S \\ \triangle^n \arrow[ur, dotted, "\exists 1 f"'] & \end{tikzcd}$$

Definition 2.1. 単体集合 S に対し，

$$S \text{ が } \underline{\infty\text{-category}} \overset{\text{定義}}{\iff} 0 < \forall i < n, \quad \begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\forall f_i"] \arrow[d, hook] & S \\ \triangle^n \arrow[ur, dotted, "\exists f"'] & \end{tikzcd}$$

Remark. 定義より ∞-category は，Kan 複体 S と小圏 c の nerve $N(c)$ を共に一般化する．それゆえ，∞-*category* $\mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{C}_0$ の元を <u>object</u>，$\mathcal{C}_1$ の元を <u>morphism</u> と考える．

それゆえ，∞-category 論は，<u>通常のホモトピー論</u>と (small) category 論を共に一般化する理論と思える．

Warning. しかしながら、通常の圏が $small$ とは限らないように、

<u>∞-category **や，より一般に 単体“集合”も、**</u>
<u>**必ずしも** small **とは限らないものも考えていく。**</u>

Definition-Proposition 2.2 (Joyal). ∞-category $\mathcal{C}$ に対し，

- $\mathcal{C}_0$ の元を <u>object</u> と呼ぶ.
- $\mathcal{C}_1$ の元を <u>morphism</u> と呼ぶ.
- [BOOK, Proposition 1.2.2.3.] $X, Y \in \mathcal{C}_0$ に対し，

$$\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X,Y)_n = \{\sigma \in \mathcal{C}_{n+1} \mid \sigma \text{ の最後のの頂点は } Y;\ \text{その対面は } X \text{ に退化}\}$$

  で定まる単体集合 $\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は Kan 複体となる.
- [BOOK, Remark 1.2.2.5] $X, Y \in \mathcal{C}_0$ に対し，

$$\mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X,Y)_n = \{\sigma \in \mathcal{C}_{n+1} \mid \sigma \text{ の最初のの頂点は } X;\ \text{その対面は } Y \text{ に退化}\}$$

  で定まる単体集合 $\mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は Kan 複体となる.
- $\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X,Y)$ と $\mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X,Y)$ はホモトピー同値
- しかしながら、$\mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X,Y), \mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 共に合成に関しては上手く振舞わない。

Definition 2.3. quasi category $\mathcal{C}$ に対し，object $X \in \mathcal{C}$ は <u>initial</u> $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall f_0 : \partial\triangle^n \to \mathcal{C},\ s.t.\ f_0(\{0\}) = X,$$
$$\exists f : \triangle^n \to \mathcal{C}, s.t.\ f\mid_{\partial\triangle^n} = f_0.$$

Theorem 2.4. $\mathcal{C}$ に対し，*object* $X \in \mathcal{C}$ は initial $\Longleftrightarrow$ $\forall Y \in \mathcal{C}, \mathrm{Hom}^L_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は可縮.

Remark.

(1) この性質は *Lurie* によって *quasi category* を用いて *"Derived Affine Schme"* を張り合わせて *"Derived Scheme"* を構成するときに使用されている。詳細は *Lurie* の一連の [DAG] シリーズを参照されたい。ごくごくさわりのとこだけは次に書いた：

南範彦, *Lurie* さんの楕円コホモロジー, *Proceedings of the 34th Symposium on Transformation Groups, Wing Col, Ltd. November 2007, p.107-p.116.*

(2) この議論は双対化されて ∞-*category* $\mathcal{C}$ の対称 Y が *"initial"* という概念も，*object* $Y \in \mathcal{C}$ は <u>final</u>

$$\iff \forall X \in \mathcal{C}, \mathrm{Hom}^R_{\mathcal{C}}(X, Y) \text{ は可縮.}$$

となるように定義される．

(3) *([BOOK, 1.2.12])* これらの ∞-*category* の *"initial"*, *"final"* という概念を用いて，∞-*category* の *"colimit"*, *"limit"* という概念が定義される．*(*後ほど言及します！*)*

3. Presentable ∞-category

目標の表で Abelian Group に喩えられている Presentable ∞-category は，次のように定義される．

presentable ∞-category

Definition 3.1 (BOOK, Definition 5.5.0.18.).
An ∞-category $\mathcal{C}$ is <u>presentable</u>,
if $\mathcal{C}$ is accessible and admits small colimits.

Question.

(1) *strict* の意味で結合性がないため *category* でない ∞-*category* の colimit とは何ぞや？

(2) ∞-*category* が，acccessible とは何ぞや？

3.1. colimit.

joint と cone point

Definition 3.2 (BOOK, Definition 1.2.8.1.). 単体集合 S, S' の join $S \bigstar S'$ を，次で定まる単体集合として定義する: 各勇元線形順序集合 J, に対し，

$$(S \bigstar S')(J) = \coprod_{J = I \cup I'} S(I) \times S'(I'),$$

ここで和集合は，各々の $i \in I, i' \in I'$ に対して常に $i < i'$ が満たされるような，J の互いに素な分割 $J = I \cup I'$ を，I または I' が空集合である場合も含めて (この場合は $S(\emptyset;) = S'(\emptyset;) = *$ として)，すべて考える.
もっと具体的に表すと，以下のようになる：

$$(S \bigstar S')_n = S_n \cup S'_n \coprod_{i+j=n-1} S_i \times S'_j.$$

join operation は，空単体集合 $\emptyset = \triangle^{-1}$. を identity として，$Set_\triangle$ にモノイダル構造を付与し，次の自然な同型を与える：

$$\phi_{ij} : \triangle^{i-1} \bigstar \triangle^{j-1} \simeq \triangle^{(i+j)-1}, \text{ for all } i, j \geq 0.$$

Notation 3.3 (BOOK, Notation 1.2.8.4.). 単体集合 K に対し，

$$\underline{\text{left cone } K^{\triangleleft}} := \triangle^0 \bigstar K$$
$$\underline{\text{right cone } K^{\triangleright}.} := K \bigstar \triangle^0$$

いづれの場合も，$\triangle^0$ に含まれる distinguished vertex を cone point と呼ぶ.

これらの join を用いて，単体写像 $p : K \to \mathcal{C}$ から新しい単体集合 $\mathcal{C}_{p/}, \mathcal{C}_{/p}, \mathcal{C}^{p/}, \mathcal{C}^{/p}$ を作ることが出来る：

$\mathcal{C}_{p/}, \mathcal{C}_{/p}, \mathcal{C}^{p/}, \mathcal{C}^{/p}$

単体写像 $p : K \to \mathcal{C}$ に対し，

(1) (Proposition 1.2.9.2, Remark 1.2.9.5., p.200, Remark 4.2.1.9.) 単体集合 $\underline{\mathcal{C}_{p/}, \mathcal{C}_{/p}, \mathcal{C}^{p/}, \mathcal{C}^{/p}}$ が以下の随伴にて定まる：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(Y, \mathcal{C}_{/p}) = \mathrm{Hom}_p(Y \star K, \mathcal{C}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(Y, \mathcal{C}_{p/}) = \mathrm{Hom}_p(K \star Y, \mathcal{C}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(Y, \mathcal{C}^{/p}) = \mathrm{Hom}_{(\mathsf{Set}_\triangle)_{K/}}(Y \diamondsuit K, \mathcal{C}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(Y, \mathcal{C}^{p/}) = \mathrm{Hom}_{(\mathsf{Set}_\triangle)_{K/}}(K \diamondsuit Y, \mathcal{C}).$$

Hom_p は，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}$ の中で K への制限が p となるものだけを考えることを意味する．

(2) (Remark 1.2.9.4., Remark 1.2.9.5) 特に $X = \triangle^0$ で，$p : \triangle^0 \to \mathcal{C}$ の像が $\mathcal{C}$ の対象 X の場合，以下のようにも書く：

$$\underline{\mathcal{C}_{/\mathsf{X}}} = \mathcal{C}_{/p}, \quad \underline{\mathcal{C}_{\mathsf{X}/}} = \mathcal{C}_{p/}$$

(3) (Proposition 1.2.9.3, Remark 1.2.9.5., Proposition 4.2.1.5., Remark 4.2.1.9.) $\mathcal{C}$ が ∞-category のときは，$\mathcal{C}_{p/}, \mathcal{C}_{/p}, \mathcal{C}^{p/}, \mathcal{C}^{/p}$ も ∞-category となる．さらに，自然な射

$$\mathcal{C}_{p/} \to \mathcal{C}^{p/}$$
$$\mathcal{C}_{/p} \to \mathcal{C}^{/p}$$

はともに ∞-category の equivalence となる．

(4) $\mathcal{C}$ が ∞-category のときは，

- $\mathcal{C}_{/p}$ は，$\underline{\mathcal{C}\ \textbf{の}\ \text{overcategory}}$，もしくは，$\underline{p\ \textbf{上の}\ \mathcal{C}\ \textbf{の対象のなす}\ \infty\text{-category}}$ とよばれ，
- $\mathcal{C}_{p/}$ は $\underline{\mathcal{C}\ \textbf{の}\ \text{undercategory}}$，もしくは $\underline{p\ \textbf{の下の}\ \mathcal{C}\ \textbf{の対象のなす}\ \infty\text{-category}}$ とよばれる．

colimit と limit

Definition 3.4 (Definition 1.2.13.4 (Joyal [43].).] ∞-category $\mathcal{C}$ への単体写像 $p : K \to \mathcal{C}$ に対し,

- p の <u>colimit</u> とは, $\mathcal{C}_{p/}$ の initial object のことをいう.
- p の <u>limit</u> とは, $\mathcal{C}_{/p}$. の final object のことをいう.

Remark (Remark 1.2.13.5.). *diagram* $p : K \to \mathcal{C}$ の *colimit* は, p を拡張する単体写像

$$\overline{p} : K^{\triangleright} = K \bigstar \triangle^0 \to \mathcal{C}$$

と同一視される. 一般に, 単体写像 $\overline{p} : K^{\triangleright} \to \mathcal{C}$ が <u>colimit diagram</u> であるとは, それが $p = \overline{p}|K$ の *colimit* であるときをいう. この場合, ∞ を $K^{\triangleright}$ の *cone point* とおき, $\overline{p}(\infty) \in \mathcal{C}$ を p の <u>colimit</u> とよぶ用語の乱用を行う.

Theorem 3.5 (Theorem 4.2.4.1.). $F : \mathsf{I} \to \mathcal{C}$ を, *fibrant* な *simplicial* 圏の間の *simplicial* 関手とする. $\mathcal{C}$ の対象 $C \in \mathcal{C}$ への両立した射のなす族 $\{\eta_I : F(I) \to C\}_{I \in \mathsf{I}}$ が与えられたとき, 次の条件は同値:

(1) 射の族 η_I は, C を図式 F の *homotopy colimit* として表現する.

(2) $\overline{\mathcal{N}(F)} : \mathcal{N}(\mathsf{I}) \to \mathcal{N}(\mathcal{C})$ を, $\{\eta_I\}$ によって与えられる $\mathcal{N}(F) : \mathcal{N}(\mathsf{I}) \to \mathcal{N}(\mathcal{C})$ の拡張とすると, $\overline{\mathcal{N}(F)}$ は $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ における *colimit diagram* となる.

3.2. acccessible ∞-category.

acccessible ∞-category

Definition 3.6 (BOOK, Definition 5.4.2.1.).
Let κ be a regular cardinal. An ∞-category $\mathcal{C}$ is <u>κ-accessible</u> if there exists a small ∞-category $\mathcal{C}^0$ and an equivalence (Definition 5.3.5.1.)

$$\mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C}^0) \simeq \mathcal{C}$$

We will say that $\mathcal{C}$ is <u>accessible</u>,
if it is κ-accessible for some regular cardinal κ.

3.2.1. *equivalence.*

$(\mathsf{C}, \mathcal{N})$ は随伴関手を定める

- $Cat_\triangle$ は余完備、i.e. $^\forall$colimit が存在、
- $^\forall$ 単体集合 X は、$\triangle^n$ たちの colimit、
- simplicial 小圏 $\mathcal{S}$ の simplicial nerve $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ は、以下のように定められた：

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(\triangle^n, \mathcal{N}(\mathcal{S})) = \mathrm{Hom}_{Cat_\triangle}(\mathsf{C}[\triangle^n], \mathcal{S})$$

$\Longrightarrow$ $^\forall$ 単体集合 X と $^\forall$simplicial 小圏 $\mathcal{S}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, \mathcal{N}(\mathcal{S})) = \mathrm{Hom}_{Cat_\triangle}(\mathsf{C}[X], \mathcal{S})$$

となるように、

$$\mathsf{C} : SSets \to Cat_\triangle$$

が定義でき、$(\mathsf{C}, \mathcal{N})$ は随伴関手を定める：

$$SSets \underset{\mathcal{N}}{\overset{\mathsf{C}}{\rightleftarrows}} Cat_\triangle,$$

(categorical) equivalence

Definition 3.7 (BOOK, Definition 1.1.5.14.).
単体集合 S の homotopy category hS は、simplicial 圏 $\mathsf{C}[S]$ の homotopy category $h\mathsf{C}[S]$ として定義される. しばしば、hS を $\mathcal{H}$-豊穣圏とみなす. つまり、各頂点対 $x, y \in S$ に対し,

$$\mathrm{Map}_{hS}(x,y) = [\mathrm{Map}_{\mathsf{C}[S]}(x,y)]$$

(写像空間のホモトピー型).

単体写像 $f : S \to T$
が (categorical) equivalence とは、誘導された $\mathcal{H}$-豊穣関手 $hf : hS \to hT$
が $\mathcal{H}$-豊穣圏の同値 ($\iff$ essential surjective かつ $\mathcal{H}$-豊穣の意味で fully-faithful) のときをいう.

3.2.2. $\mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C}^0)$.

$\mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C}^0)$

Definition 3.8 (BOOK, Definition 5.3.5.1.).
$\mathcal{C}$ を小 ∞-category[3], κ を正則基数とするとき,

$$\mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{N}(\mathrm{Kan}))$$

により，右 fibration $\tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ で $\tilde{\mathcal{C}}$ が κ-filtered な ∞-category なものを分類する関手
$f : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{N}(\mathrm{Kan})$ からなる部分圏を表す.
$\kappa = \omega$ の場合には，$\mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C})$ を単に $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ と表す．$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ は，$\mathcal{C}$ の Ind-objects のなす
∞-category と呼ばれる.

Question.
(1) ∞-category の意味での部分圏とは何ぞや？
(2) κ-filtered な ∞-category とは何ぞや？
(3) 右 fibration とは何ぞや？
(4) そもそも，$\mathcal{N}(Kan)$ は，右 fibration の "分類 ∞-category" なの?

部分圏：.

最初に homotopy category の準備.

Definition 3.9 (BOOK, Definition 1.1.5.14.). **単体集合 S の homotopy category** hS は、

$$\text{simplicial 圏 } \mathsf{C}[S] \text{ の homotopy category} h\mathsf{C}[S]$$

として定義され，しばしば、hS を $\mathcal{H}$-豊穣圏とみなす．つまり、各頂点対 $x, y \in S$ に対し,

$$\mathrm{Map}_{hS}(x, y) = [\mathrm{Map}_{\mathsf{C}[S]}(x, y)] \text{ (写像空間のホモトピー型).}$$

単体写像 $f : S \to T$ が (categorical) equivalence とは、誘導された $\mathcal{H}$-豊穣関手 $hS \to hT$ が $\mathcal{H}$-豊穣圏の同値となるときをいった.

Proposition 3.10 (BOOK, Proposition 1.2.3.1.).

$$h : SSets \xrightarrow{\mathsf{C}[\bullet]} \mathcal{C}at_{\triangle} = \mathcal{C}at_{SSets}$$
$$\xrightarrow{h} \mathcal{C}at_{Ho(SSets)} = \mathcal{C}at_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\text{forget}} \mathcal{C}at_{Set} = \mathcal{C}at$$

は通常の *nerve functor* $N : \mathcal{C}at \to SSets$ と随伴関手 (h, N) をなす：

$$SSets \underset{N}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}at$$

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, N(\mathcal{C})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(hX, \mathcal{C})$$

Proof. 随伴関手 $(\pi_0, \text{inclusion})$

$$SSets \underset{\text{inclusion}}{\overset{\pi_0}{\rightleftarrows}} Set$$

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, \text{inclusion}(E)) = \mathrm{Hom}_{Set}(\pi_0 X, E)$$

は、対応する豊穣圏の間の随伴関手 (h, i) を誘導：

$$\mathcal{C}at_{\triangle} = \mathcal{C}at_{SSets} \underset{i}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}at_{Set} = \mathcal{C}at$$

$$\mathrm{Hom}_{SSets}(X, \text{inclusion}(E)) = \mathrm{Hom}_{Set}(\pi_0 X, E)$$

通常の nerve functor N は、

$$N : \mathcal{C}at \overset{i}{\subseteq} \mathcal{C}at_{\triangle} \xrightarrow{\mathcal{N}} SSets.$$

$\Longrightarrow$ 随伴関手の合成 $(h, N) = (h \circ \mathsf{C}[\bullet], \mathcal{N} \circ i)$ を得る：

$$h : SSets \underset{\mathcal{N}}{\overset{\mathsf{C}[\bullet]}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}at_{\triangle} = \mathcal{C}at_{SSets} \underset{i}{\overset{h}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}at_{Set} = \mathcal{C}at : N$$

□

Corollary 3.11. 単体集合 S に対し，

$$\begin{array}{ccc} Cat_{\triangle} & \xrightarrow{h} & Cat \\ \mathsf{C}[S] & \mapsto & h\mathsf{C}[S] =: hS \end{array}$$

の随伴として，以下の単体写像が得られる：

$$S \to N(hS)$$

Definition 3.12 (BOOK, 1.2.11 Subcategories of ∞-Categories).
$\mathcal{C}$： ∞-category に対し，通常の圏として部分圏

$$(h\mathcal{C})' \subseteq h\mathcal{C}$$

が与えられたとき，∞-category $\mathcal{C}'$ を単体集合としての pull-back として定義する：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ N((h\mathcal{C})') \arrow[r] & N(h\mathcal{C}). \end{tikzcd}$$

($\mathcal{C}'$ が ∞-category となるのは，それが ∞-category$\mathcal{C}$ のなかで，頂点がすべて $(h\mathcal{C})'$ に属する単体で生成される単体集合のため．)

このとき，$\mathcal{C}'$ を $\underline{(h\mathcal{C})'\ \textbf{によって生成される}\ \mathcal{C}\ \textbf{の部分圏}}$ とよぶ.

一般に，このようにして得られる単体部分集合

$$\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$$

も，**部分圏** と呼ぶ.

κ-filtered な ∞-category :.

Definition 3.13 (BOOK, Definition 5.3.1.7.). 正則基数 κ が与えられたとき，∞-category $\mathcal{C}$ は κ-filtered
$\iff$ ${}^{\forall}\kappa$-small(濃度が κ より小な) simplicial set K,

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "{}^{\forall}f"] \arrow[d] & \mathcal{C} \\ K^{\triangleright} = K \star \triangle^0 \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ は filtered $\iff$ ω-filtered

右 fibration :.

Definition 3.14 ((Joyal)). BOOK, Definition 2.0.0.3] 単体写像 $f : X \to S$ は,

- すべてのホーンの入射 $\Lambda^n_i \subseteq \triangle^n$, $0 \leq i < n$. に関して right lifting property を持つとき， left fibration と呼ばれる.
- すべてのホーンの入射 $\Lambda^n_i \subseteq \triangle^n$, $0 < i \leq n$. に関して right lifting property を持つとき， right fibration と呼ばれる.
- すべてのホーンの入射 $\Lambda^n_i \subseteq \triangle^n$, $0 < i < n$. に関して right lifting property を持つとき， inner fibration と呼ばれる.

Remark. 単体集合 X に対して,

$$\begin{aligned} &\text{自明な射 } p : X \to \triangle^0 \text{ は } \textit{inner fibration} \\ \iff &X \text{ は } \infty\textit{-category} \end{aligned}$$

右 fibration の "分類 ∞-category" としての $\mathcal{N}(Kan)$: .

これに関する本質的な質問：

∞-category の “集まり”Cat_∞ の定式化

<u>∞-category のなす集まり Cat_∞ を，</u>
<u>以下を満たすように定式化したい</u>：

(a) $\mathrm{Ob}(Cat_\infty)$ は ∞-category の集まり.
(b) 再び ∞-category となる (勿論 large).
(c) ∞-category としての colimit, limit を持つ.

Approach. 適当な *simplicial category* $Cat^{\triangle}_\infty$ で,

(a') $\mathrm{Ob}(Cat^{\triangle}_\infty)$ は ∞-*category* の集まり,
(b') $Cat^{\triangle}_\infty$ の各射の写像空間は Kan 複体.
(c') $^\exists$*homotopy colimit*, $^\exists$*homotopy limit*

となるものを見つけて，以下のように置く：

$$Cat_\infty := \mathcal{N}(Cat^{\triangle}_\infty)$$

Definition 3.15 (BOOK, Definition 3.0.0.1.). simplicial category $\underline{\mathcal{C}at^{\triangle}_\infty}$ を以下のように定義する：

(1) $\mathrm{Ob}\left(\mathcal{C}at^{\triangle}_\infty\right)$ は (small) ∞-category からなる.
(2) ∞-category $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ に対し，$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}at^{\triangle}_\infty}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ を，∞-category $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ に含まれる <u>*largest Kan complex*</u> として定義する.

ここで，次のように定義する：

$$\mathcal{C}at_\infty := \mathcal{N}(\mathcal{C}at^{\triangle}_\infty).$$

すると，Kan 複体からなる充満部分圏 $Kan \subseteq Cat^{\triangle}_\infty$ を通し，“空間” のなす圏 $\mathcal{S} := \mathcal{N}(Kan)$ が登場：

$$\mathcal{S} = \mathcal{N}(Kan) \to \mathcal{N}(Cat^{\triangle}_\infty) = \mathcal{C}at_\infty$$

Question.

- *largest Kan complex* とは何？
- 何故 $Cat^{\triangle}_\infty$ の各射の写像空間は Kan 複体？

Kan complex と quasi category

Proposition 3.16 (BOOK, Proposition 1.2.5.1 (Joyal)). 単体集合 $\mathcal{C}$ に対し次は同値：

(1) $\mathcal{C}$ は ∞-category でその homotopy category $h\mathcal{C}$ は groupoid.
(2) $\mathcal{C}$ は Kan complex.

復習： ∞-category $\mathcal{C}$ の morphism $(f : X \to Y) \in \mathcal{C}_1$ が equivalence とは、∞-category $\mathcal{C}$ のホモトピー圏を

$$h\mathcal{C} := h\mathrm{C}[\mathcal{C}]$$

によって定義 [BOOK, Definition 1.1.5.14.] したとき、

$$h\mathrm{C}[f] : \{\overset{0}{\bullet} \xrightarrow{i} \overset{1}{\bullet}\} = h\mathrm{C}[\triangle^1] \to h\mathrm{C}[\mathcal{C}] =: h\mathcal{C}$$

による射 i の像

$$h\mathrm{C}[f](i) \in \mathrm{Mor}_{h\mathrm{C}[\mathcal{C}]}(h\mathrm{C}[\overset{0}{\bullet}], h\mathrm{C}[\overset{1}{\bullet}])$$

が isomorphism であるものとして定義した

Proposition 3.17 (BOOK, Proposition 1.2.5.3 (Joyal)). ∞-category $\mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}'$ のすべての edge が $\mathcal{C}$ の equivalence [BOOK, Proposition 1.2.4.1. の直前] であるような最大の部分単体集合とすると, $\mathcal{C}'$ は Kan complex となり、次によって特徴づけられる：
$^\forall$Kan complex K, 次の誘導写像は全単射：

$$\mathrm{Hom}_{Set_\triangle}(K, \mathcal{C}') \to \mathrm{Hom}_{Set_\triangle}(K, \mathcal{C})$$

[BOOK, Proposition 1.2.5.3] より関手 $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ は Kan complex のなす $SSets$ の充満部分圏圏 $\mathcal{K}an$ から
∞-category のなす $SSets$ の充満部分圏 $\mathcal{C}at_\infty$ への
入射関手 i の右随伴となる (ここでは $\mathcal{K}an$, $\mathcal{C}at_\infty$ の豊穣構造は忘れる)：

$$\mathcal{K}an \underset{(-)'}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}at_\infty$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}an}(K, Q') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at_\infty}(i(K), Q)$$

∞-category Q に対し、Kan complex Q' の部分圏としての入射 $Q' \to Q$ は圏同値

$$h(Q') \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}rouppoid\,(hQ)$$

を誘導する。ただし圏 C の $\mathcal{G}roupoid(C)$ は圏 C の同型射からなる部分圏である。Q' は ∞-category Q **に含まれる** largest Kan complex.

$\mathcal{C}at_{\infty}^{\triangle} = \left(\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}\right)^{o}$

Definition 3.18 (Definition 3.1.0.1.). 単体集合 X とその退化した edge(すなわち X の vertex の恒等射) をすべて含む edge の集合 $\mathcal{E}$ からなる対 $(X, \mathcal{E})$ を，marked simplicial set と呼ぶ．X の edge は，$\mathcal{E}$ に属するとき marked と呼ばれる．

marked simplicial set の間の射
$f : (X, \mathcal{E}) \to (X', \mathcal{E}')$ とは，単体写像
$f : X \to X'$ で $f(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$ となるもの．
marked simplicial sets の圏を，$\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}$ で表す．
各単体集合 S は，通常多くの異なった形で marked simplicial set とみなされる．特に 2 つの極端な場合が言及に値する：

- $S^{\sharp} = (S, S_1)$.
- $S^{\flat} = (S, s_0(S_0))$.

Notation 3.19 (Notation 3.1.0.2.). 単体集合 S に対して，$\left(\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}\right)_{/S} := \left(\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}\right)_{/S^{\sharp}}$.

Good News. $\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}$ には単体的モデル構造が入り，その *cofibrant*かつ *fibrant*な *object*の集まり $\left(\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}\right)^{o}$ が$\mathcal{C}at_{\infty}^{\triangle}$を導く：

$$\mathcal{C}at_{\infty}^{\triangle} = \left(\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}\right)^{o}$$

$\therefore$ $\mathcal{C}at_{\infty}^{\triangle}$ **の各射の写像空間は Kan 複体となる**.
更に，より一般に *(small*とは限らない*)*単体集合 S に対しても，$\left(\mathrm{Set}_{\triangle}^{+}\right)_{/S}$ 上に **Cartesian モデル構造**が入る．

Question.

- どうして *marked*された *simplicial set*を考えなくてはならないの？
- *Cartesian*モデル構造って何？ それに答えるには *Cartesian fibration* を述べなくてはならない．

marked simplicial set を考える理由

Trial and Error (BOOK, 3.1.).

- $S \to \mathcal{C}at_\infty = \mathcal{N}(\mathcal{C}at_\infty^\triangle)$ は，S 上の “fibration” $p : X \to S$ を分類すると考えたいが，そのとき p が Set$_\triangle$ 上の Joyal モデル構造における fibration である，Categorical fibration ならば，p の各 $s \in S$ におけるファイバー $X_s = p^{-1}(s)$ も ∞-category となる．
- しかしながら，我々は対応

$$S \to \mathcal{C}at_\infty$$
$$s \mapsto X_s = p^{-1}(s)$$

を “<u>**関手的**</u>” にしたい．
　そのためには，Categorical fibration $p : X \to S$ のファイバー X_s たちは，S における射，すなわち S の edge に関してよい振る舞いをしなければならない．そのようなものが，Cartesian fibration や coCartesian fibration である．これらは微分幾何における <u>**接続付き**</u> のファイバー束に喩えられよう．
- Cartesian fibration と coCartesian fibration の違いは，射と見做された edge が当然向き付きなので，“平行移動” の出発点を，edge の target と取るか (Cartesian fibration の場合)，edge の source と取るか (coCartesian fibration の場合)，の違いが起こることに起因する．
- $p : X \to S$ が Cartesian fibration の場合，定義から S の各 edge $f : x \to y$ と，X の $p(\tilde{y}) = y$ なる各 vertex $\tilde{y}$ に対し，$p(\tilde{f}) = f$ なる
p-Cartesian edge $\tilde{f} : \tilde{x} \to \tilde{y}$ が存在する．よって，X の p-Cartesian edge の集まりが重要なデータとなる．
- <u>marked してない</u> $(\mathrm{Set}_\triangle)_{/S}$ 上に，Joyal モデル構造とは <u>**異なった**</u> モデル構造を導入し，そこでの fibrant 対象がまさに Cartesian fibration であるようにしたいのだが，そうすると fibrant replacement:

$$(p : X \to S) \xrightarrow{\phi} (q : Y \to S)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

において，X のどの edge$f$ が fibratn replacement を施したあと $\phi(f)$ に Y の q-Cartesian edge であるべきかを理解してなりと，Y を fibrant replacement として構成できない．
- こうして，<u>marked</u> された edge を考えることが自然の流れとなった．

p-Cartesian edge, Cartesian fibration, coCartesian fibration

Definition 3.20 (BOOK, Definition 2.4.1.1.). $p : X \to S$ を単体集合の間の inner fibration，$f : x \to y$ を X の edge とするとき.
f が p-Cartesian であるとは，誘導写像

$$X_{/f} \to X_{/y} \times_{S_{/p(y)}} S_{/p(f)}$$

が trivial Kan fibration であるときをいう.

Definition 3.21 (BOOK, Definition 2.4.2.1.). 単体写像 $p : X \to S$ が Cartesian fibration であるとは，次の条件が満たされるときをいう：

(1) 単体写像 p は inner fibration.
(2) S の各 edge $f : x \to y$ と，X の $p(\tilde{y}) = y$ なる各 vertex $\tilde{y}$ に対し，$p(\tilde{f}) = f$ なる p-Cartesian edge $\tilde{f} : \tilde{x} \to \tilde{y}$ が存在する.

p が coCartesian fibration とは，opposite な単体写像 $p^{\mathrm{op}} : X^{\mathrm{op}} \to S^{\mathrm{op}}$ が Cartesian fibration のときをいう.

Proposition 3.22 (Proposition 2.4.2.4.). $p : X \to S$ が単体集合の間の *inner fibration* であるとき，次の条件は同値である*:*

(1) p は *Cartesian fibration* で，X の各 *edge* は *p-Cartesian.*
(2) p は *right fibration.*
(3) p *is a Cartesian fibration* で，p の各 *fiber* は *Kan complex.*

Question. ある $(\mathrm{Set}^+_\triangle)_{/S}$ 上のモデル構造が存在して，次が成立するか？

対象 $X \in (\mathrm{Set}^+_\triangle)_{/S}$ がそのモデル構造に関して *fibrant*
$\iff$ ある *Cartesian fibration* $Y \to S$ に対して，$X \simeq Y^\sharp$.

Answer. *Yes! Cartesian* モデル構造

Remark. f が *Joyal* モデル構造の *weak equivalence* である *Categorical equivalence* とは，単体的豊穣関手 $\mathsf{C}[f]$ が *Dwyer-Kan* 同値であると定義したように，*Cartesian* モデル構造の *weak equivalence* である *Cartesian equivalence* も，写像空間を用いて定義される.

$(\mathrm{Set}_\triangle^+)_{/S}$ における写像空間

Fact (BOOK, 3.1.3.). $(\mathrm{Set}_\triangle^+)$ は Cartesian closed，つまり，各対象 $X, Y \in (\mathrm{Set}_\triangle^+)$ に対して $Y^X \in (\mathrm{Set}_\triangle^+)$ が存在して，"評価写像" $Y^X \times X \to Y$ が各 $Z \in \mathrm{Set}_\triangle^+$ に対して全単射を誘導する：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle^+}(Z, Y^X) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle^+}(Z \times X, Y)$$

Definition 3.23 (BOOK, 3.1.3.).

$\mathrm{Map}^\flat(X, Y)$: $(Y^X \in \mathrm{Set}_\triangle^+)$ の marking を忘れて，$\mathrm{Set}_\triangle$ の対象とみなしたもの.

$\mathrm{Map}^\sharp(X, Y)$: 単体 $\sigma \subseteq \mathrm{Map}^\flat(X, Y)$ ですべての edge が Y^X の marked edge となるものからなる，$\mathrm{Map}^\flat(X, Y)$ の部分単体集合.

すると，次が成立する (これが supscript$\flat, \sharp$ の理由)：

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(K, \mathrm{Map}^\flat(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle^+}(K^\flat \times X, Y)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(K, \mathrm{Map}^\sharp(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle^+}(K^\sharp \times X, Y)$$

これらより，Y^X の正体が鮮明になる：

$$\begin{aligned}(Y^X)_n &:= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(\triangle^n, \mathrm{Map}^\flat(X, Y)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle^+}((\triangle^n)^\flat \times X, Y)\end{aligned}$$

Y^X の marked edge のあつまり

$$\begin{aligned}&= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle}(\triangle^n, \mathrm{Map}^\sharp(X, Y)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\triangle^+}((\triangle^n)^\sharp \times X, Y)\end{aligned}$$

Definition 3.24 (BOOK, 3.1.3.). $^\forall X, {}^\forall Y \in \left(\mathrm{Set}_\triangle^+\right)_{/S}$,

$$\mathrm{Map}_S^\flat(X, Y) = \mathrm{Map}^\flat(X, Y) \cap \mathrm{Map}_{(\mathsf{Set}_\triangle)_{/S}}(X, Y)$$

$$\mathrm{Map}_S^\sharp(X, Y) = \mathrm{Map}^\sharp(X, Y) \cap \mathrm{Map}_{(\mathsf{Set}_\triangle)_{/S}}(X, Y)$$

Remark (BOOK, Remark 3.1.3.1.). 任意の $X \in \left(\mathrm{Set}_\triangle^+\right)_{/S}$ と *Cartesian fibration* $p : Y \to S$ に対して，

$\mathrm{Map}_S^\flat(X, Y^\sharp)$: ∞-*category;*

$\mathrm{Map}_S^\sharp(X, Y^\sharp)$: ∞-*category* $\mathrm{Map}_S^\flat(X, Y^\sharp)$ に含まれる *largest Kan complex.*

Cartesian model structure

Lemma 3.25 (BOOK, Lemma 3.1.3.2). ∞-category 間の関手 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対し，TFAE:

(1) 関手 f は categorical equivalence.
(2) 各単体集合 K に対し，誘導関手 Fun$(K, \mathcal{C}) \to$ Fun$(K, \mathcal{D})$ は categorical equivalence.
(3) 各単体集合 K に対し，誘導関手 Fun$(K, \mathcal{C}) \to$ Fun$(K, \mathcal{D})$ は，Fun$(K, \mathcal{C})$ の largest Kan complex と Fun$(K, \mathcal{D})$ の largest Kan complex の間のホモトピー同値を誘導する.

Proposition 3.26 (BOOK, Proposition 3.1.3.3.). 単体集合 S と $(\mathrm{Set}_\triangle^+)_{/S}$ における射 $p : X \to Y$ に対し，以下は同値：

(1) $^\forall$Cartesian fibration $Z \to S$, 誘導射

$$\mathrm{Map}^\flat_S(Y, Z^\natural) \to \mathrm{Map}^\flat_S(X, Z^\natural)$$

は，∞-category の同値.
(2) $^\forall$Cartesian fibration $Z \to S$, 誘導射

$$\mathrm{Map}^\sharp_S(Y, Z^\natural) \to \mathrm{Map}^\sharp_S(X, Z^\natural)$$

は，Kan complex の homotopy 同値.

$(\mathrm{Set}_\triangle^+)_{/S}$ の射 $X \to Y$ は，Proposition 3.1.3.3. の同値な条件を満たすとき，Cartesian equivalence と呼ばれる.

Proposition 3.27 (BOOK, Proposition 3.1.3.7.). S を単体集合とすると，$(\mathrm{Set}_\triangle^+)_{/S}$ 上に Cartesian model structure と呼ばれる，left proper, combinatorial な model structure で，次で特徴つけられるものが存在する：

(C) cofibration は，単体写像とみなしたときに cofibration となるもの.
(W) weak equivalences は Cartesian equivalences.
(F) fibrations は，すべての cofibration かつ Cartesian equivalence なものに対して right lifting property をもつもの.

Proposition 3.28 (BOOK, Proposition 3.1.4.1.). 対象 $X \in (\mathrm{Set}_\triangle^+)_{/S}$ が Cartesian model structure に関して fibrant
$\iff$ ある Cartesian fibration $Y \to S$ に対して，$X \simeq Y^\natural$.

Question. どのようにすれば，S を base とする Cartesian fibration を沢山作り出せるか？

Answer. fibrant object がわかりやすいモデル圏 $\mathcal{M}$ を source, $(\mathrm{Set}_\triangle^+)_{/S}$ を target とするような，右 Quillen 随伴関手を構成し，この右 Quillen 随伴関手を $\mathcal{M}$ の fibarant object たちに適用すれば良い.

これが極めて本質的!

Theorem 3.29 (Theorem 3.2.0.1.). S : (small **と限らない**) 単体集合, $\mathcal{C}$:simplicial category に対し，任意の $\mathcal{C}at_{\triangle}$ の射

$$\phi : \mathrm{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$$

に対し，随伴対：

$$(\mathrm{Set}^+_{\triangle})_{/S} \underset{Un^+_{\phi}}{\overset{St^+_{\phi}}{\rightleftarrows}} (\mathrm{Set}^+_{\triangle})^{\mathcal{C}},$$

が存在して，次の性質を満たす：

(1) 随伴対 $(St^+_{\phi}, Un^+_{\phi})$ は,
- $(\mathrm{Set}^+_{\triangle})_{/S}$with the Cartesian model structure
- $(\mathrm{Set}^+_{\triangle})^{\mathcal{C}}$ with the projective model structure

の間の Quillen adjunction を定める.

(2) ϕ が simplicial category の間の同値
($\iff$ ホモトピー圏での同値) とすると,
$(St^+_{\phi}, Un^+_{\phi})$ は Quillen equivalence.

St^+_{ϕ} を straightening functor ,
Un^+_{ϕ} を unstraightening functor と呼ぶ.

勿論，“unmarked” な version もある (がここでは使わない)：

Theorem 3.30 (Theorem 2.2.1.2.). S : (small **と限らない**) 単体集合, $\mathcal{C}$:simplicial category に対し，任意の $\mathcal{C}at_{\triangle}$ の射

$$\phi : \mathrm{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$$

に対し，随伴対：

$$(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S} \underset{Un_{\phi}}{\overset{St_{\phi}}{\rightleftarrows}} (\mathrm{Set}_{\triangle})^{\mathcal{C}},$$

が存在して，次の性質を満たす：

(1) 随伴対 (St_{ϕ}, Un_{ϕ}) は,
- $(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S}$with the contravariant model structure
- $(\mathrm{Set}_{\triangle})^{\mathcal{C}}$ with the projective model structure

の間の Quillen adjunction を定める.

(2) ϕ が simplicial category の間の同値
($\iff$ ホモトピー圏での同値) とすると,
(St_{ϕ}, Un_{ϕ}) は Quillen equivalence.

marked version の方がここではより重要なのは，前述のように “ファイブレーション” $p : X \to S$ から定まる対応

$$S \to \mathcal{C}at_{\infty}$$
$$s \mapsto X_s = p^{-1}(s)$$

を関手的にしたいから.

Remark. 故に，$(\mathrm{Set}^+_{\triangle})^{\mathcal{C}}$ の fibrant 対象があれば，Un^+_{ϕ} を適用して，$(\mathrm{Set}^+_{\triangle})_{/S}$ の fibrant 対象，i.e. base が S の Cartesian fibration が得られる.

Question.
- projective model structureって何？
- contravariant model structureって何？
- St^+_{ϕ}, Un^+_{ϕ} はどのようにして構成するの？

projective model structure と injdective model structure

Notation 3.31 (BOOK, A.3.3).

$$\mathsf{S} := \text{ excellent モデル圏}$$
$$\mathsf{A} := \text{ combinatorial S-豊穣モデル圏}$$
$$\mathcal{C} := \text{小 S-豊穣圏}$$
$$\mathsf{A}^{\mathcal{C}} := \mathcal{C}\text{ から A への S-豊穣関手のなす圏}$$

例 : S = $SSet, \mathcal{C}$ = Sing |C[K]|, A = $SSets$ のとき、$\mathsf{A}^{\mathcal{C}} = SSets^{\mathrm{Sing}\,|\mathrm{C}[K]|}$

Definition 3.32 (BOOK, Definition A.3.3.1.). $\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ における自然変換 $\alpha : F \to G$ は：

- 各 $C \in \mathcal{C}$ に対して誘導射 $F(C) \to G(C)$ が A における cofibration となるとき、weak cofibration と呼ばれる。
- 各 $C \in \mathcal{C}$ に対して誘導射 $F(C) \to G(C)$ が A における fibration となるとき、weak fibration と呼ばれる。
- 各 $C \in \mathcal{C}$ に対して誘導射 $F(C) \to G(C)$ が A における weak equivalence となるとき、weak equivalence と呼ばれる。
- $\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ の weak equivalence かつ weak cofibration であるような各射 β に対して right lifting property を持つとき、strong fibration と呼ばれる。
- $\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ の weak equivalence かつ weak fibration であるような各射 β に対して left lifting property を持つとき、strong cofibration と呼ばれる。

Remark (BOOK, Remark A.3.3.5.). 各対象 $C \in \mathcal{C}, A \in \mathsf{A}$ にたいして, 関手 $\mathcal{F}_A^C \in \mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ を次で与える：

$$D \mapsto A \otimes \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(C, D).$$

[BOOK, Proposition A.2.8.3] の証明のように, $\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ における strong cofibrations のクラスは、A の cofibration $A \to A'$ から得られる $j : \mathcal{F}_A^C \to \mathcal{F}_{A^0}^C$ の形の cofibrations によって生成される。これより、すべての strong cofibration は weak cofibration となる。双対的に、すべての strong fibration は weak fibration となる。

Proposition 3.33 (BOOK, Proposition A.3.3.2.). $\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ 上に 2 つの combinatorial model structures が存在する：

- strong cofibrations, weak equivalences, weak fibrations によって定まる projective model structure.
- weak cofibrations, weak equivalences, strong fibrations によって定まる injective model structure.

Remark. $\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ 上で projective model structure と injective model structure のどちらを考えても、[BOOK, A.3.3.5] より評価写像 $e : \mathsf{A}^{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{C} \to \mathsf{A}$ は次を誘導する：

$$e : (\mathsf{A}^{\mathcal{C}})^{\circ} \otimes \mathcal{C} \to \mathsf{A}^{\circ}$$

Proposition 3.34 (BOOK, Proposition A.3.3.7.). $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を、小 S-豊穣圏の間の S-豊穣関手、$f^* : \mathsf{A}^{\mathcal{C}^0} \to \mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ を f との合成によって定まるものとする。
すると、f^* は **右随伴** f_* と **左随伴** $f_!$ を持ち、さらに:

(1) 随伴対 $(f_!, f^*)$ は、$\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathsf{A}^{\mathcal{C}^0}$ の projective model structures に関する Quillen 随伴を定める。
(2) 随伴対 (f^*, f_*) は、$\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathsf{A}^{\mathcal{C}^0}$ の injective model structures に関する Quillen 随伴を定める。

Proposition 3.35 (BOOK, Proposition A.3.3.8.). $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を、小 S-豊穣圏の間の S-豊穣同値とすると、、

(1) Quillen 随伴対 $(f_!, f^*)$ は、$\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathsf{A}^{\mathcal{C}^0}$ の projective model structures に関する Quillen 同値を定める。
(2) Quillen 随伴対 (f^*, f_*) は、$\mathsf{A}^{\mathcal{C}}$ と $\mathsf{A}^{\mathcal{C}^0}$ の injective model structures に関する Quillen 同値を定める。

covariant model structure と contravariant model structure

Definition-Proposition 3.36 (BOOK, Definition 2.1.4.5., Proposition 2.1.4.7., Proposition 2.1.4.8.).
単体集合 S に対し $(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S}$ の射 $f : X \to Y$ が

(C) covariant cofibration とは，単体集合としての単射であるときをいう．．

(W) covariant equivalence とは，誘導射

$$X^{\triangleleft} \coprod_X S \to Y^{\triangleleft} \coprod_Y S$$

が categorical equivalence のときをいう．

(F) covariant fibration とは，すべての covariant cofibration かつ covariant equivalence な射に関して right lifting property を持つときをいう．

すると，$(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S}$ 上には，covariant model structure と呼ばれる，これらから定まる left proper かつ combinatorial な model structure が定まる．covariant model structure は，自然な simplicial 構造に関して，simplicial model structure を定める．

Proposition 3.37 (BOOK, Proposition 2.1.4.10., Remark 2.1.4.11.).
(i) 単体写像 $j : S \to S'$ は，２つの covariant model structure の間の Quillen 随伴 $(j_!, j^*)$ を誘導する：

$$(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S} \underset{j^*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} (\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S'},$$

$$\begin{pmatrix} X \\ \downarrow p \\ S \end{pmatrix} \overset{j_!}{\longmapsto} \begin{pmatrix} X \\ \downarrow j\circ p \\ S' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X' \times_{S'} S \\ \downarrow p' \times_{S'} id_S \\ S \end{pmatrix} \overset{j^*}{\longleftarrow\!\shortmid} \begin{pmatrix} X' \\ \downarrow p' \\ S' \end{pmatrix}$$

(ii) $j : S \to S'$ が categorical equivalence ならば，(i) の Quillen 随伴 $(j_!, j^*)$ は Quillen 同値となる．

Definition 3.38 (BOOK, Remark 2.1.4.12.).
単体集合 S に対し $(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S}$ の射 $f : X \to Y$ が

(C) cotravariant cofibration とは，単体集合としての単射であるときをいう．．

(W) contravariant equivalence とは，f^{op} が $(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S^{\mathrm{op}}}$ において covariant equivalence のときをいう．

(F) contravariant fibration とは，f^{op} が $(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S^{\mathrm{op}}}$ において covariant fibration のときをいう．

すると，$(\mathrm{Set}_{\triangle})_{/S}$ 上には，contravariant model structure と呼ばれるモデル構造が定まる，

手始めに－ St_ϕ, Un_ϕ の構成

Definition 3.39 (BOOK, 2.2.1). 単体集合 S, 単体豊穣圏 $\mathcal{C}$ と単体豊穣関手 $\phi : \mathsf{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ が与えられたとすると，各対象 $X \in (\mathrm{Set}_\triangle)_{/S}$ と $X^\triangleright$ の cone point v に対し，

- 入射 $X \hookrightarrow X^\triangleright$ の誘導する $\mathsf{C}[X] \hookrightarrow \mathsf{C}[X^\triangleright]$
- $\mathsf{C}[X] \xrightarrow{X \in (\mathsf{Set}_\triangle)_{/S}} \mathsf{C}[S] \xrightarrow{\phi} \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

を用いて，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ から $\{v\}$ への単体豊穣圏間の correspondence が構成される：　　　　　、

- 単体豊穣圏：$\mathcal{C}_X^{\mathrm{op}} = \mathsf{C}[X^\triangleright] \quad {}_{\mathsf{C}[X]}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$
- 単体豊穣関手 $F : \mathcal{C}_X^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}[\triangle^1]$
- 同一視：$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \simeq F^{-1}\{0\}$，$\{*\} \simeq F^{-1}\{1\}$
- 単体豊穣関手

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \times \{*\} &\to \mathrm{Set}_\triangle \\ (C, *) &\mapsto \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(C, *) \end{aligned}$$

これから単体豊穣関手 $St_\phi X$ を定義する：

$$\begin{aligned} St_\phi X : \mathcal{C} &\to \mathrm{Set}_\triangle \\ C &\mapsto (St_\phi X)(C) := \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_X^{\mathrm{op}}}(C, *). \end{aligned}$$

これより <u>straightening functor</u> St_ϕ が定義される：

$$\begin{aligned} St_\phi : (\mathrm{Set}_\triangle)_{/S} &\to (\mathrm{Set}_\triangle)^{\mathcal{C}} \\ X &\mapsto St_\phi X \end{aligned}$$

すると <u>unstraightening functor</u>

$$Un_\phi : (\mathrm{Set}_\triangle)^{\mathcal{C}} \to (\mathrm{Set}_\triangle)_{/S}$$

は，St_ϕ の右随伴として定義される：

$$(\mathrm{Set}_\triangle)_{/S} \underset{Un_\phi}{\overset{St_\phi}{\rightleftarrows}} (\mathrm{Set}_\triangle)^{\mathcal{C}},$$

Question. St_ϕ^+, Un_ϕ^+ の場合は？

St^+_ϕ, Un^*_ϕ の構成

- 各対象 $X \in (\mathsf{Set}_\triangle)_{/S}$ に対し，その頂点 $c \in (X)_0$ の合成：

$$\begin{aligned} (X)_0 \to (X^\triangleright)_1 &= \mathsf{Set}_\triangle(\triangle^1, X^\triangleright) \\ &\to \mathcal{C}at_\triangle(\mathsf{C}[\triangle^1], \mathsf{C}[X^\triangleright]) \to \mathcal{C}at_\triangle(\mathsf{C}[\triangle^1], \mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{X_a}) \\ c \mapsto & \; c \bigstar \mathrm{id}_{\triangle^0} : \triangle^1 = \triangle^0 \bigstar \triangle^0 \to X \bigstar \triangle^0 = X^\triangleright \end{aligned}$$

  による像は，以下の元と思える：

$$\tilde{c} = (\phi(c) \to *) \in \mathsf{Map}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_X}(\phi(c), *) = (St_\phi X)(\phi(c))$$

- X の射 $f : c \to d$ の合成：

$$\begin{aligned} (X)_1 \to (X^\triangleright)_2 &= \mathsf{Set}_\triangle(\triangle^2, X^\triangleright) \\ &\to \mathcal{C}at_\triangle(\mathsf{C}[\triangle^2], \mathsf{C}[X^\triangleright]) \to \mathcal{C}at_\triangle(\mathsf{C}[\triangle^2], \mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{X_a}) \\ f \mapsto & \; f \bigstar \mathrm{id}_{\triangle^0} : \triangle^2 = \triangle^1 \bigstar \triangle^0 \to X \bigstar \triangle^0 = X^\triangleright \end{aligned}$$

  による像は，以下を与える：
  - $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_X$ における <u>可換とは限らない</u> 図式：

$$\begin{tikzcd} \phi(c) \arrow[rr, "\phi(f)"] \arrow[dr, "\tilde{c}"'] & & \phi(d) \arrow[dl, "\tilde{d}"] \\ & * & \end{tikzcd}$$

  - $\mathsf{Map}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_X}(\phi(c), *) = (St_\phi X)(\phi(c))$
    における edge $(\tilde{f} : \tilde{c} \to \tilde{d} \circ \phi(f) = \phi(f)^* \tilde{d})$.

Definition 3.40 (BOOK, 3.2.1.2). 単体集合 S, 単体豊穣圏 $\mathcal{C}_3$と単体豊穣関手 $\phi : \mathsf{C}[S] \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ が与えられたとすると，各対象 $(X, \mathcal{E}) \in \mathsf{Set}^+_\triangle{}_{/S}$ に対して，単体豊穣関手 $St^+_\phi(X, \mathcal{E})$ を定義する：

$$\begin{aligned} St^+_\phi(X, \mathcal{E}) : \mathcal{C} &\to \mathsf{Set}^+_\triangle \\ C \mapsto St^+_\phi(X, \mathcal{E})(C) &:= (St_\phi X(C), \mathcal{E}_\phi(C)) \\ &= \mathsf{Map}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_X}(C, *), \mathcal{E}_\phi(C) \end{aligned}$$

ここで,

$$\mathcal{E}_\phi(C) = \{G^* \tilde{f} \mid (f; d \to e) \in \mathcal{E}, G \in \mathsf{Map}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(C, \phi(d))_1\}$$

これより <u>straightening functor</u> St^+_ϕ が定義される：

$$\begin{aligned} St^+_\phi : \mathsf{Set}^+_\triangle{}_{/S} &\to (\mathsf{Set}^+_\triangle)^{\mathcal{C}} \\ (X, \mathcal{E}) &\mapsto St^+_\phi(X, \mathcal{E}) \end{aligned}$$

すると <u>unstraightening functor</u>

$$Un^+_\phi : (\mathsf{Set}^+_\triangle)^{\mathcal{C}} \to \mathsf{Set}^+_\triangle{}_{/S}$$

は，St^+_ϕ の右随伴として定義される：

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{Set}^+_\triangle)_{/S} \arrow[r, shift left, "St^+_\phi"] & (\mathsf{Set}^+_\triangle)^{\mathcal{C}}, \arrow[l, shift left, "Un^+_\phi"] \end{tikzcd}$$

Universal Fibrations

Step 1: $Cat_\infty^\triangle = (\mathrm{Set}_\triangle^+)^O \hookrightarrow \mathrm{Set}_\triangle^+$ は，(projectively) fibrant object $\mathcal{F} \in (\mathrm{Set}_\triangle^+)^{\mathcal{C}at_\infty^\triangle}$.

Step 2:

$$(q : \mathcal{Z} \to \mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}) := Un^+_{\mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}}(\mathcal{F}) \in (\mathrm{Set}_\triangle^+)_{/\mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}}$$

は universal Cartesian fibration.

実際，任意の Cartesian fibration $p : X \to S$ に対して，p を **分類する** 関手 $f : S \to \mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}$ で Cartesian fibration の equivalence

$$X \to \mathcal{Z} \times_{\mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}} S \simeq Un_S^+ f$$

を誘導するものが存在する.

Step 2': 双対的に，$^\forall$ coCartesian fibration $p : X \to \mathcal{C}$ は，有る関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}at_\infty$ によって分類される.

Step 3: Kan 複体からなる充満部分圏 $Kan \subseteq Cat_\infty^\triangle$ を通し，“空間” のなす圏 $\mathcal{S} := \mathcal{N}(Kan)$ が登場：

$$\mathcal{S}^{\mathsf{op}} = \mathcal{N}(Kan)^{\mathsf{op}} \to \mathcal{N}(Cat_\infty^\triangle)^{\mathsf{op}} = \mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}$$

Step 4: この射 $\mathcal{S}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}$ を用いて，$\mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}$ 上の universal Cartesian fibration を $\mathcal{S}^{\mathsf{op}}$ に引き戻す：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}^0 = \mathcal{Z} \times_{\mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}}} \mathcal{S}^{\mathsf{op}} \arrow[r] \arrow[d, "q^0"] & \mathcal{Z} \arrow[d, "q"] \\ \mathcal{S}^{\mathsf{op}} \arrow[r] & \mathcal{C}at_\infty^{\mathsf{op}} \end{tikzcd}$$

$q^0 : \mathcal{Z}^0 \to \mathcal{S}^{\mathsf{op}} = \mathcal{N}(Kan)^{\mathsf{op}}$ は，ただ単に Cartesian fibration ではなく，さらに各 fiber が Kan 複体となるので，right fibration となることが示され，universal right fibration と呼ばれる.

実際，任意の right fibration $p : X \to \mathcal{C}$ に対して，p を **分類する** 関手 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{S}^{\mathsf{op}} = \mathcal{N}(Kan)^{\mathsf{op}}$ で right fibration の equivalence

$$X \to \mathcal{Z}^0 \times_{\mathcal{S}^{\mathsf{op}}} \mathcal{C} \simeq Un_S^+ f$$

を誘導するものが存在する.

Step 4': 双対的に，$^\forall$ left fibration $p : X \to \mathcal{C}$ は，有る関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{S} = \mathcal{N}(Kan)$ によって分類される.

Step 5: Step4 より，$\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathcal{N}(Kan))$ は，$\mathcal{C}$ 上の right fibration の分類関手のなす圏.

3.3. Simpson の presentable ∞-category の特徴付け.

Abelian Group に喩えられている Presentable ∞-category から Commutative Ring に喩えられている ∞-topos を「特殊化」するには, 次の Simpson による presentable ∞-category の特徴付けのうち, ∞-category Yoneda's lemma を出発点とする (5) が明確な指針となる：

Simpson's characterization of presentable ∞-category

Theorem 3.41 (BOOK, Theorem 5.5.1.1 (Simpson)). *∞-category $\mathcal{C}$ に対して,*
次の条件は同値:

(1) *∞-category $\mathcal{C}$ は presentable.*
(2) *∞-category $\mathcal{C}$ は accessible で, 各正則基数 κ に対し, 充満部分圏 $\mathcal{C}^\kappa$ は κ-small colimits を許容する.*
(3) *正則基数 κ であって, $\mathcal{C}$ が κ-accessible かつ $\mathcal{C}^\kappa$ が κ-small colimits を許容するものが存在する.*
(4) *正則基数 κ と κ-small colimits を許容する small ∞-category $\mathcal{D}$ であって, equivalence $\mathrm{Ind}_\kappa \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在する.*
(5) **small ∞-category $\mathcal{D}$ であって, $\mathcal{C}$ が $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ の accessible localization となるものが存在する.**
(6) *∞-category $\mathcal{C}$ は locally small で small colimits を許容し, 正則基数 κ と $\mathcal{C}$ の κ-compact object からなる (small) set S が存在して, $\mathcal{C}$ の各対象は, S によって span される $\mathcal{C}$ の充満部分圏に値を持つ small diagram の colimit となる.*

Question. *Simpson's characterizqation* に現れる,

- *localization* とは何？
- 正則基数 κ に関する様々な概念は何？

Definition 3.42 (Definition 5.2.7.2.). ∞-category 間の関手 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が <u>localization</u> とは, f が fully faithful な right adjoint を持つときをいう.

正則基数 κ に関する諸概念

Definition 3.43 (BOOK, Definition 5.3.4.5.). $\mathcal{C}$ を，small, κ-filtered colimits を許容する ∞-category とする．関手 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が κ-continuous とは，κ-filtered colimits を保つときをいう．
KAN(ここだけの記号) で large Kan 複体の圏を表し，対象 C を含む (豊穣射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet,\bullet)$ すら small とは限らない，一般に large な)∞-category $\mathcal{C}$(例えば，large∞-category のなす ∞-category?) に対し，

$$j_C : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{S}} := \mathcal{N}(KAN)$$
$$D \mapsto \mathcal{N}(\mathrm{Sing}\,|\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)|)$$

とおく．
$\mathcal{C}$ が κ-filtered colimits を許容する時，j_C が κ-continuous の場合, C を κ-compact という．
C は compact $\iff$ C は ω-compact (かつ $\mathcal{C}$ は filtered colimits を許容する).
正則基数 κ と, small, κ-filtered colimits を許容する ∞-category $\mathcal{C}$ に対し，left fibration $\tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ が κ-compact とは，κ-continuous 関手 $\mathcal{C} \to \hat{\mathcal{S}}$ によって分類されるときをいう．

Notation 3.44 (BOOK, Notation 5.3.4.6.). ∞-category $\mathcal{C}$ と正則基数 κ に対し，$\mathcal{C}^{\kappa}$ で $\mathcal{C}$. の κ-compact object で span される充満部分圏を表す.

その一方で，Abelian Group に喩えられている Presentable ∞-category から Commutative Ring に喩えられている ∞-topos を「特殊化」するには，上の Simpson による presentable ∞-category の特徴付けのうち，∞- category Yoneda's lemma を出発点とする (5) が明確な指針となる．
実際，∞-topos の定義は，上の (5) の条件に，“left exact” という条件を更に課すことによって与えられる：

4. ∞-topos

∞-topos

Definition 4.1 (BOOK, Definition 6.1.0.4.). ∞-category $\mathcal{X}$ が ∞-topos とは，small ∞-category $\mathcal{C}$ と accessible left exact localization functor $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \to \mathcal{X}$ が存在するときをいう.

“left exact” という条件は，喩えの表からすぐ予測されるように，Abelian Groups を Commutative Rings に特殊化するのに必要となる,「分配法則」に喩えられる.

Definition 4.2 (BOOK, Definition 5.3.2.1.).
(i) ∞-category の間の関手 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と正則基数 κ に対し，F が <u>κ-right exact</u>
$\iff$ $^\forall$ right fibration $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ where $\mathcal{B}'$ is κ-filtered, ∞-category $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ もまた κ-filtered.
F は <u>right exact</u> $\iff$ ω-right exact.
(ii) ∞-category の間の関手 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と正則基数 κ に対し，F が <u>κ-left exact</u>
$\iff$ $^\forall$ left fibration $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ where $\mathcal{B}'$ is κ-filtered, ∞-category $\mathcal{A}' = \mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ もまた κ-filtered.
F は <u>left exact</u> $\iff$ ω-left exact.

以上により，喩えの表を理解するに必要な概念はほぼすべて紹介したつもりである.

なお，[BOOK] に述べられている Simpson’s characterization of presentable ∞-category の証明や，∞-category の性質に関しては，また次の機会に紹介したいと思う.

nori@nitech.ac.jp