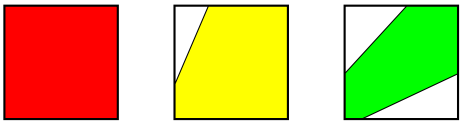
額賀の定理

吉永　純一, 脇坂　晋平, 渡邉　裕文
岡山理科大学理学部基礎理学科　幾何学研究室[*1]

1　格子多角形に対する額賀の定理

格子点 (x 座標も y 座標も整数である点) に頂点をもつ多角形を**格子多角形**とよぶ．頂点の個数 n を強調するときは**格子 n 角形**のように表現する．格子多角形の面積を与える公式としてはピックの定理が有名であるが，それとは全く異なるアプローチによる額賀の定理 [1] とその証明を紹介する．以下では，格子多角形 X の面積を $S(X)$ で表すことにする．まず，いくつかの用語を導入する．

定義 1.1. **格子枠**とは，格子点を通る水平直線・垂直直線たちすべての和集合のことである．格子点を頂点として一辺の長さが 1 の正方形の周を**単位格子枠**という．格子枠で格子多角形 X を切って出来る部分集合たち，つまり X から格子枠を取り除いた図形の連結成分の閉包たちのことを X の**ピース**とよぶ．ひとつのピース P は，いくつかの辺で囲まれているが，そのうちの斜めの辺の本数が n であるとき，P は**タイプ** n のピースであるという．実はタイプは 0, 1, 2 の 3 種類しかない (節末の注意を参照)．下図は左から順にタイプが 0, 1, 2 のピースの例である．

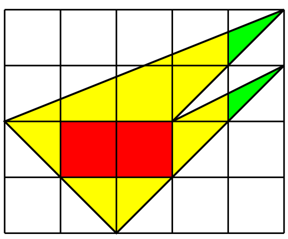


定義 1.2. 格子多角形 X に対し，X のピースでタイプ 0 のものの個数を $m(X)$，タイプ 1 のものの個数を $n(X)$ であらわし，X の**額賀数** $N(X)$ を $N(X) = m(X) + \dfrac{n(X)}{2}$ と定める．

タイプ 0 のピースの面積は 1 である．一方，タイプ 1 のピースやタイプ 2 のピースは様々な面積を持つ．額賀数とは，タイプ 0 のピースの面積は (当然)1，タイプ 1 のピースの面積は一律に $\frac{1}{2}$，タイプ 2 のピースの面積は一律に 0 とみなして和をとったものであり，多角形の面積の大雑把な近似と思える．驚くべきことにそれが実際の面積と一致していることを主張するのが額賀の定理である．

定理 1.3 (額賀の定理)**.** 格子多角形 X に対して $S(X) = N(X)$ が成り立つ．

例. 下図のような格子多角形の場合，タイプ 0 のピース (赤) は 2 個，タイプ 1 のピース (黄色) は 11 個，タイプ 2 のピース (緑) は 2 個である．従って額賀数は $2 + \dfrac{11}{2} = 7.5$ となり，面積と一致している．



証明は多角形を対角線でより小さい多角形に分割し，数学的帰納法を用いることにより行われる．多角形が必ず対角線をもつこと，さらにその繰り返しにより三角形に分割できることはよく知られている．次の節で多角形を拡張した図形に対しても同様の議論を行うので，簡単にその証明に触れることにする．ただし，対角線と

[*1] `http://www.das.ous.ac.jp/masayuki/blogn/`

はふたつの頂点を結ぶ線分で, 端点以外は多角形の内部に含まれているもののことをいう. 凸多角形においては, 隣り合わない頂点を結べば必ず対角線になるので, もし頂点の個数が 4 以上であれば対角線が存在するが, 一般にも次のことが成り立つ:

命題 1.4. $n \geqq 4$ であるとき, 任意の n 角形は対角線をもつ.

証明. 与えられた n 角形 X の凸包 (X を含む凸集合で最小のもの) を Y とする. Y もまた多角形である. Y のどの辺とも直交しないベクトル $\vec{a}$ を 1 つ選ぶ. $\vec{a}$ の方向で最も先端にある X の頂点はただ 1 つであるので, それを v とし, v と隣り合う 2 頂点をそれぞれ u, w とする. このとき, 線分 uw が端点を除き X の内部にあれば, それが対角線である. そうでない場合は, 3 頂点 u, v, w によって定義される三角形の内部, または線分 uw 上に X の頂点が 1 個以上存在する. これらの頂点のうち, 線分 uw からもっとも遠い頂点を v' とする. v と v' を結ぶ線分と X の辺とがもし交差するならば, vv' と交差する X の辺は $\triangle uvw$ の内部に端点を持ち, さらにその点は uw から最も遠いところになければならない. これは, "uw から最も遠い頂点" という v' の定義に矛盾する. よって, v と v' を結ぶ線分は, X の辺と交差することはない. したがって, vv' は X の辺と交差しない, つまり対角線である. □

命題 1.5 (額賀数の加法性)**.** 格子多角形 X を対角線により 2 つの格子多角形 A と B に分割するとき, $N(X) = N(A) + N(B)$ が成り立つ.

証明. X を A と B に分割する対角線を l とおく. l が垂直, または水平の場合は, どのピースのタイプも不変であり等式が成り立つのは明らかなので, l が斜めの場合を考える. l が通過する X のピース P は, A, B それぞれのピース P_A, P_B に分割される. 次の 3 つの場合が考えられる.

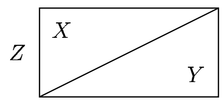
(1) P がタイプ 0 の場合, P_A, P_B どちらもタイプ 1.
(2) P がタイプ 1 の場合, P_A, P_B のうち, 一方がタイプ 1, 他方がタイプ 2.
(3) P がタイプ 2 の場合, P_A, P_B どちらもタイプ 2.

以上から命題は, ただちに導かれる. □

命題 1.6. タイプ 0 のピースのみをもつ図形において額賀の定理が成り立つ.

証明. 図形 X のピースの個数を m とすると, 明らかに $S(X) = m = N(X)$ が成り立つ. □

命題 1.7. 2 辺が座標軸に平行な格子三角形において額賀の定理が成り立つ.



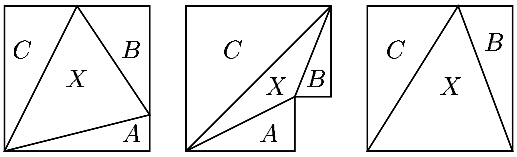
証明. 格子三角形 X において, そのような 2 辺の間の角は直角であり, X は直角三角形となる. X を斜辺の中点に関して 180° 回転して三角形 Y を作り, それらの和で定まる長方形を Z とおく. つまり長方形 Z を一本の対角線で切って出来る図形の一方が X であるとする. このとき, Z の対称性と, $S(\ )$ および $N(\ )$ の加法性から以下の 2 式が成り立つ：

$$S(X) = S(Y) = \frac{S(Z)}{2}, \qquad N(X) = N(Y) = \frac{N(Z)}{2}.$$

また, 命題 1.6 より $S(Z) = N(Z)$ が言えるので $S(X) = N(X)$ が成り立つ. □

命題 1.8. 一般の格子三角形において額賀の定理が成り立つ.

証明. 三角形 X の各辺に対し, それを斜辺とする直角三角形で直角をはさむ 2 辺が座標軸に平行なものを X の外側につくり, それらを A, B, C とおく. ただし, 辺が垂直または水平な場合は, その辺自体がつぶれた直角三角形だとみなし, 面積や額賀数は 0 だと考えることにする. X, A, B, C の和集合を Y とおく.



このとき, 次が成り立つ：

$$S(Y) = S(X) + S(A) + S(B) + S(C)\ .$$

また, 額賀数の加法性から, 次が成り立つ：

$$N(Y) = N(X) + N(A) + N(B) + N(C)\ .$$

Y はタイプ 0 のピースのみからなる格子多角形であるから, 命題 1.6 より,

$$S(Y) = N(Y)$$

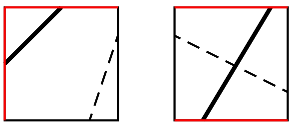
が成り立っている. また命題 1.7 より,

$$S(A) = N(A), \qquad S(B) = N(B), \qquad S(C) = N(C)$$

が成り立っている. これから, $S(X)$=$N(X)$ が直ちに導かれる. □

以上の準備のもとに, 任意の格子多角形に対する額賀の定理を証明する. 頂点の個数を n とする. $n = 3$ の場合は三角形であるから, 命題 1.8 ですでに証明されている. そこで, $3 \leqq n \leqq k$ のとき成り立っていると仮定して, $n = k + 1$ のときを考える ($k \geqq 3$). 与えられた格子 $(k + 1)$ 角形は対角線によりふたつの格子多角形 A, B に分割できる. A, B の頂点の個数は k 以下であるから, 帰納法の仮定により, $S(A) = N(A)$, $A(B) = N(B)$ が成り立っている. また加法性により, $S(X) = S(A) + S(B)$, $N(X) = N(A) + N(B)$ が成り立つ. よって $S(X) = N(X)$ がわかる. 以上で額賀の定理が証明された。

注意. タイプは 0, 1, 2 の 3 種類しかないことは次のように考えればわかる. まず, ひとつのピースが正の傾きの辺と負の傾きの辺の両方をもつことはないことに注意する. 仮に, 正の傾きの辺と負の傾きの辺があったとしよう. それらが単位格子枠の同じ辺に交わっていることはない. なぜならば, その 2 本の辺の定める多角形の辺が格子点以外で交わってしまうからである. さて, 仮に正の傾きの辺が 1 本あったとする (下図の黒い斜めの実線). この辺が単位格子枠の隣り合う辺に端点をもつときと向かい合う辺に端点をもつときの 2 つの場合がある.



負の傾きの辺は, 上図の赤い色の辺には, 端点をもつことができないから, 残りの 2 辺に端点をもつことになる. 上の左図の場合は, 傾きが正になってしまうし, 右図の場合は最初の辺と交わってしまうので, これはありえない. したがって負の傾きの辺はない.

そこで, 斜めの辺はすべて傾きが正 (またはすべて負) であるとする. そのような辺は, 端点以外の点を共有することはないから, 上から順に並んでおり, 仮に本数が 2 本以上とすれば, 一番上の 2 本と格子枠 (の一部) だけでピースが囲まれてしまう. 従って, 斜めの辺が 3 本以上あることはありえない.

2　穴あき格子多角形に対する額賀の定理

額賀の定理は穴あき格子多角形に対してもなりたつことが知られている．この節ではその証明を与える．ただし，穴あき格子多角形とは格子多角形 Y の内部に互いに共有点をもたない格子多角形をいくつかとり，それらの内部を Y から取り去ったもののことをいい，穴あき格子多角形 X の額賀数 $N(X)$ は，多角形の場合と同様に X を格子枠で切って得られるピースのうちタイプ 0 のものの個数を $m(X)$，タイプ 1 のものの個数を $n(X)$ としたとき，

$$N(X) = m(X) + \frac{n(X)}{2}$$

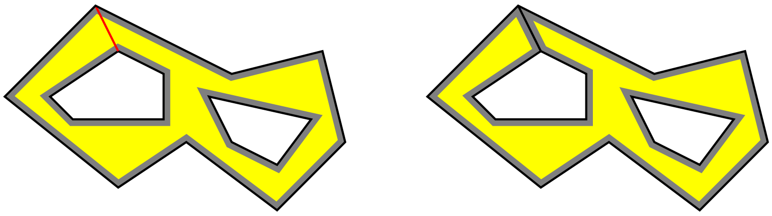
で定義されるものとする．

定理 2.1. 任意の穴あき格子多角形 X に対し，その面積 $S(X)$ は額賀数 $N(X)$ と一致する．

証明の方針は穴のない場合と同様である．任意の穴あき格子多角形 X が必ず対角線をもつことは前と同様にして証明できる．ただし，対角線で X を切るとき，穴のない場合は 2 つの多角形にわかれたが，穴のある場合には，次の 2 つの可能性がある：

(1) 対角線の端点が同じ境界成分上にある．

(2) 対角線の端点が異なる境界成分上にある (下左図)．



(1) の場合は X が 2 つに分かれるが，(2) の場合には 2 つにわかれない．帰納的な証明をするには，このようにして得られた図形にも額賀の定理が成り立つことをいえなければならない．そこで次のような用語を導入する．

定義 2.2. 穴あき格子多角形から異なる境界成分を結ぶ対角線で切る操作を有限回行って得られる "図形" *2 を**入鋏穴あき格子多角形**とよぶ．ただし，各操作において，つなげられた 2 つの境界成分は新しくひとつの境界成分を作ると考える．例えば上右図の場合は，外側の境界は切り口である対角線の外側の端点まできたらそのまま進まず，一度対角線をたどっていき，内側の端点まできたら，今度は内側の境界を一周してから，また対角線を逆に通って外側の境界に戻り，その残りを出発点まで戻ると考える．入鋏穴あき格子多角形 X に対し，その**複雑度**を，X の境界成分の個数 $k(X)$ と頂点の個数 $v(X)$ の対 $(k(X), v(X))$ で定める．この対に，辞書式順序を考えて，入鋏穴あき格子多角形の複雑度の大小を判定することにする．上の例の場合，複雑度は切る前が $(3, 17)$，切った後が $(2, 17)$ になる．

次の事実に注意すると下の定理 2.3 が直ちに導かれる．定理 2.1 はこの定理の系である．

(1) 4 つ以上の頂点をもつ入鋏穴あき格子多角形に対して，必ず対角線が存在する．証明は格子多角形や穴あき格子多角形の場合と同様．

*2 我々は境界のある多角形を考えているので切り口の対角線の点は 2 重になっており，厳密に言えばこれは平面の部分集合ではない．この問題を避けるには境界を取り除いた平面の開集合のことを「多角形」と考えればよい．この場合，「対角線で切る」とはその対角線を取り除くことを意味する．

(2) 入鋏穴あき格子多角形を対角線で切って 2 つにわかれる場合, 額賀数に関する加法性が成り立つ. またこのとき, おのおのの図形の複雑度は, 元の入鋏穴あき格子多角形の複雑度より必ず小さくなる（境界成分の個数が減るか, もしくは境界成分の個数が同じで, 頂点の個数が減る）.

(3) 入鋏穴あき格子多角形を対角線で切って 2 つにわかれない場合は, 額賀数は不変である. またこのとき, 境界成分の個数が減るので, やはり, 複雑度は小さくなる.

(4) 入鋏穴あき格子多角形 X を次々に対角線で切っていく操作では, 頂点の個数は増加しない. したがって, この操作を有限回繰り返すことによって, すべて三角形になる.

定理 2.3. 任意の入鋏穴あき格子多角形 X に対してその面積 $S(X)$ は額賀数 $N(X)$ と一致する.

参考文献

[1] 額賀博 『額賀の定理の証明』
`http://www10.plala.or.jp/h-nukaga/math/syoumei.htm`