球面的およびユークリッド的曲面における閉曲線の回転数

平成27年度　卒業論文

岡山理科大学　理学部　基礎理学科
幾何学ゼミ　担当教員　山崎正之

上原　翔太
坂口　翔悟
寺岡　拓馬
花岡　知歩
八塚　正義
横田　大河
津路　圭太

目次

1　序　1

2　平面曲線の回転数　2

3　球面上の正則閉曲線　8

4　射影平面上の正則閉曲線　10

5　ユークリッド的な曲面上の閉曲線の交点数　15

6　アニュラス上の正則閉曲線　17

7　メビウスの帯の上の正則閉曲線　20

8　トーラス上の正則閉曲線　24

9　クラインの壺の上の正則閉曲線　28

参考文献　33

1　序

私たちは、球面的もしくはユークリッド的な幾何をもつ曲面上の正則閉曲線の正則ホモトピーによる分類について研究を行った。正則ホモトピーによって閉曲線を変形させて、交点数、回転数の値は変わるのか、また、2 つの正則閉曲線が正則ホモトピックであるとはどういうことかについて研究を行った。曲面上の正則閉曲線の正則ホモトピーによる分類に関しては [3] が有名であり、回転数に関しては [2][1] の先行研究があるが、われわれのアプローチはより幾何的である。

第 2 節では、平面曲線の回転数について記している。平面曲線の回転数は平面曲線 γ が正則閉曲線ならば整数である。また、γ_1 と γ_2 の間のホモトピー $\sigma_t : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ が正則ホモトピーであることの定義を行い、平面上の正則閉曲線に対するホイットニーの定理の証明を記している [4][5]。

第 3 節では、球面上の正則閉曲線について記している。球面上の正則閉曲線 γ の回転数 $W(\gamma)(\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を定義し、γ を正則ホモトピーで変形しても値は変わらないことの証明を記している。これにより、球面上の正則閉曲線は正則ホモトピーで 8 の字形と円の 2 種類に分類されることがわかる。

第 4 節では、射影平面上の正則閉曲線について記している。射影平面にはメビウスの帯が含まれている。その中心線を c とする。射影平面上の閉曲線 γ を正則ホモトピーで変形したとき、γ と c との交点が 2 個以上あれば 2 つずつ減らすことができるので、γ と c の交点は 0 個または 1 個まで減らすことができる。どちらの場合にも、γ の回転数 $W(\gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が定まり、c との法を 2 とした交点数 $I^c(\gamma)(\in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とあわせて、正則ホモトピー類が、4 種類に分類できることがわかる。

第 5 節では、ユークリッド的な曲面上の閉曲線の交点数について記している。ここでは、アニュラス、メビウスの帯、トーラス、クラインの壺を紹介している。これらのいずれかにも c と呼ばれる曲線があり、閉曲線

γ と c との交点数 $I^c(\gamma) \in \mathbb{Z}$ が定まる。トーラスとクラインの壺には d と呼ばれる曲線があり、閉曲線 γ に対して d との交点数 $I^d(\gamma)$ が定まる:

$$I^d(\gamma) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & (M = T \text{ のとき}) \\ \mathbb{Z}_{\geq 0} & (M = KB,\, I^c(\gamma) \text{ が偶数のとき}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (M = KB,\, I^c(\gamma) \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

これらの交点数は、それぞれホモトピーで変形しても値は不変である。また、2 つの閉曲線 γ_1, γ_2 がホモトピックであるためには交点数が一致することが必要十分であることを示す。

第 6 ～ 9 節では、アニュラス、メビウスの帯、トーラス、クラインの壺上の正則閉曲線について記している。

- アニュラスの場合は、正則閉曲線 γ の回転数 $W(\gamma)$ は $\mathbb{Z}$ の要素として定める。
- メビウスの帯の場合は
$$W(\gamma) \in \begin{cases} \mathbb{Z}_{\geq 0} & (I^c(\gamma) \text{ が偶数のとき}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (I^c(\gamma) \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$
- トーラスの場合は、$W(\gamma) \in \mathbb{Z}$
- クラインの壺の場合は、γ の $\mathbb{R}^2$ への持ち上げ $\tilde{\gamma}$ を $\tilde{\gamma}(u) = (x(u), y(u))$ とするとき、

$$W(\gamma) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & (I^c(\gamma) \text{ が偶数で、} y(b) \neq y(a) \text{ のとき}) \\ \mathbb{Z}_{\geq 0} & (I^c(\gamma) \text{ が偶数で、} y(b) = y(a) \text{ のとき}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (I^c(\gamma) \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

いずれの場合も γ_1, γ_2 が正則ホモトピックであるためには、

(1) γ_1 と γ_2 はホモトピック、かつ
(2) $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$

であることが必要十分条件である。

2　平面曲線の回転数

定義 2.1. (平面曲線) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2(\gamma(u) = (x(u), y(u)))$ が**平面曲線**であるとは、γ が連続写像であることをいう。つまり、$(\gamma(u) = (x(u), y(u)))$ とかくとき、$x(u), y(u)$ がともに連続関数であることをいう。さらに $\gamma(a), \gamma(b)$ を γ の端点という。

定義 2.2. (C^1 級曲線) $\frac{d\gamma}{du} = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}\right)$ が存在し、それが連続であるとき、γ は C^1 **級曲線**であるという。さらに、C^1 級曲線に対して

$$v_\gamma(u) = \frac{d\gamma}{du}(u)$$

とおき、v_γ を γ の**速度ベクトル**という。

定義 2.3. (正則曲線) すべての u に対して $\frac{d\gamma}{du}(u) \neq 0$ であるとき、C^1 級曲線 γ は**正則**であるという。さらに、γ が正則曲線のとき

$$e_\gamma(u) = \frac{v_\gamma(u)}{|v_\gamma(u)|}$$

を**向き**という。

一般に、曲線が

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

と助変数を用いて表示されているとする。区間 $[c, d]$ から $[a, b]$ の上への単調増加関数 $t = t(u)$ $(t(c) = a,\ t(d) = b)$ に対して、

$$\widetilde{\gamma}(u) = \gamma(t(u)) \qquad (c \leqq u \leqq d)$$

は、図形としては $\gamma(t)$ が表すものと同じ曲線を与える。このとき $\widetilde{\gamma}$ は「γ から**パラメータ変換**によって得られる」という。とくに誤解の恐れがないときは $\widetilde{\gamma}(u)$ のことを $\gamma(u)$ と書く。

助変数で表示された曲線 $\gamma(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ に対して、

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du$$

によって曲線 $\gamma(t)$ の区間 $[a, t]$ に対応する部分の長さが与えられる。この式を微分して $\frac{d\gamma}{du} \neq 0$ に注意すれば、

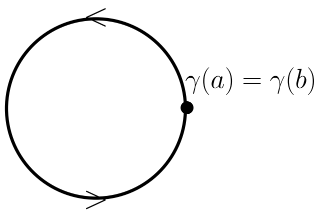
$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| > 0$$

となる。よって、区間 $[a, b]$ 間の曲線 $\gamma(t)$ の長さを l とすと、$s(t)$ は閉区間 $[a, b]$ から $[0, l]$ への単調増加関数なので、逆関数 $t = t(s) : [0, l] \to [a, b]$ が存在する。逆関数定理よりこの逆関数 $t(s)$ も s で微分可能であるから、これを用いて

$$\gamma(s) := \gamma(\ t(s)\ ) \qquad (0 \leqq s \leqq l)$$

のように曲線を新しい助変数 s で表示することができる。この s を曲線の**弧長パラメータ**という。

定義 2.4. (閉曲線) 曲線 γ は、$\gamma(a) = \gamma(b)$ をみたすとき、**閉曲線**であるという。また、点 $\gamma(a) = \gamma(b)$ を γ の基点という。



定義 2.5. (正則閉曲線) 正則曲線 γ は、$\gamma(a) = \gamma(b)$ および $e_\gamma(a) = e_\gamma(b)$ をみたすとき、**正則閉曲線**という。

定義 2.6. (回転数) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を正則曲線とする。すべての u に対して

$$e_\gamma(u) = (\cos\theta_\gamma(u), \sin\theta_\gamma(u))$$

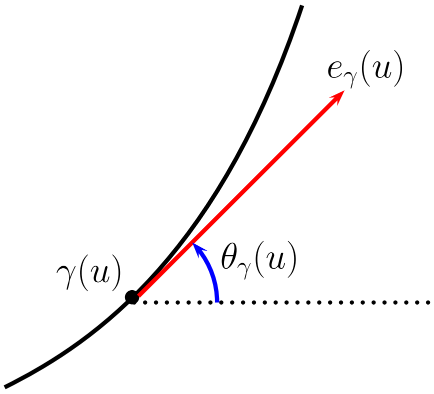
となるような、連続な関数 $\theta_\gamma(u)$ を γ の**角度関数**という。角度関数のとり方は、2π の整数倍を加えるだけの自由度がある。ここで、γ の**回転数** i_γ を、

$$i_\gamma = \frac{\theta_\gamma(b) - \theta_\gamma(a)}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

と定める。これは角度関数の選び方にはよらない。ただし、$e_\gamma(a) = e_\gamma(b)$ ならば

$$\exists m \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \theta_\gamma(b) - \theta_\gamma(a) = 2m\pi$$

であり i_γ は整数 m となる。特に γ が正則閉曲線ならばその回転数 i_γ は整数である。



定義 2.7. **(ホモトピー)** 連続曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ が**ホモトピック** $(\gamma_1 \simeq \gamma_2)$ であるとは、次を満たすような $\sigma_t : [a,b] \to \mathbb{R}^2 (0 \leqq t \leqq 1)$ が存在することである。

1. 写像 $[a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$; $(u,t) \mapsto \sigma_t(u)$ が連続である
2. $\sigma_0 = \gamma_1,\ \sigma_1 = \gamma_2$

この σ_t を γ_1 と γ_2 の間の**ホモトピー**という。

定義 2.8. **(正則ホモトピー)** γ_1 と γ_2 の間のホモトピー $\sigma_t : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ が次の 2 条件を満たすとき、σ_t は**正則ホモトピー**であるという。

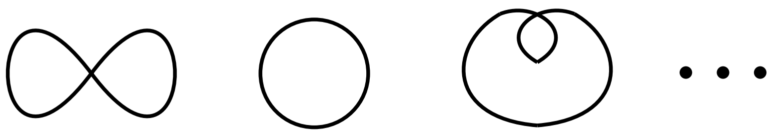
1. 各 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対し、σ_t が正則曲線である。
2. $\frac{d\sigma_t}{du}$ が t について連続である。

また、そのような正則ホモトピー σ_t が存在するとき、γ_1 と γ_2 は**正則ホモトピック**であるといい、$\gamma_1 \overset{r}{\simeq} \gamma_2$ と表す。ただし、正則閉曲線 γ_1, γ_2 に対する正則ホモトピーには、1 のかわりに次の $1'$ を要求する。

$1'$. 各 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対し、σ_t が正則閉曲線である。

次の定理はよく知られている。

定理 2.9. **(ホイットニーの定理)** 2 つの正則閉曲線 γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであるための必要十分条件は、それらの回転数が等しいことである。ホイットニーの定理により、平面上の正則閉曲線は次のいずれかに正則ホモトピックであることがわかる



(i) $(\pm)0$ $(\pm)1$ $(\pm)2$ • • •

さらに一般に次の定理が成り立つ。

定理 2.10. 平面上の 2 点 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^2$ および単位ベクトル $e, f \in \mathbb{R}^2$ を固定する。正則曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ が次の条件をみたすとする。ただし、$e_j(u)$ は $\gamma_j(u)$ の向きを表す関数とする。

1. $\gamma_j(a) = x_0,\ \gamma_j(b) = x_1 \quad (j = 1, 2)$
2. $e_j(a) = e,\ e_j(b) = f \quad (j = 1, 2)$

このとき、γ_1 と γ_2 が端点および端点における向きを止めたまま正則ホモトピックであるためには、$i_{\gamma_1} = i_{\gamma_2}$ が成り立つことが必要十分である。

定理 2.9 は定理 2.10 から証明できる。定理 2.10 の証明のために次の補題を準備する。

補題 2.11. 定数 d は正の数とし、正則曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ は次の条件を満たすとする。

- $\gamma_j(a) = (0, 0)\ ,\ \gamma_j(b) = (d, 0) \quad (j = 1, 2)$
- $e_j(a) = e_j(b) = (1, 0) \quad (j = 1, 2, e_j(u)$ は $\gamma_j(u)$ の向きを示す関数)

このとき曲線 γ_1, γ_2 が端点と端点における向きを止めて正則ホモトピックであるためには $i_{\gamma_1} = i_{\gamma_2}$ であることが必要十分である。

証明. 端点における向きが平行であるから i_{γ_j} は整数であり、必要性は明らか。十分であることを示す。まず $d = 10$ としても一般性を失わない。また、γ_1 と γ_2 は短い方を finger move を使って長くすることにより同じ長さ l をもつとしてよい。さらに両方に弧長パラメータ $s(0 \leqq s \leqq l)$ を与えておく。次に γ_1, γ_2 をある正則ホモトピーで変形して扱いやすくする。以下では γ_1, γ_2 の添え字をとって単に γ と書いて説明を行う。

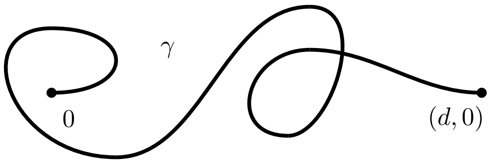


図 1　γ

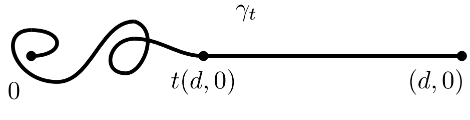


図 2　γ_t

不等式 $0 < t \leqq 1$ を満たす t に対して上の図 2 のような曲線 $\tau_t : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ を考える。つまり、前半は γ

を 0 を中心に t 倍した長さ tl の曲線で、後半は $t(d,0)$ から $(d,0)$ への、長さ $(1-t)d$ の線分であるような曲線である。τ_t のパラメータ表示を与えよう。速さは一定であるとする。τ_t の長さは $tl+(1-t)d$ であるから速さは、

$$\frac{tl+(1-t)d}{l}$$

でなければならない。したがって、原点から $t(d,0)$ へ移動する時間は

$$s_t = \frac{tl}{\frac{tl+(1-t)d}{l}} = \frac{tl^2}{tl+(1-t)d} \quad (\leqq l)$$

と表せる。また、速さは $\frac{tl}{s_t}$ と書ける。その結果次のように τ_t のパラメータ表示が得られる：

$$\tau_t(s) = \begin{cases} t\gamma(\frac{l}{s_t}s) & (0 \leqq s \leqq s_t) \\ t(d,0) + \frac{tl}{s_t}(s-s_t)(1,0) & (s_t{\leqq}s{\leqq}l) \end{cases}$$

τ_t は正則である。なお、s は弧長パラメータとは限らないことに注意する。

さて、次のように小さい正数 ϵ を定義する。

$$\epsilon = \frac{0.1}{l}$$

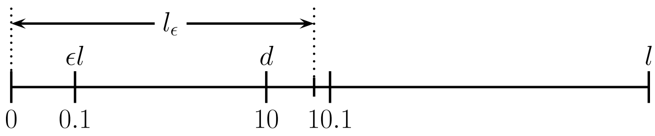
$\tau_t : [0,l] \to \mathbb{R}^2 (\epsilon{\leqq}t{\leqq}1)$ は、τ_ϵ と γ の間の正則ホモトピーであると思ってよい。正則ホモトピーの全体を通して端点と、端点における向きは固定されている。$\gamma = \gamma_j$ の場合の曲線 τ_ϵ を γ_j^ϵ と表す $(j=1,2)$。この時 $\gamma_1^\epsilon, \gamma_2^\epsilon$ は同じ長さ l_ϵ をもつ：

$$l_\epsilon = \epsilon l + (1-\epsilon)d = d + \epsilon(l-d) \;\; (\leqq d + \epsilon l = 10.1) \; .$$

もう一度弧長パラメータ $s(0 \leqq s \leqq l_\epsilon)$ に取り換える。これにより速さは 1 になり、原点から点 $t(d,0)$ までの曲線の長さは定義より

$$\epsilon l = 0.1$$

となる。下図はさまざまな数値の大小関係を表したものである。



曲線 γ_1^ϵ と γ_2^ϵ の回転数は同じであり、その回転数を m とする。また $\gamma_1^\epsilon, \gamma_2^\epsilon$ の角度関数を θ_1, θ_2 とするとき、

$$\theta_j(0) = 0 \;, \quad \theta_j(l_\epsilon) = 2m\pi \;, \quad (j=1,2)$$

としてよい。これまでの条件から次のことも言える：

$$\theta_j(s) = 2m\pi \quad (0.1 \leqq s \leqq l_\epsilon \;,\; j=1,2).$$

θ_1 と θ_2 の間のホモトピー ψ_t を次のように定義する:

$$\psi_t(s) = (1-t)\theta_1(s) + t\theta_2(s).$$

ベクトル関数 $v_t(s)$ を次のように定義する：

$$v_t(s) = (\cos\psi_t(s), \sin\psi_t(s)) \quad (0 \leqq t \leqq 1\ ,\ 0 \leqq s \leqq l_\epsilon).$$

任意の t に対して次が成り立つ。

$$\psi_t(0) = 0\ ,\ \psi_t(s) = 2m\pi\ ,\ v_t(0) = v_t(s) = (1,0) \quad (0.1 \leqq s \leqq l_\epsilon)$$

各 t に対し、定積分

$$\int_0^s v_t(u)du \quad (0 \leqq s \leqq l_\epsilon)$$

は原点 0 を始点、$\int_0^{l_\epsilon} v_t(u)du$ を終点、端点における速度ベクトルは共に $(1,0)$ の正則曲線を定義する。これにより γ_1^ϵ と γ_2^ϵ は正則ホモトピックである。しかし終点 $\int_0^{l_\epsilon} v_t(u)du$ は $(d,0)$ と一致するとは限らない。終点と $(d,0)$ との差を α_t^ϵ とすると、α_t^ϵ は次のように表せる。

$$\begin{aligned}
\alpha_t^\epsilon &= \int_0^{l_\epsilon} v_t(u)du - (d,0) = \int_0^{0.1} v_t(u)du + \int_{0.1}^{l_\epsilon} v_t(u)du - (d,0) \\
&= \int_0^{0.1} v_t(u)du + (l_\epsilon - 0.1\ ,\ 0) - (d,0) \\
&= \int_0^{0.1} v_t(u)du + (l_\epsilon - d - 0.1\ ,\ 0)
\end{aligned}$$

またこのベクトルの長さは次のように上から評価することができる。

$$|\alpha_t^\epsilon| \leqq \int_0^{0.1} |v_t(u)|du + (0.1 - (l_\epsilon - d)) \leqq 0.1 + 0.1 = 0.2$$

次に $d = 10$ で $0.1 < 7 < 9 < 10 = d < l_\epsilon$ となることに注意する。そしてなめらかな関数 $\varphi : [0, l_\epsilon] \to \mathbb{R}$ を次の 3 条件を満たすようにとる：

- $0 \leqq \varphi(s) \leqq 1 \quad (0 \leqq s \leqq l_\epsilon)$,
- もし $0 \leqq s \leqq 7\ ,\ 9 \leqq s \leqq l_\epsilon$ ならば $\varphi(s) = 0$ である,
- $\int_0^{l_\epsilon} \varphi(s)ds = 1.$

v_t を次のように修正して、$\tilde{v}_t$ と定義する：

$$\tilde{v}_t(s) = v_t(s) - \varphi(s)\alpha_t^\epsilon v$$

このとき $|v_t(s)| = 1, |\varphi(s)\alpha_t^\epsilon| \leqq 0.2$ であるので $\tilde{v}_t(s)$ は 0 にならない。また、$0 \leqq s \leqq 7\ ,\ 9 \leqq s \leqq l_\epsilon$ ならば $\tilde{v}_t(s) = v_t(s)$ となり、特に $s = 0\ ,\ l_\epsilon$ の時は

$$\tilde{v}_t(0) = \tilde{v}_t(l_\epsilon) = (1,0)$$

となる。

今 γ_1^ϵ と γ_2^ϵ の間のホモトピー σ_t を次のように定める。

$$\begin{aligned}
\sigma_t(s) &= \int_0^s \tilde{v}_t(u)du = \int_0^s (v_t(u) - \varphi(u)\alpha_t^\epsilon)du \\
&= \int_0^s v_t(u)du - \left(\int_0^s \varphi(u)du\right)\alpha_t^\epsilon.
\end{aligned}$$

曲線 σ_t の終点は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\sigma_t(l_\epsilon) &= \int_0^{l_\epsilon} v_t(u)du - \left(\int_0^{l_\epsilon} \varphi(u)du\right)\alpha_t^\epsilon \\ &= \int_0^{l_\epsilon} v_t(u)du - \alpha_t^\epsilon = (d\ ,\ 0)\end{aligned}$$

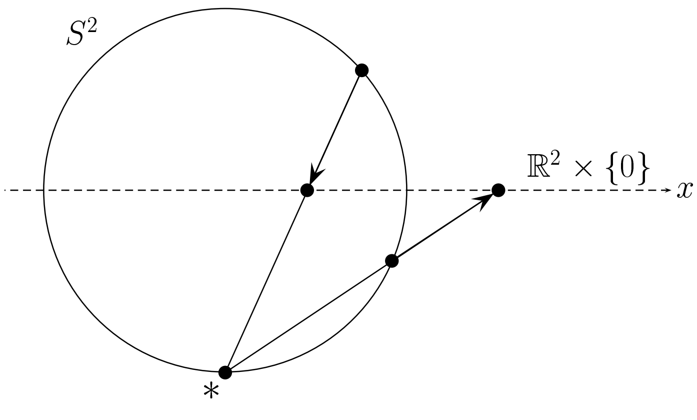
このように σ_t は γ_1^ϵ と γ_2^ϵ の間で端点と端点での向きが固定された正則ホモトピーである。 □

さて、定理 2.10 を示そう。まず $x_0 \neq x_1$ の場合を考える。x_0 を原点 0 に移す。平行移動で γ_1, γ_2 を γ_1', γ_2' に移す。γ_1 と γ_1'、γ_2 と γ_2' は正則ホモトピックであるから回転数は不変である。次に 0 を中心とし、$\gamma_1'(b) = \gamma_2'(b) = x_1 - x_0$ を x 軸の正の部分に移すような回転で γ_1', γ_2' を γ_1'', γ_2'' に移す。γ_1' と γ_1''、γ_2' と γ_2'' は正則ホモトピックであるから回転数は不変である。また、γ_1'', γ_2'' の始点および終点における向きは上の回転でそれぞれ e', f' に変わっている。最後に、始点（原点）および終点の周りの局所的な回転で e' を $(1,0)$ に、f' を $(1,0)$ に移すもので、γ_1'', γ_2'' を γ_1''', γ_2''' に移すと、これらはやはり γ_1'', γ_2'' に正則ホモトピックであり、回転数は同じだけ変わるので $i_{\gamma_1'''} = i_{\gamma_2'''}$ が成り立つ。さらに γ_1''', γ_2''' に対しては補題が使えるので γ_1''' は γ_2''' に正則ホモトピックであることがわかり、γ_1 が γ_2 に正則ホモトピックであることがわかる。

次に、$x_0 = x_1$ の場合を考える。$u = a, u = b$ の小さな近傍 $[a, a+\epsilon], [b-\epsilon, b]$ において、γ_1 と γ_2 は一致しており、さらに $\gamma_1(a+\epsilon) \neq \gamma_1(b-\epsilon)$ であると仮定しても一般性を失わない。$\gamma|[a+\epsilon, b-\epsilon]$ に対しては、定理 2.10 の $x_0 \neq x_1$ の場合が適用できるので、正則ホモトピーが得られる。

3　球面上の正則閉曲線

S^2を単位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ とし、南極 $(0,0,-1)$ を $*$ で表わすことにする。$S^2 - \{*\}$ は $*$ を光源とする立体射影により $\mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ と同一視される。$\gamma : [a,b] \to S^2$ を $*$ を通らない正則閉曲線とすると、γ は $\mathbb{R}^2$ 上の正則閉曲線 ($\overline{\gamma}$ と書く) と思うことができる。



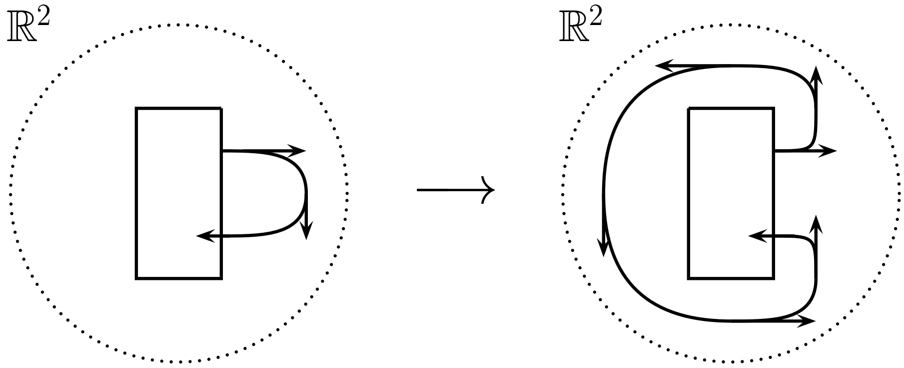
立体射影に関して、次のことがよく知られている。

(1) S^2 上の $*$ を通る円周は直線にうつる。
(2) S^2 上の $*$ を通らない円周は円周にうつる。
(3) 局所的な角度を保つ。

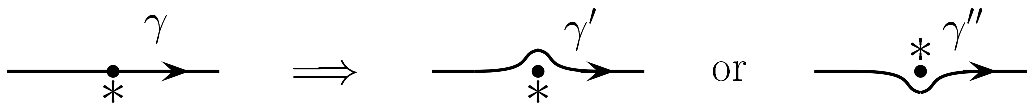
定義 3.1. 点 $*$ を通らない S^2 上の正則閉曲線 γ の**回転数** $W(\gamma)$ を $W(\gamma) = i_{\overline{\gamma}} \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ と定める。ただし、$i_{\overline{\gamma}}$ は平面曲線 $\overline{\gamma}$ の回転数 (2.6) である。また γ が $*$ を通るときは $*$ を通らないように正則ホモトピーで動かして γ' を作り、$W(\gamma) = W(\gamma')$ と定める。

命題 3.2. $W(\gamma)$ は well-defined であり、γ を正則ホモトピーで変形しても値は変わらない。

証明. まず、$*$ を通らない正則閉曲線 γ を正則ホモトピーで変形して、やはり $*$ を通らない正則閉曲線 γ' を得たとき $W(\gamma) = W(\gamma')$ が成り立つことを示す。正則ホモトピーが $*$ を通過しない限り、$\overline{\gamma}$ は $\mathbb{R}^2$ 上の正則ホモトピーで変形される。よって $i_{\overline{\gamma}}$ は整数値として不変である。そこで、γ の正則ホモトピーが $*$ を通過するときの変化を調べる。このとき $i_{\overline{\gamma}}$ は ± 2 変化する。左の図の四角の外の部分での回転数の変化は $-\pi$ であるが右の図では 3π であり、その差は 4π となる。それを 2π で割ることによって 2 が得られる。



よって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で不変である。次に、γ が $*$ を通過するときの $W(\gamma)$ の well-definedness を示す。γ',γ'' の 2 通りのよけ方をしたら γ' と γ'' は正則ホモトピックだから、前半より $W(\gamma') = W(\gamma'') \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。



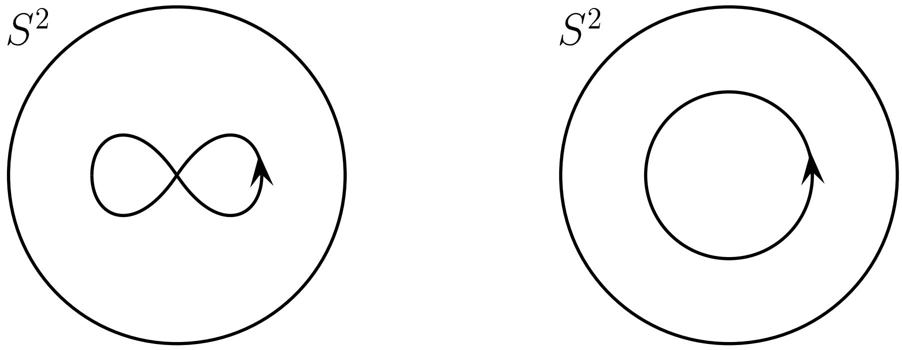
したがって、$W(\gamma)$ は well-defined である。この場合の正則ホモトピーに対する不変性は、前半部分に帰着できる。 □

定理 3.3. 球面上の正則閉曲線 γ_1,γ_2 に対して γ_1 が γ_2 と正則ホモトピックであるためには、$W(\gamma_1)$ と $W(\gamma_2)$ が一致することが必要十分である。

証明. γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックならば $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$ となることは上の命題ですでに示した。逆に $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$ と仮定して γ_1とγ_2 が正則ホモトピックであることを示す。γ_1とγ_2 も $*$ を通らないと仮定しても一般性を失わない。$W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$ ということは $i_{\overline{\gamma}_1} \equiv i_{\overline{\gamma}_2} \bmod 2$ ということを意味する。q を通過す

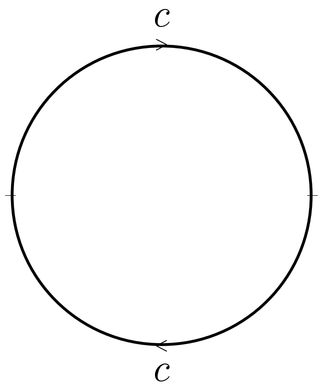
る正則ホモトピーによる変形を γ_2 に行うと、回転数を ± 2 だけ自由に変えることができるから、$i_{\overline{\gamma}_1}=i_{\overline{\gamma}_2}$ と思ってよい。このとき、ホイットニーの定理より $\overline{\gamma}_1$ と $\overline{\gamma}_2$ は $\mathbb{R}^2$ で正則ホモトピックである。したがって、γ_1 とγ_2 は S^2 上で正則ホモトピックである。 □

したがって、球面上の正則閉曲線は正則ホモトピーで 8 の字形と円の 2 種類に分類される。



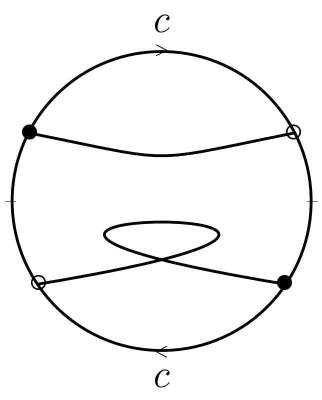
4　射影平面上の正則閉曲線

単位球面 S^2 において、中心に関して点対称な点（対跡点）を同一視して得られる図形を**射影平面**といい P で表す。南極 $*$ を光源とする立体射影により、$S^2-\{*\}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視する。これにより、北半球は単位円板 D にうつされる。よって、D の周を図のように 2 等分して、それぞれに c というラベルを付けて矢印の向きが合うように 2 つの c を貼り合わせて得られる図形と思ってもよい。このとき c は閉曲線となる。D を P の展開図という。



今、S^2 から P を作ったが、逆に S^2 のことを P の**普遍被覆**とよぶ。北半球 S_+ は D のコピーと思えるが、南半球も D のコピーである。この 2 つを貼り合わせたものが S^2 であり、つまり P の普遍被覆なのである。S^2 の点 x に対し、$[x]\in P$ に対応する写像を $p_P: S^2\to P$ とかく。また S^2 上の点をその対蹠点にうつす写像を**対蹠写像**という。

P 上の正則閉曲線 $\gamma : [a,b] \to P$ をとる。下図はその一例を示す。周上の 2 点の黒丸、および 2 点の白丸は、それぞれ同じ点を表している。

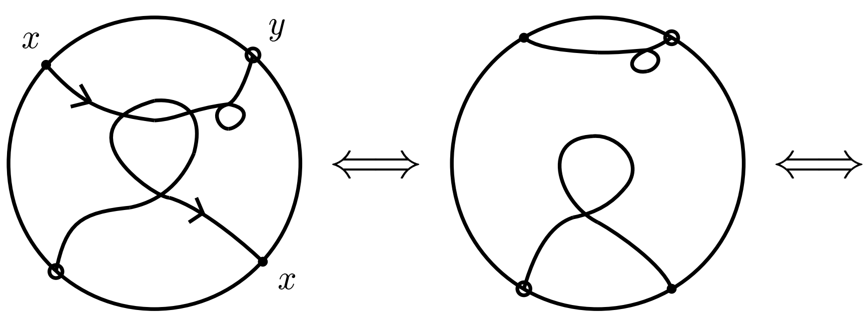


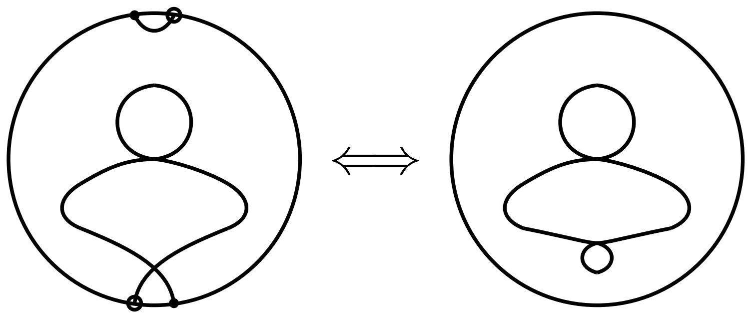
定義 4.1. P の 2 つの正則閉曲線 γ に対し、c **との 2 を法とした交点数** $I_2^c(\gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を、γ を正則ホモトピーで変形して c との交点がすべて横断的であるようにしたときの交点の数 (mod 2) と定める。これは、γ の変形によらないことが知られている。

定理 4.2. γ を P 上の正則閉曲線とするとき、次が成り立つ。
$I_2^c(\gamma) = \overline{0}$ ならば γ を正則ホモトピーで変形して c と交わらないようにできる。
$I_2^c(\gamma) = \overline{1}$ ならば γ を正則ホモトピーで変形して、c と一点で直交するようにできる。

証明. 仮に γ と c が 2 個以上の点で横断的に交わっているとする。そのうち 1 点を x とし、x から進んで次に c とぶつかる点を y とする。γ の x から y までの部分を図のように c を越えて交点 x, y がなくなるように変形する。これは、P 上の正則ホモトピーによる変形である。

以上のように、交点が 2 個以上あればうまく 2 つずつ減らすことができる。





□

さて、γ の S^2 への持ち上げ $\tilde{\gamma}$ というものを考えると、今までの議論がもっとわかりやすくなる。

定義 4.3. (1) P 上の点 q に対し, S^2 上の点 $\widetilde{q}$ で $p_P(\widetilde{q}) = q$ をみたすものを q の S^2 への**持ち上げ**という。
(2) P 上の曲線 $\gamma : [a,b] \to P$ に対し、S^2 上の曲線 $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to S^2$ が $p_P \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ をみたすとき, $\widetilde{\gamma}$ は γ の S^2 への**持ち上げ**であるという。

点 $p \in P$ の S^2 への持ち上げは 2 つあり、互いに対蹠点になっている。したがって、曲線 γ の S^2 への持ち上げも 2 つある。 2 つの持ち上げは S^2 上の向きを逆にする合同変換（対蹠写像）によって互いにうつりあう。

$I_2^c(\gamma)$ の値と γ の持ち上げの間に次のような関係がある。

命題 4.4. P 上の正則閉曲線 γ について次が成り立つ:
(1) $I_2^c(\gamma) = \overline{0} \Longleftrightarrow \gamma$ の持ち上げは共に正則閉曲線である。$\Longleftrightarrow \gamma$ はホモトピーで 1 点に縮まる。
(2) $I_2^c(\gamma) = \overline{1} \Longleftrightarrow \gamma$ の持ち上げは共に対蹠点を両端とする正則曲線である。$\Longleftrightarrow \gamma$ は c にホモトピック。

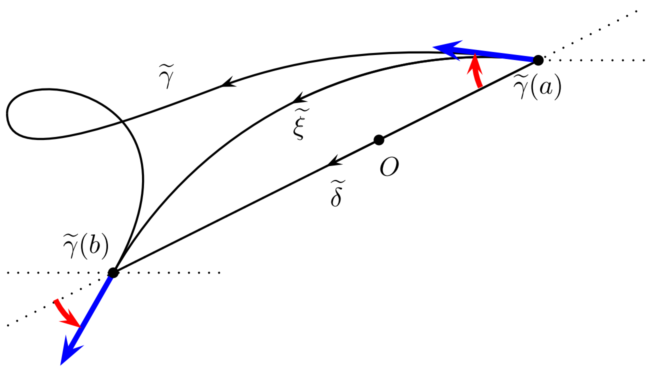
証明. 持ち上げが閉曲線であるかどうかは γ を正則ホモトピーで変形しても変わらないことに注意する。また右側の $\Longleftrightarrow$ は明らかである。
(1) $I_2^c(\gamma) = \overline{0}$ と仮定する。γ は c と交わらないとしてよい。すると γ の持ち上げは、γ の 2 つのコピーであり。共に閉曲線である。逆に γ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ が閉曲線であるとする。$\mathbb{R}^2$ において $\widetilde{\gamma}$ を十分遠くまで平行移動していけば S^2 の赤道に対応する単位円周とは交わらないようにできる。これは γ の正則ホモトピーを誘導し、γ を c と交わらなくできる。よって $I_2^c(\gamma) = \overline{0}$ である。
(2) (1) の対偶は次のようになる :「$I_2^c(\gamma) = \overline{1} \Longleftrightarrow \gamma$ の持ち上げのひとつは閉曲線ではない」。しかし 2 つの持ち上げは合同であるから右辺はどちらも閉曲線でないことを意味する。 □

定義 4.5. $\widetilde{\gamma}$ は γ の持ち上げ、$\widetilde{\delta}$ は $\widetilde{\gamma}$ の始点から終点へ向かう線分とする。γ の回転数 $W(\gamma)$ を次のように定める。

$$W(\gamma) = \begin{cases} i_{\widetilde{\gamma}} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (I_2^c(\gamma) = \overline{0} \text{ のとき}) \\ j_{\widetilde{\gamma}} - j_{\widetilde{\delta}} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (I_2^c(\gamma) = \overline{1} \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし、$\widetilde{\gamma}$ が $*$ を通過する場合は、γ を正則ホモトピーで少し動かして、別の曲線 γ' をとり、その持ち上げ $\widetilde{\gamma}'$ が $*$ を通らないようにして $W(\gamma) = W(\gamma')$ と定める。

注意. 上のような γ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ の端点での向きがちょうど逆の向きでない場合には、$\widetilde{\gamma}$ と同じ端点および同じ端点での向きをもつ $\mathbb{R}^2$ 上の円弧 $\widetilde{\xi}$ が存在する。S^2 で考えればこれも $\widetilde{\delta}$ と同様に対蹠点を結ぶ大円の弧が作る半円である。このとき $j_{\widetilde{\delta}} = j_{\widetilde{\xi}}$ および $j_{\widetilde{\gamma}} - j_{\widetilde{\delta}} = i_{\widetilde{\gamma}} - i_{\widetilde{\xi}} \pmod 2$ が成り立っていることが次の図から容易に示される。



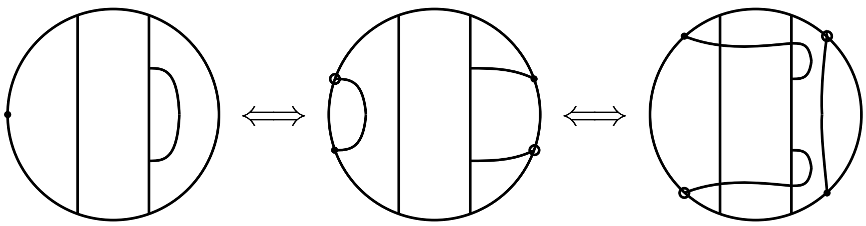
命題 4.6. $W(\gamma)$ は well-defined である。

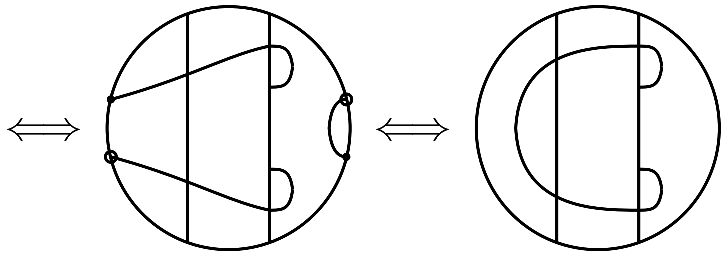
証明. まず、上の式の値が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元であることを調べる。$I_2^c(\gamma) = \overline{0}$ の場合、$\widetilde{\gamma}$ は正則閉曲線であるから $i_{\widetilde{\gamma}}$ は整数であり、$W(\gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。次に $I_2^c(\gamma) = \overline{1}$ の場合を考える。$\widetilde{\gamma}(a)$ と $\widetilde{\gamma}(b)$ は S^2 上の対蹠点であった。また $\widetilde{\delta}$ は S^2 上では大円の弧が作る半円である。$p_P \circ \widetilde{\delta}$ を δ とおくと、δ は P 上の正則閉曲線である。δ の基点での向きをある角度だけ回転すると γ の基点での向きに一致する。S^2 上の点 $\widetilde{\gamma}(a), \widetilde{\gamma}(b)$ でも $\widetilde{\delta}$ の向きを同じ角度だけ回転すると $\widetilde{\gamma}$ の向きになる。ただし、$\widetilde{\gamma}(a), \widetilde{\gamma}(b)$ でその回転方向が逆になる。つまり $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ の角度関数を $\theta_{\widetilde{\gamma}}, \theta_{\widetilde{\delta}}$ とおくと、ある実数 α に対して次が成り立つ：

$$\theta_{\widetilde{\gamma}}(a) = \theta_{\widetilde{\delta}}(a) + \alpha, \quad \theta_{\widetilde{\gamma}}(b) \equiv \theta_{\widetilde{\delta}}(b) - \alpha \mod 2\pi.$$

この 2 式から $j_{\widetilde{\gamma}} - j_{\widetilde{\delta}} \equiv 0 \pmod 1$ がわかる。

上のことから次のことがわかる：正則ホモトピーで γ を動かすと $\widetilde{\gamma}$ も（さらにそれに伴う $\widetilde{\delta}, \widetilde{\xi}$ も）正則ホモトピーで変わり、もしそのホモトピーが $*$ を通過しないならば連続的に変わる。$*$ を通過する場合は、球面のときと同様に $i_{\widetilde{\gamma}}$ は ± 2 変化するから $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で値が不変である。その時の γ の変化を展開図上に描くと次のようになる：





次に、上の式の値が持ち上げの取り方によらないことを示す。γ の 2 つの持ち上げを $\widetilde{\gamma}, \widehat{\gamma}$ とする。まず、どちらも点 $*$ を通らない場合を考える。$I_2^c(\gamma) = \overline{0}$ とする。$\widetilde{\gamma}, \widehat{\gamma}$ は S^2 のメトリックでは合同な閉曲線であるが、ユークリッド的には合同ではないし相似でもない。しかし、γ は P の中でいくらでも小さく縮めることができる。γ が小さくなればなるほど、$\widetilde{\gamma}, \widehat{\gamma}$ はユークリッド的にも相似に近い形（ただし裏返っている）になっていく。したがって $i_{\widetilde{\gamma}} = -i_{\widehat{\gamma}}$ がわかり、$i_{\widetilde{\gamma}} \equiv i_{\widehat{\gamma}} \bmod 2$ が成り立つ。次に $I_2^c(\gamma) = \overline{1}$ とする。上の注意で述べたような $\widetilde{\xi}$ を取る。($\widetilde{\gamma}$ の端点での向きがちょうど逆の場合は基点の周りで少し局所的な回転を行っておく。) $i_{\widetilde{\xi}} - i_{\widetilde{\gamma}}$ を $m \in \mathbb{Z}$ と置く。$\widetilde{\gamma}$ に非常に小さな m 個のねじれをつけたものを $\widetilde{\gamma}_m$ と書く。$i_{\widetilde{\gamma}_m} = i_{\widetilde{\gamma}} + m = i_{\widetilde{\xi}}$ となり、$\widetilde{\gamma}_m$ と $\widetilde{\xi}$ は端点および端点での向きを止めて正則ホモトピックである。$p_P \circ \widetilde{\gamma}_m$ を γ_m とし、その持ち上げで $\widetilde{\gamma}_m$ でない方を $\widehat{\gamma}_m$ と書く。$\widehat{\gamma}_m$ は $\widehat{\gamma}$ に $-m$ の小さなねじれをつけたものになっているから、$i_{\widehat{\gamma}_m} = i_{\widehat{\gamma}} - m$ が成り立つ。$\widehat{\gamma}$ と同じ端点および端点での向きをもつ $\mathbb{R}^2$ 上の円弧を $\widehat{\eta}$ とする。この $\widehat{\eta}$ は $\widetilde{\xi}$ を S^2 の対蹠写像でうつしたものになっており、$\widehat{\gamma}_m$ も $\widetilde{\gamma}_m$ を対蹠写像でうつしたものなので、両者は端点および端点での向きを止めて正則ホモトピックである。よって $i_{\widehat{\gamma}_m} = i_{\widehat{\eta}}$ が成り立つ。以上から次の等式を得る：

$$i_{\widetilde{\gamma}} - i_{\widetilde{\xi}} = -m, \quad i_{\widehat{\gamma}} - i_{\widehat{\eta}} = m.$$

上の注意より、この場合も持ち上げの取り方によらないことがわかった。

以上より、γ の持ち上げが $*$ を通らない場合に $W(\gamma)$ が well-defined であることがわかった。一般の場合も、正則ホモトピーで不変であることにより、やはり well-defined となる。 □

定理 4.7. P 上の正則閉曲線 γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであるためには、$(I_2^c(\gamma_1), W(\gamma_1)) = (I_2^c(\gamma_2), W(\gamma_2))$ であることが必要十分である。

証明. $(I_2^c(\gamma_1), W(\gamma_1)) = (I_2^c(\gamma_2), W(\gamma_2))$ と仮定する。正則ホモトピーにより、基点および基点における向きが一致していると仮定してもよい。

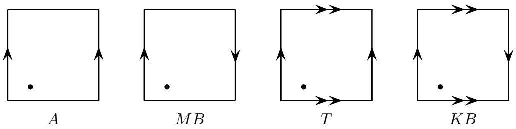
- 場合 1 $I_2^c(\gamma_1) = I_2^c(\gamma_2) = \overline{0}$ のとき、γ_1, γ_2 ともに c と交わらないとしてよい。γ_1, γ_2 の S^2 への持ち上げ γ_1, γ_2 として同じ基点をもつものを取る。$i_{\widetilde{\gamma}_1} \equiv i_{\widetilde{\gamma}_2} \bmod 2$ が成り立つ。
- 場合 2 $I_2^c(\gamma_1) = I_2^c(\gamma_2) = \overline{1}$ のとき、両者の持ち上げ $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ を始点が一致するように取る。始点での向きも一致する。このとき、自動的に終点および終点での向きも一致する。これらの 2 点を端点とし、2 点での向きを向きとする円弧を ξ とする。これは両者に共通したものである。$W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$ より、$i_{\widetilde{\gamma}_1} - i_{\widetilde{\xi}} \equiv i_{\widetilde{\gamma}_2} - i_{\widetilde{\xi}} \pmod 2$ がわかり、これより $i_{\widetilde{\gamma}_1} \equiv i_{\widetilde{\gamma}_2} \bmod 2$ が成り立つ。

どちらの場合においても、上で紹介した変形をくり返すことによって $i_{\overline{\gamma}_1} = i_{\overline{\gamma}_2}$ が成り立っているとしてよい。定理 2.10 により、$\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2$ は端点および端点での向きを止めて $\mathbb{R}^2$ 上で正則ホモトピックである。この正則ホモ

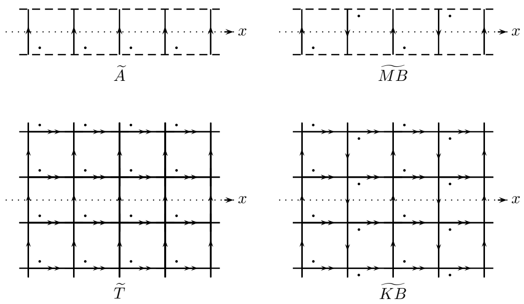
トピーを p_P で P 上に落とすことにより求める正則ホモトピーが作れる。 $\square$

5 ユークリッド的な曲面上の閉曲線の交点数

ユークリッド的な幾何をもつ 4 つの曲面 A, MB, T, KB を紹介する。これらはそれぞれ単位正方形 $[0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ の辺を下図のように同一視して得られる図形である。垂直な辺は c、水平な辺は d で表す。



上の図を各曲面の**展開図**という。これらの曲面の**普遍被覆** $\widetilde{A}, \widetilde{MB}, \widetilde{T}, \widetilde{KB}$ は下図のように展開図をつなげたもののことをいう。



さて図形 M を A, MB, T, KB のいずれかであるとし、$\widetilde{M}$ をその普遍被覆とする。$\widetilde{M}$ の点 x に対し、x を含む M の展開図 (正方形) の辺を同一視して得られる M の点を $\bar{x}$ とする。x に対して $\bar{x}$ を対応させると、連続写像 $p : \widetilde{M} \to M$ が定まる。逆に、x_0 を M の点とするとき p による x_0 の逆像 $p^{-1}(x_0)$ の点を x_0 の $\widetilde{M}$ への**持ち上げ**という。x_0 を基点とする閉曲線 $\gamma : [a,b] \to M$ に対し、$\widetilde{x}_0$ を始点とする曲線 $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \widetilde{M}$ で $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ をみたすものがただ 1 つ存在する。この $\tilde{\gamma}$ を γ の**持ち上げ**という。γ が閉曲線であっても、$\tilde{\gamma}$ は必ずしも閉曲線とは限らない。$\tilde{\gamma}$ を x, y 座標を用いて

$$\tilde{\gamma}(u) = (x(u), y(u))$$

と書く。

$\widetilde{M}$ の図の黒丸は M の点 (黒丸) の持ち上げたちを表している。このとき、2 つの持ち上げの x 座標の差は必ず整数になっている。

$M = A, T$ のときは 2 つの持ち上げの y 座標の差は必ず整数である。一方、$M = MB, KB$ のときは、必ずしもそうではない。実際、点 $x_0 \in M$ の 2 つの持ち上げ $\tilde{x}_0 = (x, y), \tilde{x}'_0 = (x', y')$ に対し、$x - x'$ が偶数のときは $y - y'$ は必ず整数になる。また、$x - x'$ が奇数のときは、$y + y'$ が必ず整数になる。

c との**交点数** $I^c(\gamma)$ を γ と c との交点の個数と定める。ただし、γ が c の左から右へ突き抜けるときは $+1$ 個、逆に c の右から左へ突き抜けるときは -1 個と数える。これは、次のように定めることと同じである。

$$I^c(\gamma) = x(b) - x(a) \in \mathbb{Z}$$

この $I^c(\gamma)$ は $\tilde{\gamma}$ のとり方によらない。

命題 5.1. $I^c(\gamma)$ は γ をホモトピーで変形しても不変である。

証明. γ をホモトピーで連続的に変形すると、$\tilde{\gamma}$ も連続的に変形する。すると、関数 $x(u)$ も連続的に変わる。したがって、$I^c(\gamma) = x(b) - x(a)$ も連続的に変わる。しかし、この値は整数であるから、定数でなければならない。 □

次に、$M = T$ または KB の場合を考える。d との**交点数** $I^d(\gamma)$ を次のように定める:

$$I^d(\gamma) = \begin{cases} y(b) - y(a) \in \mathbb{Z} & (M = T \text{ のとき}) \\ |y(b) - y(a)| \in \mathbb{Z}_{\geq 0} & (M = KB, I^c(\gamma) \text{ が偶数のとき}) \\ y(b) + y(a) \mod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (M = KB, I^c(\gamma) \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

ただし、$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. $M = T$ のときは、$I^d(\gamma)$ は γ と d との交点の符号付きの個数と一致する。$M = KB$ の場合には値が $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ や $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元となるが、やはり γ と d の交点の状況を表している。

命題 5.2. $I^d(\gamma)$ は γ をホモトピーで変形しても不変である。

証明. 命題 5.1 の証明とほぼ同じ。 □

次は、命題 5.1,5.2 の逆を与える。

定理 5.3. (1) $M = A, MB$ のとき、M 上の閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to M$ が $I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ をみたせば γ_1 と γ_2 はホモトピックである。

(2) $M = T, KB$ のとき、M 上の閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to M$ が $I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ かつ $I^d(\gamma_1) = I^d(\gamma_2)$ をみたせば γ_1 と γ_2 はホモトピックである。

証明. 必要なら γ_1, γ_2 の一方をホモトピーで変形して基点を一致させることができる。共通の基点を x_0 とし、x_0 の持ち上げ $\tilde{x}_0$ を 1 つとり、$\tilde{x}_0$ を始点とする γ_1, γ_2 の持ち上げ $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ をとり、$\tilde{\gamma}_1(u) = (x_1(u), y_1(u)), \tilde{\gamma}_2(u) = (x_2(u), y_2(u))$ と表しておく。$I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ なので $x_1(b) - x_1(a) = x_2(b) - x_2(a)$. ここで $x_1(a) = x_2(a)$ だから、$x_1(b) = x_2(b)$ とわかる。

$M = A, MB$ の場合は、x_0 の持ち上げは垂直な直線上に高々 1 つしか存在しないから、$\tilde{\gamma}_1(b) = \tilde{\gamma}_2(b)$ となる。

$M = T$ の場合は、$I^d(\gamma_1) = I^d(\gamma_2)$ より

$$y_1(b) - y_1(a) = y_2(b) - y_2(a)$$

である。$y_1(a) = y_2(a)$ であるから、$y_1(b) = y_2(b)$ がわかる。よって、$\tilde{\gamma}_1(b) = \tilde{\gamma}_2(b)$ がわかる。

$M = KB$ で、$I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ が偶数の場合は、$I^d(\gamma_1) = I^d(\gamma)$ より、

$$y_1(b) - y_1(a) = \pm(y_2(b) - y_2(a))$$

がわかる。

$$y_1(b) - y_1(a) = -(y_2(b) - y_2(a)) \cdots (*)$$

のときは、γ_2 を水平方向に一周動かす。基点が元の位置 x_0 にもどってきたとき新しい γ_2 を γ_2' と書くことにすると、γ_2' は γ_2 と比べて上下が逆転している。元の $\widetilde{\gamma}_2$ と $\widetilde{x}_0$ を始点とする γ_2' の持ち上げ $\widetilde{\gamma_2'}$ とは水平な直

線に関して対称である。すなわち、

$$y_2'(b) - y_2'(a) = -(y_2(b) - y_2(a))$$

が成り立つ。$(*)$ より、

$$y_1(b) - y_1(a) = y_2'(b) - y_2'(a)$$

となり、$y_1(b) = y_2'(b)$ がわかる。よって、$\widetilde{\gamma}_1(b) = \widetilde{\gamma}_2'(b)$ となる。この場合 γ_2' を新たに γ_2 と思えば $\widetilde{\gamma}_1(b) = \widetilde{\gamma}_2(b)$ と思ってよい。

$M = KB$ で $I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ が奇数の場合は、$I^d(\gamma_1) = I^d(\gamma_2)$ より、

$$y_1(b) + y_1(a) \equiv y_2(b) + y_2(a) \mod 2$$

である。$y_1(a) = y_2(a)$ であるから、$y_1(b) \equiv y_2(b) \mod 2$ となる。γ_2 の基点を 1 だけ上 (もしくは下) にずらす。すると、$\widetilde{\gamma}_2$ の始点と終点は一方が 1 だけ上がり、他は、1 だけ下がる。つまり、$y_2(b) - y_2(a)$ が ± 2 だけ変化する。これを繰り返して、$y_2(b) - y_2(a) = y_1(b) - y_1(a)$ にできる。新しい γ_2 の $\tilde{x}_0$ を始点とする持ち上げ $\widetilde{\gamma}_2$ は $\widetilde{\gamma}_1(b) = \widetilde{\gamma}_2(b)$ をみたす。

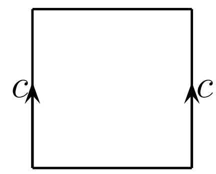
以上より、すべての場合で $\widetilde{\gamma}_1(a) = \widetilde{\gamma}_2(a), \widetilde{\gamma}_1(b) = \widetilde{\gamma}_2(b)$ となった。これらは次のホモトピー σ_t により、端点をとめてホモトピックである:

$$\sigma_t(u) = (1-t)\widetilde{\gamma}_1(u) + t\widetilde{\gamma}_2(u).$$

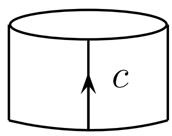
これを M におとせば γ_1 と γ_2 のホモトピーが得られる。 □

6 アニュラス上の正則閉曲線

下の一辺の長さ 1 の正方形 $[0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ において、矢印の向きが合うよう c と c を貼りあわせた図形を**アニュラス**といい、A と書く。

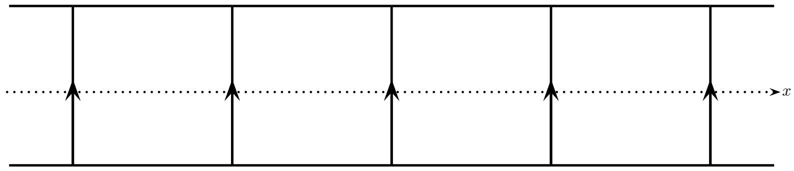


上の図を A の**展開図**と呼ぶ。



上の図は c と c を貼りあわせた図形である。

展開図を左右の方向に無限に貼りあわせたものを A の**普遍被覆**といい、$\widetilde{A}$ で表す。



$\widetilde{A}$ を $(-\infty,\infty)\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset\mathbb{R}^2$ と同一視する。

$\widetilde{A}$ に次のように同値関係 $\sim$ を入れる:

$$(x,y)\sim(x',y')\equiv x-x'\in\mathbb{Z} \text{ かつ } y=y'.$$

商空間 $\widetilde{A}/\sim$ は明らかに A と同一視できる。自然な写像 $\widetilde{A}\to\widetilde{A}/\sim=A$ を p であらわす。

A 上の正則閉曲線 $\gamma:[a,b]\to A$ を考える。点 $x_0=\gamma(a)=\gamma(b)$ のことを γ の**基点**という。写像 p による点 x_0 の逆像たちを、点 x_0 の $\tilde{A}$ への**持ち上げ**という。$\widetilde{x}_0$ を 1 つの持ち上げとする。

このとき、曲線 $\tilde{\gamma}:[a,b]\to\widetilde{A}$ で

(1) $p\circ\tilde{\gamma}=\gamma$

(2) $\widetilde{\gamma}(a)=\widetilde{x}_0$

をみたすものが存在する。この $\tilde{\gamma}$ を $\widetilde{x}_0$ を始点とする γ の $\widetilde{A}$ への**持ち上げ**という。この $\tilde{\gamma}$ を成分を用いて

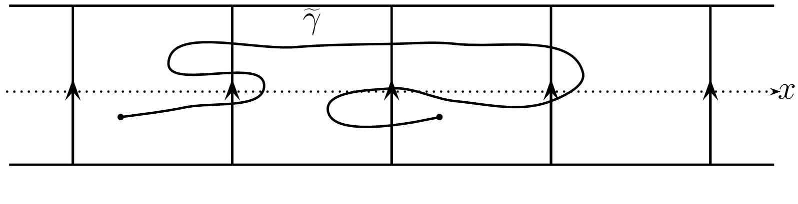
$$\tilde{\gamma}(u)=(x(u),y(u))$$

と表すことにする。

γ と c との**交点数** $I^c(\gamma)$ を γ と c との交点の個数と定める。ただし、γ が c の左から右へ突き抜けるときは $+1$ 個、逆に c の右から左へ突き抜けるときは -1 個と数える。これは、次のように定めることと同じである:

$$I^c(\gamma)=x(b)-x(a)$$

この数 $I^c(\gamma)$ は $\tilde{\gamma}$ のとり方によらないし、γ をホモトピーで変形しても不変である。次の図のような持ち上げをもつ曲線 γ においては、$I^c(\gamma)=2$ である。



次に、γ の**回転数** $W(\gamma)$ を次式で定める。

$$W(\gamma)=i_{\tilde{\gamma}}$$

この数は $\tilde{\gamma}$ のとり方によらない整数である。

命題 6.1. $W(\gamma)$ は γ を正則ホモトピーで変形しても値は変わらない。

証明. γ を正則ホモトピーで変形すると、$\tilde{\gamma}$ も正則ホモトピーで変形される。このとき、$i_{\tilde{\gamma}}$ は常に整数値で連続に変わるので定数でなければならない。 □

定理 6.2. A 上の正則閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to A$ が、正則ホモトピックであるためには、次が成り立つことが必要十分である。

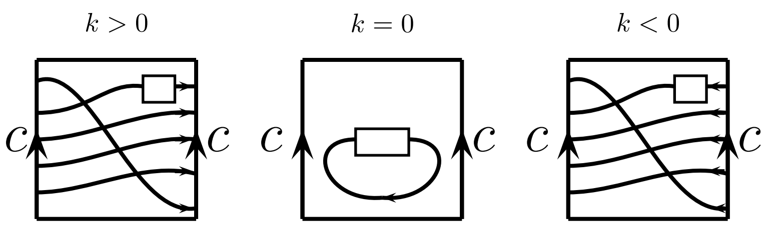
(1) $I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$
(2) $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$

証明. γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックならば I^c のホモトピーの不変性と上の命題より (1)(2) が成り立つ。逆に (1)(2) が成り立つと仮定しよう。γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであることを示そう。そのために次の 3 つの操作を行う。
① 基点を finger move により一致させる。
② 基点での向きをそろえる。
※ ①、② は共に正則ホモトピーによる変形のため γ_1 と γ_2 の回転数はこの操作で不変である。
③ 基点 x_0 の持ち上げ $\widetilde{x}_0$ を固定し、γ_1, γ_2 の $\widetilde{A}$ への持ち上げ $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ で $\tilde{\gamma}_1(a) = \tilde{\gamma}_2(a) = \widetilde{x}_0$ となるものをとる。
(1) の条件より

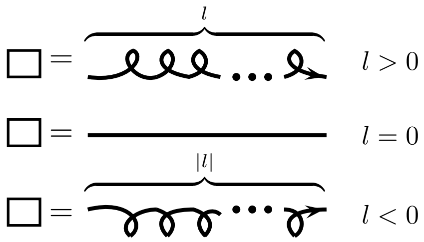
$$\tilde{\gamma}_1(b) - \tilde{\gamma}_1(a) = \tilde{\gamma}_2(b) - \tilde{\gamma}_2(a)$$

がわかる。これと ③ より $\tilde{\gamma}_1(b) = \tilde{\gamma}_2(b)$ であることがわかる。
(2) は $i_{\tilde{\gamma}_1} = i_{\tilde{\gamma}_2}$ であることを意味するから、定理 2.10 より $\tilde{\gamma}_1$ と $\tilde{\gamma}_2$ は端点と端点での向きを止めて正則ホモトピックである。これを p で下に落とせば A 上での γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。 □

交点数 $I^c(\gamma)$ を k とし、回転数 $W(\gamma)$ を m とすると、次のように変形することができる。

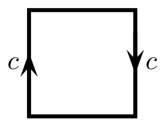


ただし、次の図を l ひねりと呼ぶことにすると、$k \neq 0$ の場合の四角には、m ひねり、$k = 0$ の場合の四角には、$m + 1$ ひねりが入る。

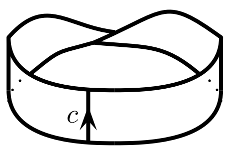


7 メビウスの帯の上の正則閉曲線

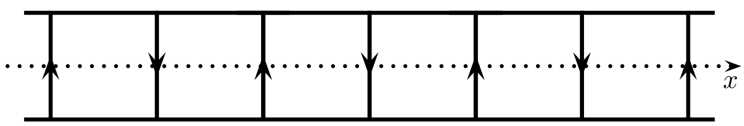
一辺の長さ 1 の正方形 $[0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ を考え、その縦の辺を図の矢印の向きがあうように貼り合わせたものを **メビウスの帯**といい、MB と書く。この正方形を MB の**展開図**とよぶ。縦の線に矢印の向きを与えたものを c とおく。



実際の図形は次の図になる。



また、メビウスの帯の展開図を左右に無限個、矢印がそろうようにつなぎ合わせたものをメビウスの帯の**普遍被覆**といい、$\widetilde{MB}$ と書く。点線は x 軸とする。



$$\widetilde{MB} = [-\infty, \infty] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}^2$$

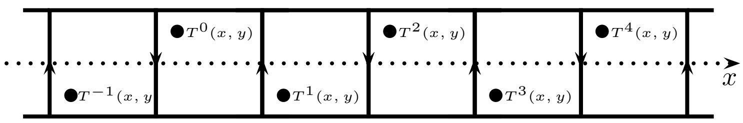
写像 $T : \widetilde{MB} \to \widetilde{MB}$ を次式で定める：

$$T(x, y) = (x + 1, -y).$$

すると、$T^n(x, y)$ は次のように計算でできる：

$$T^n = \begin{cases} T^{2m}(x, y) = (x + 2m, y), \\ T^{2m-1}(x, y) = (x + 2m - 1, -y). \end{cases}$$

$$T^{-1}(x, y) = (x - 1, -y)$$



さて、$\widetilde{MB}$ に次のような同値関係を入れる：

$$T^k(x,y) \sim T^l(x,y) \qquad (k,l \in \mathbb{Z})$$

そして、自然な射影 $\widetilde{MB} \to \widetilde{MB}/\sim$ を p で表す。すると明らかに $\widetilde{MB}/\sim = MB$ である。

MB 上の閉曲線 $\gamma : [a,b] \to MB$ に対して c との**交点数** $I^c(\gamma)$ を γ と c の交点の「個数」として定める。ただし、c の左から右への交叉は $+1$ 個、c の右から左への交叉は -1 個と数える。

例.

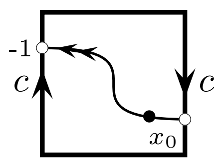


図 3　$I^c(\gamma) = -1$

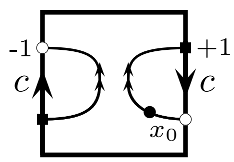


図 4　$I^c(\gamma) = 0$

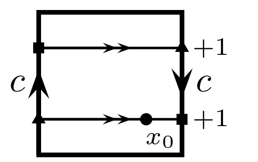


図 5　$I^c(\gamma) = 2$

ここで、γ の基点を $\gamma(a) = x_0$ とし、x_0 の持ち上げ $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{MB}$ を 1 つ固定する。γ の $\widetilde{MB}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to \widetilde{MB}$ $(p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma)$ を $\widetilde{\gamma}(a) = \widetilde{x}_0$ を満たすようにとる。$\widetilde{\gamma}(u)$ の成分表示を $\widetilde{\gamma}(u) = (x(u), y(u))$ とする。このとき、

$$I^c(\gamma) = x(b) - x(a)$$

が成り立つ。

命題 7.1. $I^c(\gamma)$ は γ を正則ホモトピーで変形しても値は不変である。

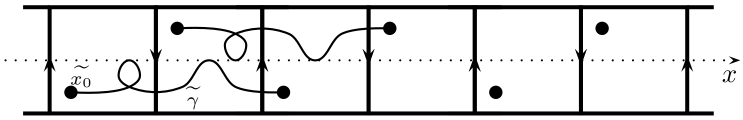
証明. γ の正則ホモトピーは $\widetilde{\gamma}$ の正則ホモトピーに持ち上げることができる。このとき、$x(a), x(b)$ も連続的に変わる。すなわち、$I^c(\gamma)$ も連続的にかわり、値は整数値であるから、$I^c(\gamma)$ は不変である。 □

次に γ の回転数 $W(\gamma)$ を定める。$\widetilde{\gamma}$ を平面曲線と思うとその回転数 $i_{\widetilde{\gamma}} \in \mathbb{Z}$ が定まる。$\widetilde{\gamma}$ を $\widetilde{x}_0$ を基点とする γ の持ち上げとし、その角度関数を $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする。$\widetilde{\gamma}$ の 2 種類の回転数 $i_{\widetilde{\gamma}}, j_{\widetilde{\gamma}}$ を考える。

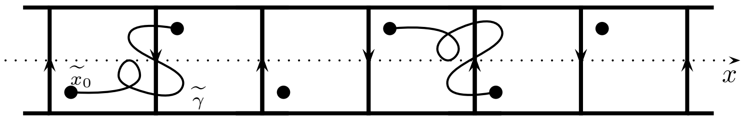
$$i_{\widetilde{\gamma}} = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{R}$$
$$j_{\widetilde{\gamma}} = \frac{\theta(b) + \theta(a)}{2\pi} \quad \bmod 2 \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$$

これらは θ のとり方によらない。たとえば $\theta(u)$ を $\theta(u) + 2\pi$ にとりかえると $\theta(b) - \theta(a)$ は不変で、$\theta(b) + \theta(a)$ は 4π ふえる。ただし、これらは持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ の選び方で符号が変わるかもしれない。

$I^c(\gamma)$ が偶数の時



$I^c(\gamma)$ が奇数の時



$I^c(\gamma)$ が偶数の時、$\widetilde{\gamma}$ の端点での向きは平行であり、$i_{\widetilde{\gamma}}$ は整数となる。ただし、$\widetilde{x}_0$ のとり方により、$i_{\widetilde{\gamma}}$ の値の符号が変わってしまう可能性があることに注意する。$I^c(\gamma)$ が奇数の時、$\widetilde{\gamma}$ の端点での向きは x 軸に関して対称なベクトルであるから、$j_{\widetilde{\gamma}}$ が 2 を法とした整数となる。

定義 7.2. メビウスの帯の正則閉曲線 γ の回転数 $W(\gamma)$ を次のように定める。

(1) $I^c(\gamma)$ が偶数のとき
$$W(\gamma) = |i_{\widetilde{\gamma}}| \in \mathbb{Z}_{\geqq 0} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

(2) $I^c(\gamma)$ が奇数のとき
$$W(\gamma) = \begin{cases} j_{\widetilde{\gamma}} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\} & (I^c(\gamma) > 0)\ , \\ j_{\widetilde{\gamma}} - \overline{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\} & (I^c(\gamma) < 0)\ . \end{cases}$$

命題 7.3. $W(\gamma)$ は $\widetilde{\gamma}$ のとり方によらない。

証明. γ の持ち上げは始点の x 座標が $\mod 1$ ですべて等しい。したがって、x 座標の差はすべて整数である。その差が偶数である持ち上げ同士は互いに平行移動でうつりあう。その差が奇数である持ち上げ同士は x 座標に関する折り返しと平行移動でうつりあう。$\widetilde{\gamma}_1$ と $\widetilde{\gamma}_2$ を γ の 2 つの持ち上げとし、θ_1,θ_2 をそれぞれの角度関数とする。同じグループの場合は $\theta_1(u) = \theta_2(u)$ としてもよい。したがって、$i_{\widetilde{\gamma}_1} = i_{\widetilde{\gamma}_2}$, $j_{\widetilde{\gamma}_1} = j_{\widetilde{\gamma}_2}$ が成り立つ。異なるグループの場合は $\theta_1(u) = -\theta_2(u)$ としてよい。したがって、$i_{\widetilde{\gamma}_1} = -i_{\widetilde{\gamma}_2}$, $j_{\widetilde{\gamma}_1} \equiv -j_{\widetilde{\gamma}_2} \equiv j_{\widetilde{\gamma}_2} \mod 2$ が成り立つ。 □

命題 7.4. $W(\gamma)$ は γ を正則ホモトピーで変形しても値は不変である。

証明. どの場合においても $W(\gamma)$ は $\widetilde{\gamma}$ の取り方によらない。また、整数値である。そして、その値は正則ホモトピーのもとで連続的に変わる。したがって、定数である。 □

定理 7.5. $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to MB$ を MB の正則閉曲線とする。γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであるためには次の 2 条件が成り立つことが必要十分である。

(1) $I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$
(2) $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$

証明. γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックならば上の命題 7.1., 7.4. より (1)(2) が成り立つ。逆に (1)(2) が成り立つと仮定しよう。γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであることを示そう。そのために次の 3 つの操作を行う。

1 曲線を垂直方向に縮めて、展開図の $[0, 1] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ の部分にはいるようにする。

2 基点を finger move により一致させる。

3 基点での向きをそろえる。

※ $1,2,3$ はいずれも正則ホモトピーによる変形のため γ_1 と γ_2 の回転数はこれらの操作で不変である。

基点 x_0 の持ち上げ $\widetilde{x}_0$ を固定し、γ_1, γ_2 の $\widetilde{MB}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ で $\widetilde{\gamma}_1(a) = \widetilde{\gamma}_2(a) = \widetilde{x}_0$ となるものをとる。また、$\widetilde{\gamma}_1(u), \widetilde{\gamma}_2(u)$ を次のように座標を用いてあらわす。

$$\widetilde{\gamma}_1(u) = (x_1(u), y_1(u))$$
$$\widetilde{\gamma}_2(u) = (x_2(u), y_2(u))$$

すると、

$$\widetilde{\gamma}_1(a) = (x_1(a), y_1(a)) = \widetilde{x}_0$$
$$\widetilde{\gamma}_2(a) = (x_2(a), y_2(a)) = \widetilde{x}_0$$

となる。条件 (1) より

$$x_1(b) - x_1(a) = x_2(b) - x_2(a)$$
$$\therefore x_1(b) = x_2(b)$$

垂直線上に x_0 のリフトは 1 つしかないから、$y_1(b) = y_2(b)$ がわかる。したがって、$\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ は端点および端点における向きが一致する。

$I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ が偶数の場合を考える。条件 (2) より、$i_{\widetilde{\gamma}_1} = \pm i_{\widetilde{\gamma}_2}$ がわかる。もし、回転数 $i_{\widetilde{\gamma}_1} = i_{\widetilde{\gamma}_2}$ ならば、定理 2.10 より、$\widetilde{\gamma}_1$ と $\widetilde{\gamma}_2$ は端点と端点における向きを固定して、$\mathbb{R}^2$ の中で正則ホモトピックである。この正則ホモトピーの像は有界であるから、ある正の数 r に対して、$Y = \mathbb{R} \times 0$ の中に含まれる。Y を $\mathbb{R} \times \{\frac{1}{2}\}$ を中心に垂直方向に圧縮し $\widetilde{MB}$ の中に押し込む。ただし、$\mathbb{R} \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ の部分は動かさない。これにより、$\widetilde{\gamma}_1$ と $\widetilde{\gamma}_2$ の $\widetilde{MB}$ の中での正則ホモトピーが得られる。これを p で下に落とせば MB 上での γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。次に、$i_{\widetilde{\gamma}_1} = -i_{\widetilde{\gamma}_2}$ となる場合は、γ_2 を右方向に一周させることにより、γ_2 の上下を逆転させる。新たな γ_2 の持ち上げは上下が逆転し、持ち上げ $\widetilde{\gamma}_2$ をやはり $\widetilde{\gamma}_2(a) = \widetilde{x}_0$ となるようにとると、$i_{\widetilde{\gamma}_2}$ は元の $i_{\widetilde{\gamma}_2}$ と符号が逆転し、$i_{\widetilde{\gamma}_1} = i_{\widetilde{\gamma}_2}$ となる。すると、上記と同様に γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。

次に、$I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ が奇数の場合を考える。条件 (2) から $j_{\widetilde{\gamma}_1} \equiv j_{\widetilde{\gamma}_2} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ がわかる。今 γ を x_0 の周りで局所的に回転して、$\theta_1(a) = \theta_2(a) = 0$ としてもよい。ただし、θ_1, θ_2 は $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ の角度関数である。

$$\frac{\theta_1(b) + 0}{2\pi} \equiv \frac{\theta_2(b) + 0}{2\pi} \mod 2$$

より、次のような整数 k があることがわかる：

$$\theta_1(b) = \theta_2(b) + 4k\pi.$$

さて、γ_2 を x_0 の回りで $2|k|\pi$ だけ局所的に回転する。$\widetilde{\gamma}_2$ は両端でやはり $2|k|\pi$ だけ局所的に回転するが向きは逆向きである。新しい γ_2 の持ち上げ $\widetilde{\gamma}'_2$ の角度関数 θ'_2 は次を満たすとしてよい。

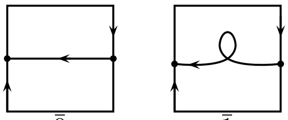
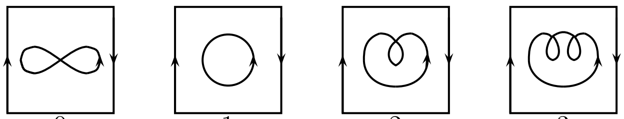
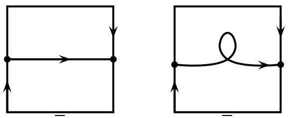
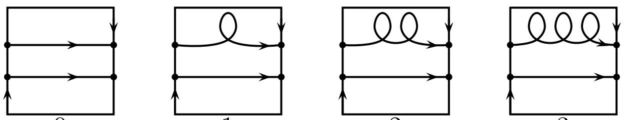
$$\theta'_2(b) = \theta_2(b) + 2k\pi, \quad \theta'_2(a) = \theta_2(a) - 2k\pi = -2k\pi$$

すると、

$$i_{\widetilde{\gamma}'_2} = \frac{\theta_2(b) + 2k\pi - (-2k\pi)}{2\pi} = \frac{\theta_2(b) + 4k\pi}{2\pi} = \frac{\theta_1(b)}{2\pi} = i_{\widetilde{\gamma}_1}$$

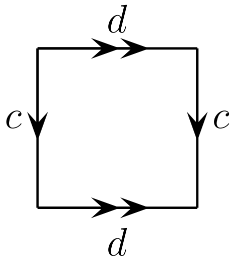
したがって $\widetilde{\gamma}_1$ と $\widetilde{\gamma}'_2$ は端点と端点の向きをとめてホモトピックであり、これより γ_1 と γ_2 の間の正則ホモトピーが得られる。 □

次の表はそれぞれの交点数、回転数にける代表的な正則閉曲線の例である。

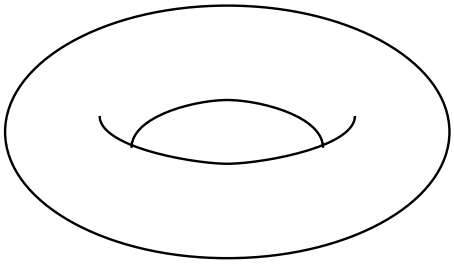
$I^c(\gamma)$		$W(\gamma)$ の値域
-1	 $\bar{0}$ $\bar{1}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
0	 0 1 2 3 $\cdots$	$\mathbb{Z}_{\geqq 0}$
1	 $\bar{0}$ $\bar{1}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2	 0 1 2 3 $\cdots$	$\mathbb{Z}_{\geqq 0}$

8　トーラス上の正則閉曲線

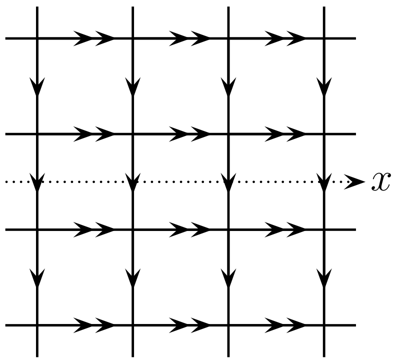
1 辺の長さが 1 の正方形 $[0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ において向かい合う辺を下図の矢印が合うように貼り合わせてできる図形のことを**トーラス**といい、T と書く。また下図のことをトーラスの**展開図**と呼ぶ。



T はドーナッツのような形である。



また、トーラスの展開図を矢印の向きがそろうように無限につなげたものをトーラスの**普遍被覆**といい、$\widetilde{T}$ と書く。以下では $>$、$\gg$ はそれぞれ c、d を表している。



$\widetilde{T}$ の上に同値関係 $\sim$ を次のように定める。

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}\ ,\ y - y' \in \mathbb{Z}$$

すると $\widetilde{T}/\sim$ は自然に T と同一視できる。自然な射影 $\widetilde{T} \to \widetilde{T}/\sim = T$ を p で表す。

トーラス T 上に正則閉曲線 $\gamma : [a, b] \to T$ をとる。γ の基点 $\gamma(a) = \gamma(b)$ を x_0 とする。写像 p による x_0 の逆像たちの中から 1 つを選んでそれを $\widetilde{x}_0$ とかく。γ の $\widetilde{T}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to \widetilde{T}$ で $\widetilde{\gamma}(a) = \widetilde{x}_0$ となるものをとる。$\widetilde{\gamma}$ の端点での向きは同じであるから回転数 $i_{\widetilde{\gamma}}$ は整数である。この回転数 $i_{\widetilde{\gamma}}$ は、γ の持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ の取り方によらない。これを γ の回転数と定め $W(\gamma)$ と書く。

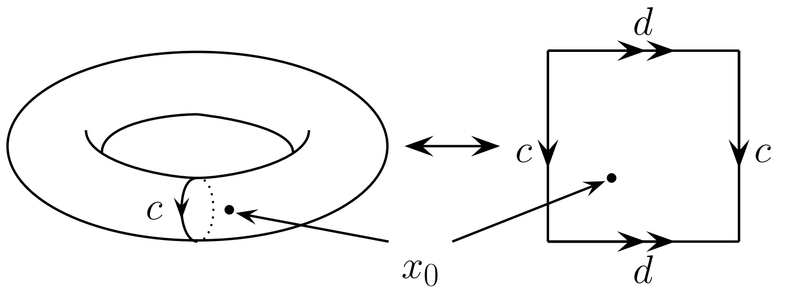
交点数 $I^c(\gamma)$ を γ と c との交点の "個数" と定める。ただし、正方形の図において c の左から c の右への交点は $+1$ 個、c の右から c の左への交点は -1 個と数える。同様に**交点数** $I^d(\gamma)$ を γ と d との交点の "個数" と定め、正方形の図において d の下から d の上への交点は $+1$ 個、d の上から d の下への交点は -1 個と数える。これは、$\widetilde{\gamma}$ を γ の持ち上げとしたとき

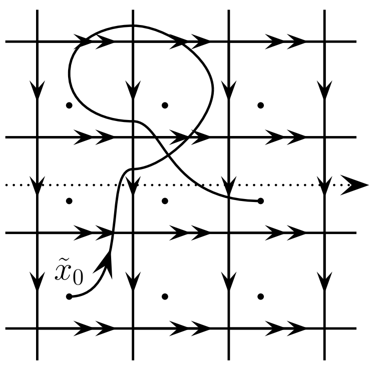
$$(I^c(\gamma), I^d(\gamma)) = \widetilde{\gamma}(b) - \widetilde{\gamma}(a)$$

と定めることと同じである。つまり $\widetilde{\gamma}(u) = (x(u), y(u))$ とすると $I^c(\gamma), I^d(\gamma)$ は

$$I^c(\gamma) = x(b) - x(a) \in \mathbb{Z}$$
$$I^d(\gamma) = y(b) - y(a) \in \mathbb{Z}$$

となることがわかる。





上図のような持ち上げを持つ γ の場合は $I^c(\gamma)=2$、$I^d(\gamma)=1$、$W(\gamma)=1$ となる。

命題 8.1. $I^c(\gamma), I^d(\gamma), W(\gamma)$ は γ を正則ホモトピーで変形しても値は不変である。

証明. $\{\sigma_t\}$ を正則ホモトピーとする。各 σ_t の $\widetilde{T}$ への持ち上げ $\widetilde{\sigma}_t$ をうまくとれば、$\{\widetilde{\sigma}_t\}$ は $\widetilde{T}=\mathbb{R}^2$ の正則曲線のホモトピーとなる。したがって $W(\sigma_t)=i_{\widetilde{\sigma}_t}$ は t の連続関数であり、$(I^c(\sigma_t), I^d(\sigma_t))=\widetilde{\sigma}_t(b)-\widetilde{\sigma}_t(a)$ も t の連続関数である。ところが $I^c(\sigma_t), I^d(\sigma_t), W(\sigma_t)$ はいずれも整数値であるから連続な変化では値は変わらない。 □

定理 8.2. $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b]\to T$ を T の正則閉曲線とする。γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであるためには次の 3 条件が成り立つことが必要十分である。

(1) $I^c(\gamma_1)=I^c(\gamma_2)$
(2) $I^d(\gamma_1)=I^d(\gamma_2)$
(3) $W(\gamma_1)=W(\gamma_2)$

証明. γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックならば上の命題より (1)(2)(3) が成り立つ。逆に (1)(2)(3) が成り立つと仮定しよう。γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであることを示そう。そのために次の 3 つの操作を行う。

① 基点を finger move により一致させる。

② 基点での向きをそろえる。

※ ①、② は共に正則ホモトピーによる変形のため γ_1 と γ_2 の回転数はこの操作で不変である。

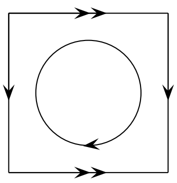
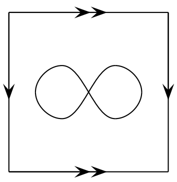
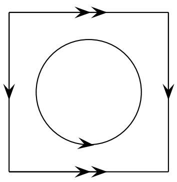
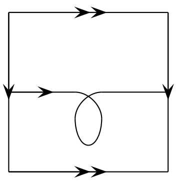
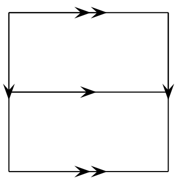
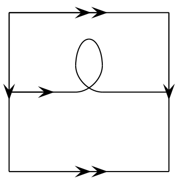
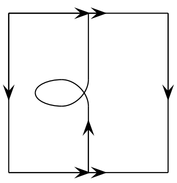
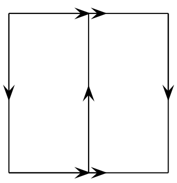
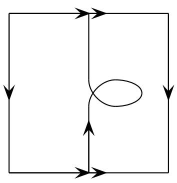
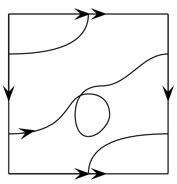
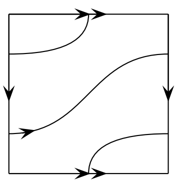
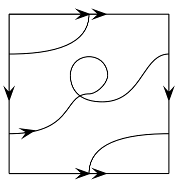
③ 基点 x_0 の持ち上げ $\widetilde{x_0}$ を固定し、γ_1, γ_2 の $\widetilde{T}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ で $\widetilde{\gamma}_1(a)=\widetilde{\gamma}_2(a)=\widetilde{x}_0$ となるものをとる。

(1)(2) の条件より

$$\widetilde{\gamma}_1(b) - \widetilde{\gamma}_1(a) = \widetilde{\gamma}_2(b) - \widetilde{\gamma}_2(a)$$

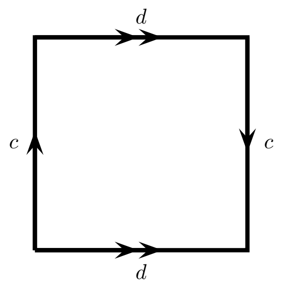
がわかる。これと ③ より $\widetilde{\gamma}_1(b) = \widetilde{\gamma}_2(b)$ であることがわかる。
(3) は $i_{\widetilde{\gamma}_1} = i_{\widetilde{\gamma}_2}$ であることを意味するから、定理 2.10 より $\widetilde{\gamma}_1$ と $\widetilde{\gamma}_2$ は端点と端点での向きを止めて正則ホモトピックである。これを p で下に落とせば T 上での γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。 □

次の表はそれぞれの交点数、回転数における代表的な正則閉曲線の例である。

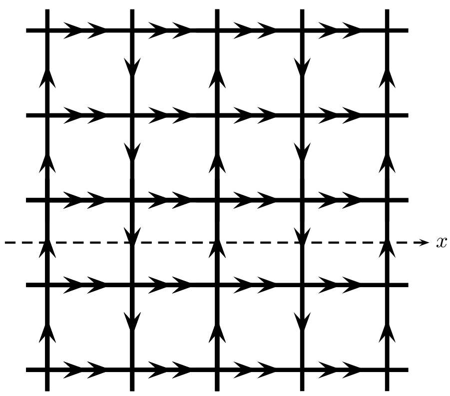
I^c	I^d	回転数の値域
0	0	$\cdots$  -1  0  1 $\cdots$
1	0	$\cdots$  -1  0  1 $\cdots$
0	1	$\cdots$  -1  0  1 $\cdots$
2	1	$\cdots$  -1  0  1 $\cdots$

9　クラインの壺の上の正則閉曲線

一辺の長さ 1 の正方形 $[0,1]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ を考え、その縦と横の辺を図の矢印の向きがあうように貼り合わせたものを**クラインの壺**といい、KB と書く。この正方形を KB の**展開図**とよぶ。縦の線に矢印の向きを与えたものを c、横の線に矢印の向きを与えたものを d とおく。



また、KB の展開図を上下左右に無限個矢印がそろうようにつなぎ合わせたものを KB の**普遍被覆**といい、$\widetilde{KB}$ と書く。



$\widetilde{KB}$ の点 $\widetilde{x}$ に対し、その点の属す展開図 (正方形) の辺を張り合わせて KB を作り、$\widetilde{x}$ に対する KB の点を x とする。$\widetilde{x}$ に x を対応させる写像を $p:\widetilde{KB}\to KB$ と表す。

KB 上の閉曲線 $\gamma:[a,b]\to KB$ に対し c との**交点数** $I^c(\gamma)$ を γ と c の交点の「個数」として定める。ただし、c の左から右への交叉は $+1$ 個、c の右から左への交叉は -1 個と数える。

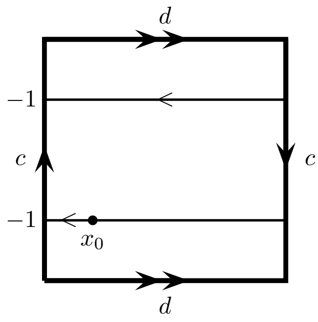


図 6　$I^c(\gamma) = -2$

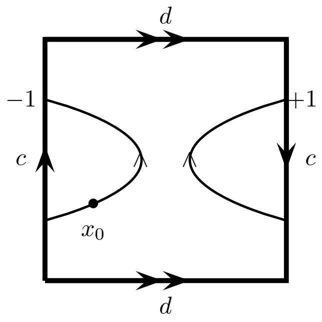


図 7　$I^c(\gamma) = 0$

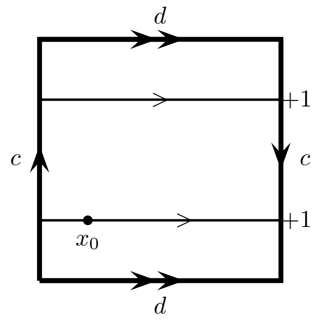


図 8　$I^c(\gamma) = +2$

ここで γ の基点を x_0 とし、x_0 の持ち上げ $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{KB}$ を 1 つ固定する。γ の $\widetilde{KB}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to \widetilde{KB}$ $(p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma)$ を $\widetilde{\gamma}(a) = \widetilde{x}_0$ となるようにとる。$\widetilde{\gamma}(u)$ の成分表示を $\widetilde{\gamma}(u) = (x(u), y(u))$ とする。このとき、$I^c(\gamma) = x(b) - x(a)$ が成り立つ。

d との**交点数** $I^d(\gamma)$ を次のように定める:

$$I^d(\gamma) = \begin{cases} |y(b) - y(a)| \in \mathbb{Z}_{\geqq 0} & (I^c(\gamma) \text{ が偶数のとき}) \ , \\ y(b) + y(a) \mod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (I^c(\gamma) \text{ が奇数のとき}) \ . \end{cases}$$

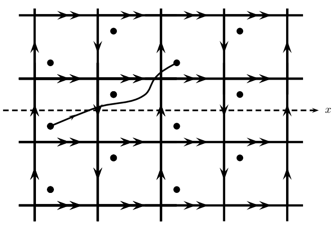


図 9　$I^d(\gamma) = 1$

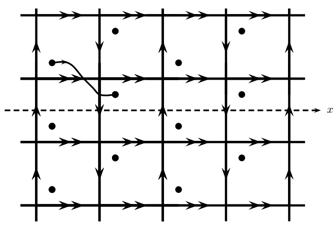


図 10　$I^d(\gamma) = \overline{1}$

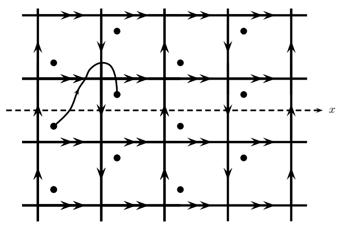


図 11　$I^d(\gamma) = \overline{0}$

命題 9.1. γ を正則ホモトピーで変えても $I^c(\gamma)$,$I^d(\gamma)$ の値は変わらない。

証明. γ が正則ホモトピーで変形されると、$\widetilde{\gamma}$ も正則ホモトピーで変形される。従って $x(a), x(b)$ も連続的に変わる。すなわち $I^c(\gamma)$, $I^d(\gamma)$ は連続的にかわり、値は離散的であるから、$I^c(\gamma)$,$I^d(\gamma)$ は不変である。 □

次に γ の**回転数** $W(\gamma)$ を定める。

$\widetilde{\gamma}$ を $\widetilde{x}_0$ を基点とする γ の持ち上げとし、その角度関数を $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする。メビウスの帯のときと同様に、$\widetilde{\gamma}$ の 2 種類の回転数 $i_{\widetilde{\gamma}}$, $j_{\widetilde{\gamma}}$ を考える。

$$i_{\widetilde{\gamma}} = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \ \in \mathbb{R}$$

$$j_{\widetilde{\gamma}} = \frac{\theta(b) + \theta(a)}{2\pi} \mod 2 \ \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$$

$I^c(\gamma)$ が偶数のとき、$\widetilde{\gamma}$ の端点での向きは平行であり、$i_{\widetilde{\gamma}}$ は整数となる。しかし、この $i_{\widetilde{\gamma}}$ は $\widetilde{x}_0$ のとり方により符号が変わる可能性がある。$I^c(\gamma)$ が奇数のとき、$\widetilde{\gamma}$ の端点での向きは x 軸に関して対称なベクトルであるから、$j_{\widetilde{\gamma}}$ が 2 を法とした整数となる。

定義 9.2. $W(\gamma)$ を次のように定める。

(1) $I^c(\gamma)$ が偶数のとき

$$W(\gamma)=\begin{cases} i_{\widetilde{\gamma}}\in\mathbb{Z} & (y(b)>y(a))\ ,\\ |i_{\widetilde{\gamma}}|\in\mathbb{Z}_{\geqq 0} & (y(b)=y(a))\ ,\\ -i_{\widetilde{\gamma}}\in\mathbb{Z} & (y(b)<y(a))\ .\end{cases}$$

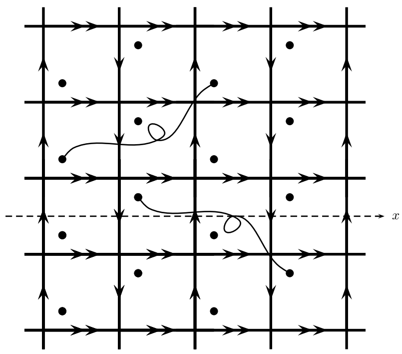
(2) $I^c(\gamma)$ が奇数のとき

$$W(\gamma)=\begin{cases} j_{\widetilde{\gamma}}\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\overline{0},\overline{1}\} & (I^c(\gamma)>0)\ ,\\ j_{\widetilde{\gamma}}-\overline{1}\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\overline{0},\overline{1}\} & (I^c(\gamma)<0)\ .\end{cases}$$

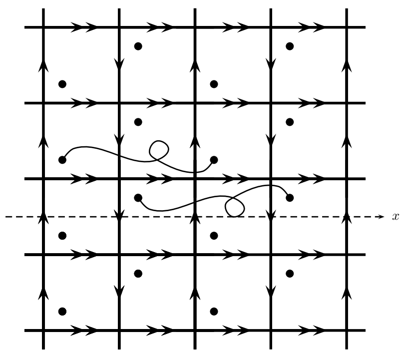
命題 9.3. $W(\gamma)$ は $\widetilde{\gamma}$ のとり方によらない。

証明.

(1) $y(b)\neq y(a)$ の場合、γ の持ち上げで $y(b)>y(a)$ をみたすものたちは、$y(b)>y(a)$ をみたす持ち上げを x 軸に関して折り返した形をしており、i では $y(b)>y(a)$ をみたすものの i の符号を変えたものになっている。したがって、この場合どの持ち上げを選んでも $W(\gamma)$ は同じものになる。



$y(b)=y(a)$ の場合も、持ち上げは 2 種類に分かれ、一方の持ち上げは他方の持ち上げの鏡像になっており、i の値は符号が逆になっている。しかし絶対値をとると等しい。



(2) $I^c(\gamma)$ が奇数のときは、MB のときと同様である。 $\square$

命題 9.4. γ を正則ホモトピーで変えても $W(\gamma)$ の値は変わらない。

証明. $W(\gamma)$ の計算は持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ のとり方によらないから、1 つの $\widetilde{\gamma}$ に注目する。γ が正則ホモトピーで連続的に変形されると、$\widetilde{\gamma}$ も正則ホモトピーで連続的に変形される。従って $y(a), y(b)$ も連続的に変わる。$I^c(\gamma)$ が偶数のとき、$y(b) - y(a)$ は必ず整数値をとるので、正則ホモトピーによる変形のもとで不変である。また、このとき $i_{\widetilde{\gamma}}$ も連続的に変わり、しかも整数値であるから不変である。したがって、$W(\gamma)$ は不変である。また $I^c(\gamma)$ が奇数のとき、$W(\gamma) = j_{\widetilde{\gamma}}$ もしくは $j_{\widetilde{\gamma}} - \overline{1}$ は連続的に変わり、しかも値は $\{\overline{0}, \overline{1}\}$ と離散的であるから、不変である。 □

定理 9.5. γ_1 , γ_2 : $[a, b] \to KB$ を KB の正則閉曲線とする。γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであるためには次の 3 条件が成り立つことが必要十分である。

(1) $I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$

(2) $I^d(\gamma_1) = I^d(\gamma_2)$

(3) $W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$

証明. γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックならば命題 9.1 と命題 9.3 より (1)(2)(3) が成り立つ。逆に (1)(2)(3) が成り立つと仮定したときに γ_1 と γ_2 が正則ホモトピックであることを示す。そのために次の 3 つの操作を行う。

① 基点を finger move により一致させる。

② 基点での向きを $(1, 0)$ にそろえる。

※ ①、② は共に正則ホモトピーによる変形のため γ_1 と γ_2 の回転数、c,d との交点数は不変である。

基点 x_0 の持ち上げ $\widetilde{x}_0$ を固定し、γ_1, γ_2 の $\widetilde{KB}$ への持ち上げ $\widetilde{\gamma}_1$, $\widetilde{\gamma}_2$ で $\widetilde{\gamma}_1(a) = \widetilde{\gamma}_2(a) = \widetilde{x}_0$ となるものをとる。また、$\widetilde{\gamma}_1(u)$, $\widetilde{\gamma}_2(u)$ を次のように座標を用いて表す。

$$\widetilde{\gamma}_1(u) = (x_1(u), y_1(u))$$

$$\widetilde{\gamma}_2(u) = (x_2(u), y_2(u))$$

すると、

$$\widetilde{\gamma}_1(a) = (x_1(a), y_1(a)) = \widetilde{x}_0$$

$$\widetilde{\gamma}_2(a) = (x_2(a), y_2(a)) = \widetilde{x}_0$$

となる。条件 (1) より

$$x_1(b) - x_1(a) = x_2(b) - x_2(a)$$

$$\therefore x_1(b) = x_2(b)$$

まず、$I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ が偶数の場合を考える。条件 (2) より、

$$y_1(b) - y_1(a) = \pm(y_2(b) - y_2(a))$$

がわかる。

$$y_1(b) - y_1(a) = -(y_2(b) - y_2(a)) \cdots (*)$$

のときは、γ_2 を水平方向に一周動かす。基点が元の位置 x_0 にもどってきたとき新しい γ_2 を γ_2' と書くことにすると、γ_2' は γ_2 と比べて上下が逆転している。元の $\widetilde{\gamma_2}$ と $\widetilde{x}_0$ を始点とする γ_2' の持ち上げ $\widetilde{\gamma_2}'$ とは水平な直線に関して対称である。すなわち、

$$y_2'(b) - y_2'(a) = -(y_2(b) - y_2(a))$$

が成り立つ。$(*)$ より、

$$y_1(b) - y_1(a) = y_2'(b) - y_2'(a)$$

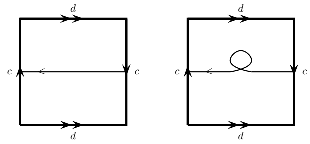
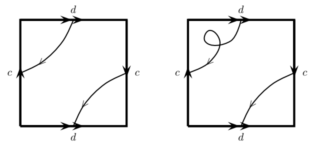
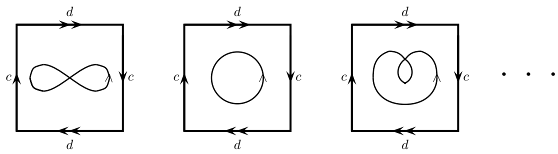
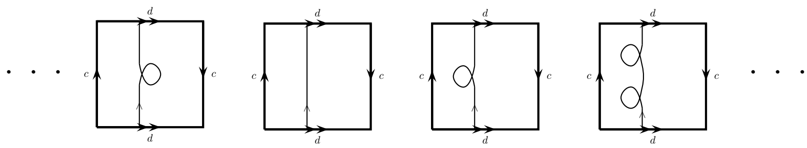
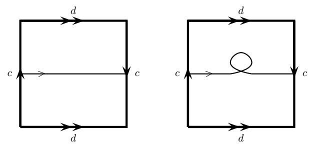
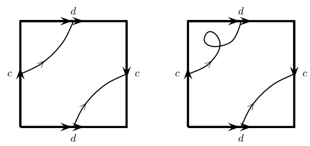
となり、$y_1(b) = y_2'(b)$ がわかる。よって、$\widetilde{\gamma_1}(b) = \widetilde{\gamma_2}'(b)$ となる。この場合 γ_2' を新たに γ_2 と思えば $\widetilde{\gamma_1}(b) = \widetilde{\gamma_2}(b)$ と思ってよい。条件 (3) より、$y_1(b) \neq y_1(a)$ のときは、$i_{\widetilde{\gamma_1}} = i_{\widetilde{\gamma_2}}$ がわかる。もし $y_1(b) = y_1(a)$ のときは、$i_{\widetilde{\gamma_1}} = \pm i_{\widetilde{\gamma_2}}$ がわかる。もし $i_{\widetilde{\gamma_1}} = -i_{\widetilde{\gamma_2}}$ となる場合は、γ_2 を右方向に一周させる。新たな γ_2 の持ち上げは上下が逆転し、持ち上げ $\widetilde{\gamma_2}$ をやはり $\widetilde{\gamma_2}(a) = \widetilde{x}_0$ となるようにとると、$i_{\widetilde{\gamma_2}}$ は元の $i_{\widetilde{\gamma_2}}$ と符号が逆転し、$i_{\widetilde{\gamma_1}} = i_{\widetilde{\gamma_2}}$ となる。すると、上記と同様に γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。以上より、$i_{\widetilde{\gamma_1}} = i_{\widetilde{\gamma_2}}$ としてよい。すると定理 2.10 により、$\widetilde{\gamma_1}$ と $\widetilde{\gamma_2}$ は端点と端点における向きを固定して正則ホモトピックである。これを p で下に落とせば KB 上での γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。

$I^c(\gamma_1) = I^c(\gamma_2)$ が奇数の場合は、

$$y_1(b) + y_1(a) \equiv y_2(b) + y_2(a) \mod 2$$

である。$y_1(a) = y_2(a)$ であるから、$y_1(b) \equiv y_2(b) \mod 2$ となり、ある整数 k に対して、$y_1(b) = y_2(b) + 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ となる。γ_2 の基点を 1 だけ上 (もしくは下) にずらす。すると、$\widetilde{\gamma_2}$ の始点と終点は一方が 1 だけ上がり、他方は 1 だけ下がる。つまり、$y_2(b) - y_2(a)$ が ± 2 だけ変化する。これを k 回繰り返すと、$y_2(b) - y_2(a) = y_1(b) - y_1(a)$ にできる。新しい γ_2 の $\widetilde{x}_0$ を始点とする持ち上げ $\widetilde{\gamma_2}$ は $\widetilde{\gamma_1}(b) = \widetilde{\gamma_2}(b)$ をみたす。以上より、$\widetilde{\gamma_1}(a) = \widetilde{\gamma_2}(a), \widetilde{\gamma_1}(b) = \widetilde{\gamma_2}(b)$ となる。条件 (3) より、$i_{\widetilde{\gamma_1}} \equiv i_{\widetilde{\gamma_2}} \mod 2$ が分かる。もし、回転数 $i_{\widetilde{\gamma_1}} = i_{\widetilde{\gamma_2}}$ ならば、偶数のときと同様に KB 上での γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。基点のまわりで γ_2 を局所的に一回転させて正則閉曲線 γ_2' をつくる。これは正則ホモトピックによる変形である。すると、$\widetilde{KB}$ では、$\widetilde{\gamma_2}$ の端点が端点の近傍で一回転して新しい持ち上げ $\widetilde{\gamma_2'}$ を得る。このとき、両端点における回転は互いに逆向きであることに注意する。すると、$i_{\widetilde{\gamma_2'}} = i_{\widetilde{\gamma_2}} \pm 2$ となる。この $\pm$ の符号は γ_2 を基点のまわりで回転する向きを選ぶことによって、好きな方を選ぶことが出来る。これを何度も使うことにより、はじめから $i_{\widetilde{\gamma_1}} = i_{\widetilde{\gamma_2}}$ を仮定することができる。したがって、定理 2.10 より、$\widetilde{\gamma_1}$ と $\widetilde{\gamma_2}$ は端点と端点における向きを固定して正則ホモトピックである。これを p で下に落とせば KB 上での γ_1 と γ_2 の正則ホモトピーが得られる。 □

次の表はそれぞれの交点数、回転数における代表的な正則閉曲線の例である。

$I^c(\gamma)$	$I^d(\gamma)$	各回転数に対する代表例	$W(\gamma)$ の値域
-1	$\overline{0}$	 $\overline{0}$ $\overline{1}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
-1	$\overline{1}$	 $\overline{0}$ $\overline{1}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
0	0	 0 1 2	$\mathbb{Z}_{\geqq 0}$
0	1	 -1 0 1 2	$\mathbb{Z}$
1	$\overline{0}$	 $\overline{0}$ $\overline{1}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
1	$\overline{1}$	 $\overline{0}$ $\overline{1}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

参考文献

[1] D. R. J. Chillingworth, Winding numbers on surfaces, I., *Math. Ann.* **196** (1972) 218–249.

[2] B. L. Reinhart, The winding numbers on two manifolds, *Annales de l'institut Fourier* **10** (1960) 271–283.

[3] S. Smale, Regular curves on riemannian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958) 492–512.

[4] 梅原雅顕, 山田光太郎, 曲線と曲面—微分幾何的アプローチー, 裳華房, Tokyo, 2002.

[5] H. Whitney, On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.* **4** (1937) 276–284.