

結び目と帯

岡山理科大学 理学部 基礎理学科

幾何学ゼミ

担当教授	山崎	正之
S03S034	金井	理恵
S03S051	白石	睦美
S03S064	中場	圭佑
S03S081	米谷	隆伸

目次

0	導入	2
1	絡み目と絡み数	4
2	ザイフェルト曲面	11
3	帯とその絡み数	14
4	メビウスの帯の切断	17
5	交差交換を許す変形	20
6	コンウェイ多項式	24
7	コンウェイ多項式の性質と計算例	32
A	平面曲線の回転数	35

0 導入

我々は結び目、絡み目、帯についての研究を行った。

結び目とは、空間 \mathbb{R}^3 内の多辺形をいい、絡み目とは、空間内の互いに共有点を持たない μ 個の結び目 K_1, K_2, \dots, K_μ からなる図形 $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_\mu$ をいう。

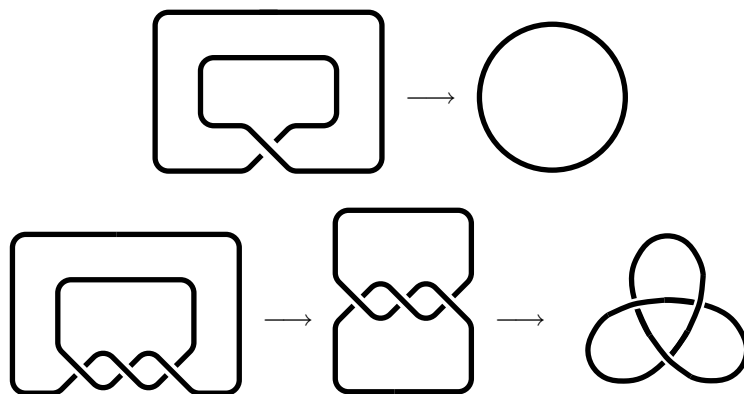
絡み目に対しては、絡み数という不変量が定まり、絡み数が違えば違うものであることがわかる。

結び目には絡み数というものはないが、代わりにコンウェイ多項式と呼ばれる不変量を導入する。例えば、平凡な結び目のコンウェイ多項式は1、三葉結び目のコンウェイ多項式は $1 + z^2$ である。したがって、2つは違うものであることがわかる。

また、どんな結び目、絡み目も交差交換を許せば平凡なものに変形できることがわかる。このことはコンウェイ多項式の計算をするときに役に立つ。

帯とは、中心線が結び目であり、それに一定の幅を付けたものである。帯に対しては、絡み数というものが定義できる。その帯の絡み数とその帯のふち同士または中心線とふちの絡み数の関係を調べた。また、帯において交差交換を許すとき、リボンの場合は $+\frac{1}{2}$ のねじれが0個または2個の帯に変形でき、メビウスの帯の場合には $+\frac{1}{2}$ のねじれが1個または3個の帯に変形できることがわかる。

メビウスの帯を半分に切るとリボンが得られる。その得られるリボンの中心線は元のメビウスの帯の境界がつくる結び目であり、この結び目には、平凡になるものや三葉結び目になるものなどいろいろある。



この結び目が平凡になるのは上図の上の図と、その図の交差の部分の上下を入れ換えたものの2つの場合のみである。この証明には、コンウェイ多項式を用いる。

付録として、平面の閉曲線の交差を許す変形について調べた。この場合には、回転数と呼ばれる不変量が存在し、それにより分類が行われる。

第1節(白石、米谷担当)では、結び目、絡み目の定義を行い、絡み数の概念を導入する。第2節(白石担当)では、ザイフェルト曲面の定義を行い、交点数と絡

み数の関係について述べる。第3節(金井担当)では、帯の定義を行い、帯の絡み数について述べる。第4節(金井、中場担当)では、メビウスの帯とそれを中心線で半分に切って得られるリボンのそれぞれの絡み数についての関係について述べ、またメビウスの帯の中心線と境界との関係について述べる。第5節(金井担当)では、結び目、絡み目、帯においての交差交換を許す変形(正則ホモトピー)について述べる。第6節(米谷、中場、白石担当)では、コンウェイ多項式の定義といくつかの具体例の計算を行う。第7節(米谷、白石担当)では、コンウェイ多項式の性質と一般的な計算方法を述べ、トーラス結び目、トーラス絡み目などにおける計算例を示す。付録A(金井担当)では、平面曲線の回転数の定義を行い、正則ホモトピーによる分類について述べる。

1 絡み目と絡み数

この節では、[4]の第1~3章に従って結び目・絡み目の定義を行う。そして、向きを付けた絡み目及び有向絡み目を考え、それに対して絡み数という重要な概念を導入する。

定義 1.1. (1) 空間 \mathbb{R}^3 内の多辺形を結び目 (knot) という。

(2) 空間内の互いに共有点を持たない μ 個の結び目 K_1, K_2, \dots, K_μ からなる図形

$$L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_\mu$$

を絡み目 (link) といい、 K_1, K_2, \dots, K_μ をその成分という。

一般に、絡み目 L について、 $\mu(L)$ でその成分の個数を表す。

また、一般論をする際には、結び目は1成分の絡み目とも考える。

定義 1.2. (1) 自然な平行射影

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

を定めると、空間内の絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ について、その像

$$p(L) = p(K_1 \cup \dots \cup K_\mu)$$

は、平面 \mathbb{R}^2 上の μ 個の閉折線となる。

点 $q \in p(L)$ について、 $p^{-1}(q) \cap L$ の点の個数を、点 q の次数という。

一般に次数が2以上の点を多重点といい、特に次数が2の点を2重点、次数が3の点を3重点、... などという。

(2) 次の2つの条件をを満たす絡み目 L は、(p に関して) 正則の位置にある (in regular position) という：

(イ) $p(L)$ の多重点は、高々有限個の2重点のみである。

(ロ) 多辺形 L の頂点の像は、 $p(L)$ の2重点にはならない。

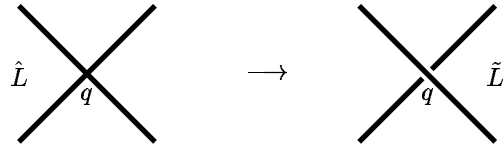
定義 1.3. $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ を正則の位置にある絡み目とする。

(1) 平行射影 p による L の像 $p(L) = \hat{L}$ を、 L の正則射影像 (regular projection) (以下簡単に射影像) という。

射影像 \hat{L} は、平面上の μ 個の閉折線で、高々有限個の2重点を持ち、その頂点は2重点ではないような図形である。 \hat{L} の2重点全体の集合を $\mathcal{D}(\hat{L})$ で表す。

(2) 2重点 $q \in \mathcal{D}(\hat{L})$ は L の2つの辺の内点である。これらの辺に写る L の2辺と直線 $p^{-1}(q)$ との交点のうちで、 z 座標の大きい方の点を上交差点、小さい方の点を下交差点という。

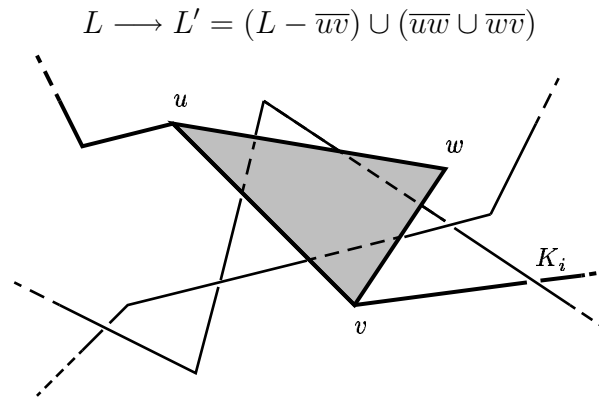
射影像 \hat{L} の各2重点において、下交差点を含む辺に対応する辺に下図のように切れ目を入れ、空間的な感じを出した平面上の図 \tilde{L} を、絡み目 L の正則表示 (regular diagram) という。



(3) \hat{L} の 2 重点に対する正則表示 \tilde{L} の点を交差点 (crossing point) とよび、 \hat{L} の交差点全体の集合を $\mathcal{D}(\tilde{L})$ で表す。

また、 \hat{L} の 2 重点の個数を $c(\hat{L})$ 、 \tilde{L} の交差点の個数を $c(\tilde{L})$ で表す。

定義 1.4. (1) $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ を \mathbb{R}^3 内の絡み目とする。 \overline{uv} を L のある成分の 1 辺とし、 $\Delta = \Delta uvw$ を \mathbb{R}^3 内の 3 角形で、 $\Delta \cap L = \overline{uv}$ とする。ここで、 L の辺 \overline{uv} を Δ の他の 2 辺 $\overline{uw} \cup \overline{vw}$ で置き換えて得られる絡み目を L' とする：



このとき、 L' は L から Δ 移動 (Δ -move) で得られたという。

逆に、3 角形の 2 辺 $\overline{uw} \cup \overline{vw}$ を残りの辺 \overline{uv} に置き換える変形も考えて、 L は L' から Δ 移動で得られたという。

(2) 2 つの絡み目 L と L' に対して、絡み目の有限列

$$L = L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n = L'$$

が存在して、 L_i が L_{i-1} から Δ 移動で得られるとき、 L と L' は同型であるといい、 $L \cong L'$ で示す。

同型 \cong という関係は、絡み目の集合において明らかに同値関係で、各同値類を絡み目型 (link type) という。特に、結び目の場合は結び目型 (knot type) という。絡み目 L の絡み目型を $[L]$ で示す。

絡み目型全体の集合を \mathcal{L} で表し、各自然数 μ について μ 成分の絡み目型全体の集合を \mathcal{L}_μ で表す。特に、 \mathcal{L}_1 を \mathcal{K} で表す。

(3) 平面 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上の互いに共有点を持たない μ 個の多边形 $J_1 \cup \dots \cup J_\mu$ も、自然に空間内の図形とみなすと μ 成分の絡み目となる。平面上の多边形 $J_1 \cup \dots \cup J_\mu$ と同型な絡み目を平凡 (trivial) であるといい、その絡み目型を平凡型 (trivial type) という。 μ 成分の平凡な絡み目を特に O_μ で示す。

定義 1.5. 絡み目型 $[L]$ の正則の位置にある代表元 L の全てに関して、交差点の個数 $c(\tilde{L})$ の最小値を $c[L]$ で表し、 $[L]$ の最小交差数 (minimum crossing number) という。 $c(\tilde{L}) = c[L]$ となる正則表示 \tilde{L} を $[L]$ の最小正則表示という。

定義 1.6. (1) 結び目 K の向き (orientation) とは、多边形である K に沿って 1 周する方向のことで、表示に際して下図のように辺に矢印をつけて示す。

従って、結び目 K に対する向きの指定の仕方は 2 通りある。



向きを指定した結び目を有向結び目 (oriented knot) という。

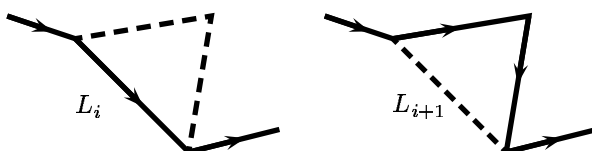
一般に、 μ 成分の絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ の向きとは、その全ての成分の向きのことで、全ての成分の向きを指定した絡み目を有向絡み目 (oriented link) という。

μ 成分の絡み目 L に対する向きの指定の仕方は 2^μ 通りある。

(2) 2つの有向絡み目 L と L' が有向同型であるとは、 L と L' が向きも込めて同型になるときをいう；つまり、有向絡み目の有限列

$$L = L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n = L'$$

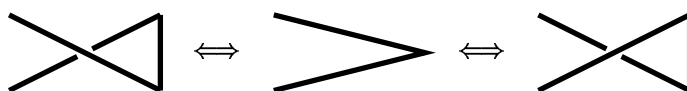
が存在して、 L_i は L_{i-1} から Δ 移動で得られ、その向きは L_{i-1} の向きから自然に誘導されるときをいい、 $L \approx L'$ で示す。

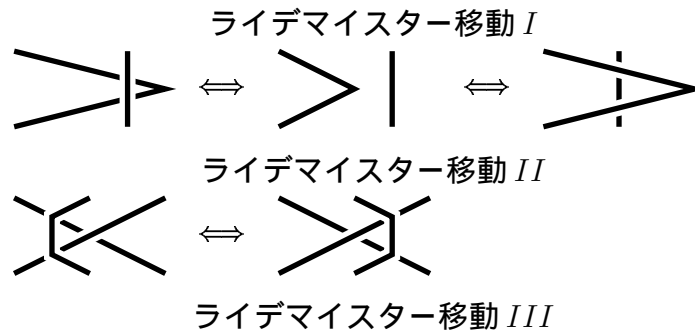


有向同型 \approx という関係は、有向絡み目の集合において同値関係になり、各同値類を有向絡み目型 (oriented link type) (有向結び目型、oriented knot type) という。有向絡み目 L の有向絡み目型を $[L]$ で示す。

有向絡み目型全体の集合を \mathcal{L}^+ で表す。また μ 成分の有向絡み目型全体の集合を \mathcal{L}_μ^+ で表す。特に、 \mathcal{L}_1^+ を \mathcal{K}^+ で表す。

定義 1.7. 絡み目の正則表示において、次に図示する 3 種の局所的な変形を、ライデマイスター移動あるいは基本変形という。





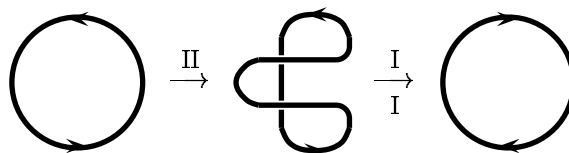
これらの変形はいずれも正則の位置にある絡み目に対して、有限回の Δ 移動で実現されるので、絡み目型を変えないが、さらに次の定理が成り立つことが知られている。

定理 1.8. L と L' を、正則の位置にある絡み目とする。 L と L' が同型であるための必要十分条件は、正則表示 \tilde{L} に有限回のライデマイスター移動と、必要ならば平面 \mathbb{R}^2 上での有限回の Δ 移動を施すことによって、正則表示 \tilde{L}' を得ることである。

定義 1.9. 有向絡み目 L の全ての成分の向きを反対にしたものを $-L$ で表す。

有向絡み目 L および $[L]$ は、 $L \approx -L$ となるとき、可逆的 (invertible) であるという。

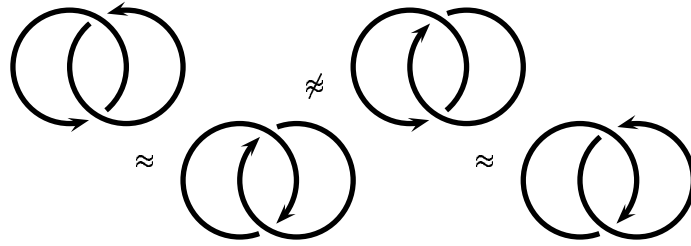
例. (1) 平凡な結び目 O に向きを指定したものは可逆的である。従って、一般に平凡な μ 成分の絡み目 O_μ に向きを指定したものは、すべて可逆的で、互いに有向同型である。そこで、 O_μ に向きを指定した絡み目も平凡といい、その有向同型類を平凡型という。



(2) 三葉結び目に向きを指定したものは、いずれも可逆的である。これも裏側から見た正則表示と比べると明らかである。



(3) Hopf 絡み目に向きを指定したものは、いずれも可逆的である。



定義 1.10. $L = K_1 \cup K_2$ を 2 成分の有向絡み目とし、正則の位置にあるとする。このとき、 $\mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ によって、 $\tilde{L} = \tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$ の全交差点の集合 $\mathcal{D}(\tilde{L})$ の部分集合で、 K_1 の辺と K_2 の辺とでできる交差点全体の集合を表す。

各交差点 $q \in \mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ に対して、下図の規則によって、 $+1$ と -1 のいずれかの符号 $\varepsilon(q)$ を対応させる。



このとき、

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{q \in \mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)} \varepsilon(q) \right) = lk(K_2, K_1)$$

を、 K_1 と K_2 の絡み数 (linking number) という。 $\mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ の点は偶数個だから、絡み数は必ず整数である。また、ここで $\frac{\varepsilon(q)}{2}$ を点 q における絡み数と呼ぶ。

注意. K_2 が複数の成分の絡み目であるときも同様に絡み数 $lk(K_1, K_2)$ が定義できる。

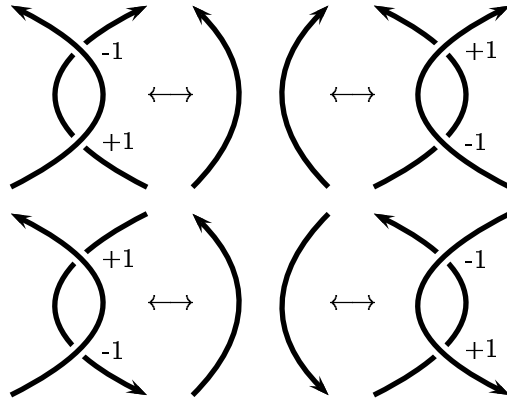
定理 1.11. $L = K_1 \cup K_2$, $L' = K'_1 \cup K'_2$ を 2 成分の有向絡み目とする。

$$L \approx L' \implies lk(K_1, K_2) = lk(K'_1, K'_2).$$

証明. 絡み数がライデマイスター移動のもとで不変であること、つまり、 \tilde{L} が一度のライデマイスター移動で \tilde{L}' に移るときに、定理を証明すればよい。

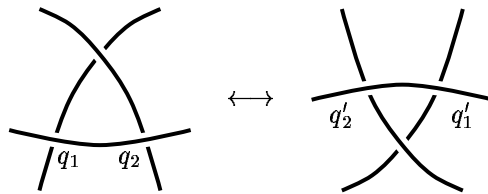
(i) ライデマイスター移動 I では、 $\mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = \mathcal{M}(\tilde{K}'_1, \tilde{K}'_2)$ である。

(ii) ライデマイスター移動 II では、向きの指定の仕方は次の図で示す 2 通りで代表されるが、この部分が同じ成分ならば $\mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = \mathcal{M}(\tilde{K}'_1, \tilde{K}'_2)$ であり、異なる成分ならば部分的に符号の和が 0 になり、絡み数は変わらない。



(iii) ライデマイスター移動 III では、次の図にどのように向きを指定しても、次のことが成り立ち、絡み数が変わらないことがわかる。

(イ) q_1 が同じ成分同士の間差点ならば q'_1 も同じ成分同士の間差点で、異なる成分による間差点ならば $\varepsilon(q_1) = \varepsilon(q'_1)$ である。



(ロ) q_2 が同じ成分同士の間差点ならば、 q'_2 も同じ成分同士の間差点で、異なる成分による間差点ならば $\varepsilon(q_2) = \varepsilon(q'_2)$ である。 \square

例. 2成分の平凡な絡み目の絡み数は0、Hopf絡み目の絡み数は ± 2 である。従ってこれらは絡み数により違うものである。

定義 1.12. 結び目、絡み目の正則表示の間差点 q において交差の上下を交換することを、 q において交差交換 (crossing change) するという。

命題 1.13. $L = K_1 \cup K_2$ を有向絡み目とする。 $\tilde{L} = \tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$ を正則射影とする。 $S = \{q_1, \dots, q_u\} \subset \mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ を、 $S = \{ \tilde{K}_1 \text{ のほうが } \tilde{K}_2 \text{ の下になる間差点 } \}$ と定め、各 q_i での交差の符号を ε_i とおく。このとき、次式が成り立つ：

$$lk(K_1, K_2) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_u$$

証明. S 以外の間差点を T とかき、 $T = \{q_{u+1}, q_{u+2}, \dots, q_{u+v}\}$ とする。点 q_{u+j} における交差の符号を ε_{u+j} ($j = 1, \dots, v$) とする。整数 A, B を、

$$A = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_u$$

$$B = \varepsilon_{u+1} + \dots + \varepsilon_{u+v}$$

とおく。すると、

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(A + B)$$

が成り立つ。

さて、 q_1, \dots, q_u で交差交換して得られる絡み目を $L' = K'_1 \cup K'_2$ とする。このとき、

$$lk(K'_1, K'_2) = \frac{1}{2}(-A + B)$$

となる。ところで K'_1 は K'_2 より上になるので K'_1 は K'_2 と全く絡んでいない。従って、 $lk(K'_1, K'_2) = 0$ である。よって、 $A = B$ でなければならない。従って、

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(A + A) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_u$$

となる。

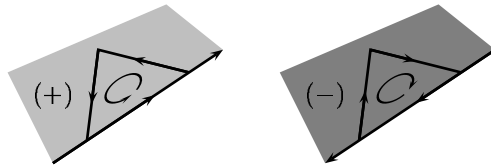
□

2 ザイフェルト曲面

この節では、[4]の第4章に従ってザイフェルト曲面の定義を行い、交点数と絡み数の関係について述べる。

定義 2.1. (1) 空間 \mathbb{R}^3 内のコンパクトで向き付け可能な境界付曲面 F が、絡み目 L のザイフェルト曲面であるとは、 F のどの連結成分も境界を持ち、 $\partial F = L$ となるときをいう。

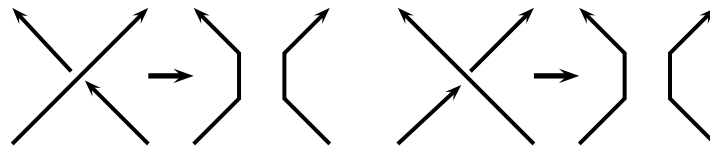
(2) 空間 \mathbb{R}^3 内の、コンパクトで(向き付け可能で)向き付けられた境界付曲面 F が、有向絡み目 L の有向ザイフェルト曲面であるとは、 F のどの連結成分も境界を持ち、 $\partial F = L$ (F の向きから誘導される ∂F の向きが L の向きと一致) となるときをいう。有向絡み目に対しては、特に断らない限り、いつも有向ザイフェルト曲面を考えるとす。曲面の向き(表 = + 側、裏 = - 側)の指定は、次の図のように定めることにする。



(3) (有向)ザイフェルト曲面 F が連結でないときは、空間内で細い円筒で連結成分を繋ぐことによって(連結和に相当する)いつでも連結にできるので、必要ならば連結な(有向)ザイフェルト曲面を使用する。

定理 2.2. 任意の(有向)絡み目 L に対し、その(有向)ザイフェルト曲面 F が存在する。

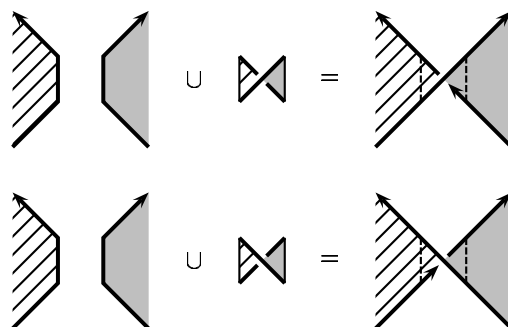
証明. 絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ は正則の位置にあるとしてよい。 L の各成分に向きを指定し(L が有向のときはその向きを使う)、正則表示 \tilde{L} の各交差点の近くで下図に示す操作を行う。



この結果、平面上には、向きを指定された互いに共有点を持たない有限個の多边形 J_1, \dots, J_s (ザイフェルト円周という) が得られる。これらの多边形に対し、互いに共有点を持たない円板 $D_1 \cup \dots \cup D_s$ を張る。

次に各交差点の近くで、これらの円板をもとの交差に従って、半捻りの帯(曲線に幅を付けたもの)で下図のように繋ぎ合わせる。この結果、 \tilde{L} を境界とするコン

パクトな曲面 F が得られる。繋ぎ方から、 F は $D_1 \cup \dots \cup D_s$ の向きから誘導される向きを持ち、その F の向きから誘導される $\partial F = \tilde{L}$ の向きは \tilde{L} に指定した向きと一致する。

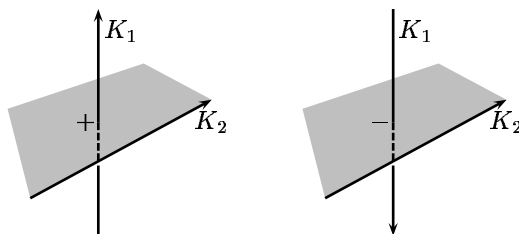


以上で示した構成法をザイフェルトのアルゴリズムと呼ぶことがある。

なお、 \tilde{L} のザイフェルト曲面ではなく、元の L のザイフェルト曲面はこの F から容易に作ることができる。□

定義 2.3. $K_1 \cup K_2$ は 2 成分の有向絡み目とする。 F を有向結び目 K_2 の有向ザイフェルト曲面とし、 K_1 は F を有限個の点で突き抜けるとする。各交点 $x \in K_1 \cap F$ において、下図 (色つき部分 = 表) の規則によって + と - の符号を対応させる。

ここで、+ の個数を α 、- の個数を β とするとき、 $\alpha - \beta$ を K_1 と F の交点数といい、 $int(K_1, F)$ と書く。

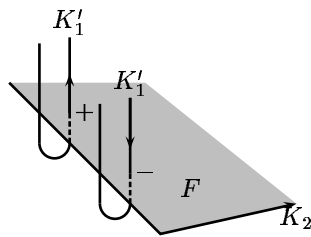


命題 2.4. $lk(K_1, K_2) = int(K_1, F)$

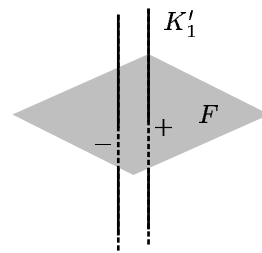
証明. $K_1 \cup K_2$ の正則表示 $\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$ を考え、 $S = \{ \tilde{K}_1 \text{ の方が } \tilde{K}_2 \text{ より下の交差点} \}$ とする。まず、 K_1 をそのまま引き上げようとしてみると、 S の点のまわりで K_1 が K_2 にひっかかり、持ち上がらない。ここで、その変形した K_1 を K'_1 とする。 F は $q \in S$ のまわりでは水平になっていると仮定してよいので、 K'_1 と F の交点は次の 2 種類に分かれる。

(1) S の各点に対応して K'_1 と F の交点が下図 (イ) (色つき部分 = 表) のように生じる。 q の符号の正負に応じて対応する交点の正負が定まる。

(2) K'_1 の垂れ下がった部分と上の (1) 以外の F との交点が、より高いところで対になってできる可能性がある (下図 (ロ))。



(イ)



(ロ)

(2) の部分は交点数に寄与しないので、等式

$$\sum_{q \in S} \varepsilon(q) = \text{int}(K_1', F)$$

を得る。命題 1.13 により、左辺は $lk(K_1, K_2)$ に等しい。

一般に、 $K_1 \cap F$ と $K_1' \cap F$ は異なるが、 K_1' の K_1 への変形をうまく取り直すと、交点は正負の対で現れたり、消滅することがわかるので、 $\text{int}(K_1, F) = \text{int}(K_1', F)$ となり、証明が完成する。

□

注意. この結果は K_2 が複数成分をもつ絡み目の場合にも同様に成り立つ。

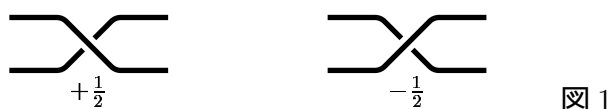
3 帯とその絡み数

この節では、帯について定義をし、性質についてみていく。また、帯の絡み数とその帯のふち同士または、中心線とふちの絡み数についてどのような関係があるのかをみていく。

定義 3.1. 中心線が結び目である帯のうち、表と裏の2つの面をもつものをリボンといい、そうでないものをメビウスの帯という。

中心線は正則の位置にあるとしてよいし、帯はいくつかのねじれの部分を除いてほぼ水平になっているとよい。また、リボンにはねじれが偶数個あり、メビウスの帯にはねじれが奇数個ある。

定義 3.2. 帯 X において、ねじれの部分に図1の規則によって、 $+\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ を対応させる。

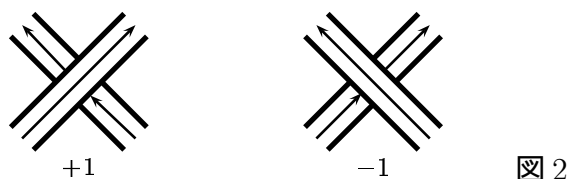


帯 X に、 $+\frac{1}{2}$ のねじれが α 個、 $-\frac{1}{2}$ のねじれが β 個あるとき、この合計、つまり、

$$n(X) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

を帯 X のねじれ数という。

また帯 X において、交差の部分に図2の規則によって、 $+1$ と -1 を対応させる。



帯 X に、 $+1$ の交差が x 個、 -1 の交差が y 個あるとき、この合計、つまり、

$$w(X) = x - y$$

を帯 X のライズ (writhe) という。

ねじれ数 $n(X)$ は、リボンの場合は整数、メビウスの帯の場合は分数になることに注意する。また、帯のねじれ数やライズは帯の向き付け方によらないで決まる。

定義 3.3. 帯 X において、ねじれ数 $n(X)$ とライズ $w(X)$ の和、

$$\alpha(X) = n(X) + w(X)$$

を帯 X の絡み数という。

次に、リボンの絡み数とリボンのふち同士の絡み数についてどのような関係があるかみていく。

次の定理は [2] に証明なしに述べられている。

定理 3.4. リボン X において、リボン X 自身と同じ向きの方ちを K_1 、 K_2 とおく。このリボン X の向きとは中心線の向きのことをいう。このとき、リボンの絡み数 $\alpha(X)$ とふち同士の絡み数 $lk(K_1, K_2)$ について、

$$\alpha(X) = lk(K_1, K_2)$$

が成り立つ。

証明. リボン X のねじれの部分と交差の部分のそれぞれについてみていく。以下の図では、ふちを区別するために K_1 の方を太くして示す。

まず、 X のねじれの部分に注目する。ねじれ $+\frac{1}{2}$ の部分の K_1 と K_2 の絡み数は、 $+\frac{1}{2}$ である (図 3)。同様に、ねじれ $-\frac{1}{2}$ の部分の K_1 と K_2 の絡み数は、 $-\frac{1}{2}$ である (図 4)。よって、 X のねじれの部分でのふち同士の交差点における絡み数の和は、 X のねじれ数と同じ値になることがわかる。

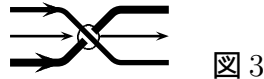


図 3



図 4

次に、 X の交差の部分に注目する。 $+1$ の交差の部分の K_1 と K_2 の絡み数の和は、 $\frac{1}{2}\{(+1) + (+1)\} = +1$ である (図 5)。同様に、 -1 の交差の部分の K_1 と K_2 の絡み数の和は、 $\frac{1}{2}\{(-1) + (-1)\} = -1$ である (図 6)。よって、 X の交差の部分でのふち同士の絡み数の和は、 X のライズと同じ値になることがわかる。

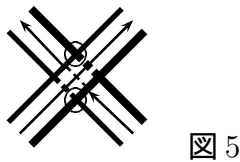


図 5

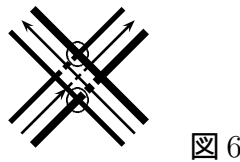


図 6

以上より、

$$n(X) + w(X) = lk(K_1, K_2)$$

が得られる。□

注意. X の中心線を C と書くとすると、

$$lk(K_1, K_2) = lk(C, K_1) = lk(C, K_2)$$

が成り立っている。

また、メビウスの帯の絡み数とメビウスの帯の中心線とふちの絡み数については以下のような関係式が成り立つ。

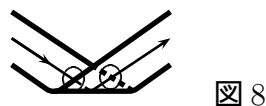
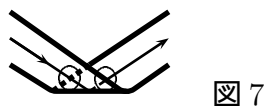
定理 3.5. メビウスの帯 X において、メビウスの帯 X 自身と同じ向きを中心線を C 、ふちを K とおく。このとき、メビウスの帯の絡み数 $\alpha(X)$ と C と K の絡み数 $lk(C, K)$ について、

$$\alpha(X) = \frac{1}{2}lk(C, K)$$

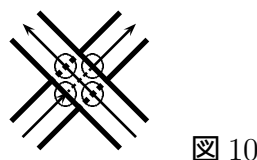
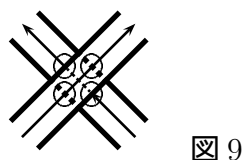
が成り立つ。

証明. メビウスの帯 X のねじれの部分と交差の部分のそれぞれについてみていく。

まず、 X のねじれの部分に注目する。ねじれ $+\frac{1}{2}$ の部分の C と K の絡み数の和は、 $\frac{1}{2}\{(+1) + (+1)\} = +1$ である (図 7)。同様に、ねじれ $-\frac{1}{2}$ の部分の C と K の絡み数の和は、 $\frac{1}{2}\{(-1) + (-1)\} = -1$ である (図 8)。よって、 X のねじれの部分での C と K の交差点における絡み数の和は、ねじれ数の 2 倍の値になることがわかる。



次に、 X の交差の部分に注目する。+1 の交差の部分の C と K の絡み数の和は、 $\frac{1}{2}\{(+1) + (+1) + (+1) + (+1)\} = +2$ である (図 9)。同様に、-1 の交差の部分の C と K の絡み数の和は、 $\frac{1}{2}\{(-1) + (-1) + (-1) + (-1)\} = -2$ である (図 10)。よって、 X の交差の部分での C と K の絡み数の和は、 X のライズの 2 倍の値になることがわかる。



以上より、

$$n(X) + w(X) = \frac{1}{2}lk(C, K)$$

が得られる。 □

4 メビウスの帯の切断

メビウスの帯を中心線で半分に切って得られる帯はリボンである。この節では、そのリボンの絡み数と元のメビウスの帯の絡み数との関係を見ていく。

また、そのリボンの中心線は元のメビウスの帯の境界のつくる結び目であり、その結び目とメビウスの帯の中心線との関係についてもみていく。

定理 4.1. メビウスの帯 X を中心線で半分に切って得られるリボンを Y とする。このそれぞれの帯の絡み数 $\alpha(X)$, $\alpha(Y)$ について、

$$\alpha(Y) = 4\alpha(X)$$

が成り立つ。

証明. メビウスの帯 X の交差の部分とねじれの部分のそれぞれについてみていく。

帯 X の交差の部分を中心線に半分に切ると、図 1 のようになる。

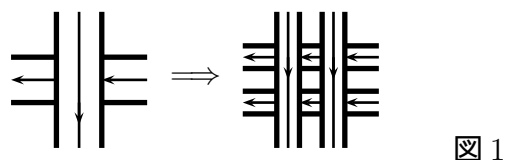


図 1

よって、この部分においてはねじれはあられず、ライズの部分数は $w(X)$ の 4 倍になることがわかる。

次に、帯 X のねじれの部分を半分に切ると、図 2 のようになる。



図 2

よって、この部分においてはねじれ数は $n(X)$ の 2 倍になる。また交差があらわれ、ライズの部分数は $n(X)$ の 2 倍になることがわかる。

以上より、

$$n(Y) = 2n(X) \tag{1}$$

$$w(Y) = 4w(X) + 2n(X) \tag{2}$$

となる。したがって、(1)+(2) より、

$$n(Y) + w(Y) = 4(n(X) + w(X))$$

となり、 $\alpha(Y) = 4\alpha(X)$ が得られる。□

メビウスの帯 X を中心線 C に沿って切り開いてできるリボンの中心線は X の境界 K と同じである。以下で、 C と K の関係について考察する。次の定理は H.Schubert の定理の特別な場合である。

定理 4.2. X を空間中のメビウスの帯とする。 X の中心線を C とし、 X の境界を K とする。このとき、仮に K が平凡ならば C も平凡である。

証明. 以下の証明は [1] の p.21 の議論を元に行っている。 C の管状の閉近傍 $V \approx C \times D^2$ で、 X を含むものをとる。また C に向きをつけ、 K にもそれと平行な向きをつけておく。 K が平凡であると仮定したので、 K を境界とする円板 S をとる。この S は ∂V に関して一般の位置にあるものとする。つまり、 $S \cap \partial V$ が互いに交わらない単純閉曲線の集合で構成されるとする。

その中に、 ∂V 上の 0 にホモロークな γ 、すなわち $[\gamma] = 0 \in H_1(\partial V)$ をみたく γ があつたとする。 γ は、 ∂V 上の円板 σ の境界である。必要なら γ をとりかえることにより、 σ は、 $\sigma \cap S = \gamma$ の性質を持つ、つまり他の単純閉曲線を含まないと仮定できる。 γ に沿って S を切断し、得られた曲線に σ と平行な二つの円板 σ_1 、 σ_2 を接着せよ。得られる曲面は、円板と球面の 2 つの連結成分を持つので、 K を含む方の成分を新しく S とおき直して、曲線の数減らすことができる。したがって、 $S \cap \partial V$ の各々の曲線 $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ は、トーラス ∂V において 0 にホモロークではないと仮定してもよい。このとき、これらは平行である。これらの曲線は、 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ の順で ∂V において並ぶとする。また $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ には

$$\partial(S \cap \partial V) = K \cup (-\gamma_1) \cup \dots \cup (-\gamma_r)$$

となる向きを与えるとする。つまり

$$[\gamma_1] + [\gamma_2] + \dots + [\gamma_r] = [K] \in H_1(V; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

が成り立つように向きをつける。このとき、 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ は V ですべて同じ向きをもつ。すなわち

$$[\gamma_1] = [\gamma_2] = \dots = [\gamma_r] \in H_1(V; \mathbb{Z})$$

が成り立つと仮定してよい。仮に、 ∂V において、 $\gamma_i \sim -\gamma_{i+1}$ であるならば、 S を γ_i と γ_{i+1} に沿って切断し、 γ_i と γ_{i+1} を境界とする ∂V 上のアニュラスの 2 枚の平行なコピーを貼り付ける。その結果得られる曲面 S' は連結かどうかはわからないが、オイラー標数は変わらない。

まず、 S' が連結でない場合を考える。このときは S' は穴あきトーラスと球面の 2 成分をもち、 γ_i は $\overline{\mathbb{R}^3 - V}$ の円板の境界となり、 γ_i は平凡な結び目である。 ∂V の単純閉曲線で $\overline{\mathbb{R}^3 - V}$ の曲面の境界となり、 0 にホモロークでないものは、 ∂V の緯線しかないので、 γ_i は C と同じ結び目型となり、 C が平凡であることがわかる。

次に S' が連結な場合を考える。このとき S' は K を境界とする円板であるが、 $S' \cap \partial V = S \cap \partial V - \{\gamma_i, \gamma_{i+1}\}$ となっている。以上より $S \cap \partial V = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ の γ_i たちは、すべて同じ向きを持つとしてよいことがわかった。

$S \cap \overline{\mathbb{R}^3 - V}$ がちょうど r 個の成分を持つことを証明する。

もし $S \cap \overline{\mathbb{R}^3 - V}$ の成分 \hat{S} で境界の成分の個数が $\hat{r} > 1$ なものがあったとするならば、 $i > k > j$ である k に対して $\gamma_k \cap \hat{S} = \emptyset$ が成り立つような 2 曲線 $\gamma_i, \gamma_j \subset \partial V$ が存在することになる。 γ_i, γ_j によって境界を張られる ∂V 上のアニュラスにおける単純な弧 α で γ_i, γ_j を接続し、 \hat{S} における単純な弧 λ で境界点を結べ。 $S^3 - V$ における $\alpha \cup \lambda$ と平行な曲線 u は、1つの点において \hat{S} と交差するので、 $\text{int}(u, \hat{S}) = \pm 1$ が成り立つ。また、 u は V と接触しないので $\text{lk}(u, \gamma_i)$ の値は i によらない定数 $k \in \mathbb{Z}$ である。したがって、

$$\pm 1 = \text{int}(u, \hat{S}) = \text{lk}(u, \partial \hat{S}) = k \cdot \hat{r}$$

を得ることができ、ゆえに $\hat{r} = 1$ でなければならず、 $\hat{r} > 1$ という仮定に矛盾する。これは γ_i たちが C の緯線であること、および各 γ_i が平凡であることを意味する。よって、 C は平凡である。

□

5 交差交換を許す変形

この節では、結び目、絡み目、帯における交差交換を許すことによってある決まった形に変形可能であることを示す。

この節は、[4]の p.20 ~ p.22 を元としている。

定理 5.1. K を正則の位置にある結び目とし、 \tilde{K} の交差点の個数を $c = c(\tilde{K}) > 0$ とする。全交差点 $\mathcal{D}(\tilde{K})$ の中から適当に u 個の点 q_1, \dots, q_u , $0 \leq u \leq c$, を選び、 q_1, \dots, q_u において \tilde{K} を交差交換することにより、 \tilde{K} は平凡型の結び目の正則表示となるようにできる。

証明. 正則表示 \tilde{K} に1つの向きを定め、1点 x を交差点以外から選ぶ。まず、 x から指定した向きに従って \tilde{K} を一周する。その際には、通過したところに色を付けながら進むこととし、交差点では次の規則に従うものとする：

- (i) 交差点で上交差点を通るときは、そのまま進む。
- (ii) 交差点で下交差点を通るときは、その上交差点を含む辺が既に色付きならばそのまま進み、まだ色が付いていないならばそこで交差交換して進む。

このようにして出発点 x に戻る。

こうして得られた新しい正則表示は明らかに平凡型である。 \square

また、絡み目についても結び目と同様に以下のことがいえる。

定理 5.2. $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ を正則の位置にある絡み目とし、 \tilde{L} の交差点の個数を $c = c(\tilde{L}) > 0$ とする。全交差点 $\mathcal{D}(\tilde{L})$ の中から適当に u 個の点 q_1, \dots, q_u , $0 \leq u \leq c$, を選び、 q_1, \dots, q_u において \tilde{L} を交差交換することにより、 \tilde{L} は平凡型の絡み目の正則表示となるようにできる。

証明. 正則表示 $\tilde{L} = \tilde{K}_1 \cup \dots \cup \tilde{K}_\mu$ の各成分 \tilde{K}_i に1つの向きを定め、1点 x_i を交差点以外から選ぶ。まず、 x_1 から定理 5.1 の証明の (i)、(ii) で定めた規則によって K_1 を1周する。以下、順次 x_2, \dots, x_μ から出発して、 $\tilde{K}_2, \dots, \tilde{K}_\mu$ を1周し、交差点の上下を定めていく。

交差の上下の定め方から、 \tilde{K}_i と \tilde{K}_j について、 $i < j$ ならばすべての交差点において \tilde{K}_i は \tilde{K}_j より上にあり、この新しい正則表示が平凡型の絡み目のものであることがわかる。 \square

定義 5.3. 絡み目の正則表示 \tilde{L} に対し、定理 5.2 で存在が示された整数 u の最小値を $u(\tilde{L})$ で表す。

絡み目型 $[L]$ の正則の位置にある代表元 L のすべてに関して、 $u(\tilde{L})$ の最小値を $u[\tilde{L}]$ で表し、 $[L]$ の結び目解消数 (unknotting number) という。

結び目、絡み目においては、交差交換をすることにより平凡型の正則表示となるように変形できることがわかった。それに対して、リボンとメビウスの帯において交差交換を許すとき、以下のことがいえる。

定理 5.4. リボンにおいて、図 1 のような交差交換を許すとする。

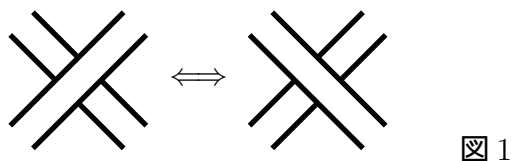


図 1

このとき、どんなリボンも図 2 の A、B のいずれかに変形可能である。

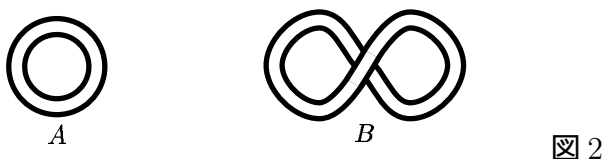


図 2

証明. まず、ねじれは気にせず中心線を平凡型に変形し、その後ねじれを消していく。

定理 5.1 より、交差交換を許すときにはどんな結び目も平凡型に変形できることがわかっている。よって、中心線は平凡型にできる。この変形をする際、1つの交差の部分をはどくとねじれが 2 個あらわれることがわかっている (図 3)。これは、交差 1 個の部分の絡み数の部分和とねじれ 2 個の部分の絡み数の部分和は等しいからである。よって、ねじれの個数は元の個数より偶数個変化するので、全体のねじれの個数は、偶数個+偶数個=偶数個である。

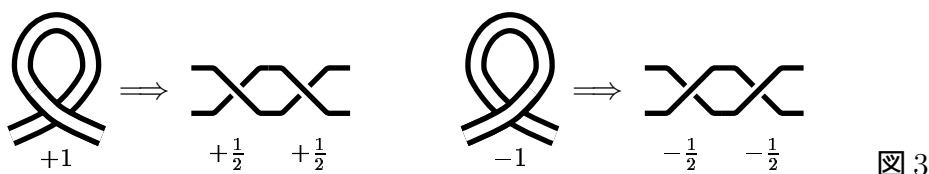


図 3

次にねじれに注目する。

a. リボンのねじれを一カ所に集める。そして、ねじれがキャンセルできる部分はキャンセルし、ねじれの数を減らす (図 4)。

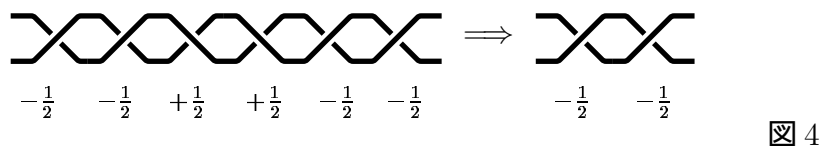


図 4

b. a の結果、 $+\frac{1}{2}$ 又は $-\frac{1}{2}$ だけの偶数個のねじれが残る。この残ったねじれを 2 個ずつのペアにして交差の形にしていき、交差に統一する (図 3 の逆)。

c. リボンの交差の数に注目する。交差の数が偶数個ならば A の形に、奇数個ならば B の形になる (図 5)。

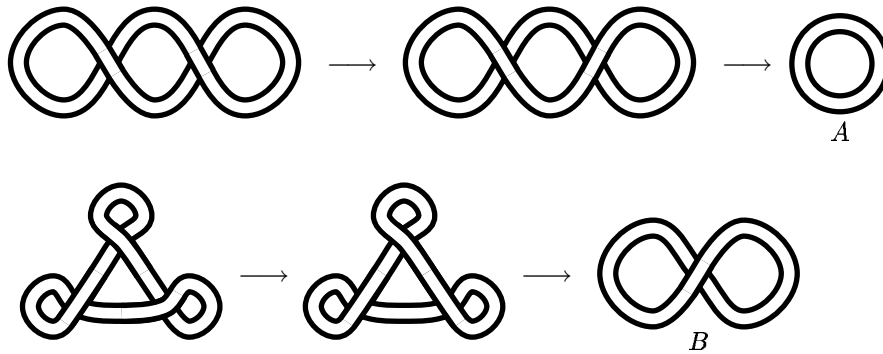


図5

また、図5より、ねじれが4個あるときにはAの形に変形できることがわかったので、ねじれが $4k$ 個($k = 0, 1, 2, \dots$)あればAの形に、ねじれが $4k + 2$ 個あればBの形になることがわかる。

以上より、どんなリボンも図2のA、Bのいずれかに変形可能である。□

次に、メビウスの帯についてみていく。

定理5.5. メビウスの帯において、図1のような交差交換を許すとす。このとき、どんなメビウスの帯も図6のC、Dのいずれかに変形可能である。



図6

証明. メビウスの帯の場合もリボンのときと同様にして証明できる。

まず、中心線を平凡型にする。このとき、リボンのときと同様にねじれの個数が元の個数より偶数個変化するので、全体のねじれの個数は、奇数個+偶数個=奇数個である。

次に、ねじれを一ヶ所に集め、ねじれがキャンセルできる部分はキャンセルする。すると、 $+\frac{1}{2}$ 又は $-\frac{1}{2}$ だけの奇数個のねじれが残るので、リボンのときと同様にねじれを2個ずつのペアにして交差の形にしていき、交差に統一する。

その結果ねじれが1個残るため、交差の数が偶数個ならば図2のAにねじれが1個加わったCの形に、奇数個ならば図2のBにねじれが1個加わったDの形になる。

また、ねじれが5個あるときにはCの形に変形できることがわかったので、ねじれが $4k + 1$ 個($k = 0, 1, 2, \dots$)あればCの形に、ねじれが $4k + 3$ 個あればDの形になることがわかる。

以上より、どんなメビウスの帯も図6のC、Dのいずれかに変形可能である。□

定理5.4、定理5.5より、交差交換を許すとき、どんなリボンも図2のAまたはBに、またどんなメビウスの帯も図6のCまたはDに変形可能であることがわかった。ここで、AとB、CとDは互いに変形不可能であることを証明しておく。

定理 5.6. 帯において、図 1 のような交差交換を許すとする。このとき、図 2 の A と B 、図 6 の C と D は互いに変形不可能である。

証明. 交差交換をすることによって絡み数は ± 2 だけ変わることがわかっている。ここで A と B についてみると、 A の絡み数は 0 、 B の絡み数は $+1$ である。したがって、 B でいくら交差交換をしても絡み数は 0 にはならない。よって、 A と B は互いに変形不可能である。

また同様に、 C の絡み数は $+\frac{1}{2}$ 、 D の絡み数は $+\frac{3}{2}$ である。したがって、 D でいくら交差交換をしても絡み数は $+\frac{1}{2}$ にはならない。よって、 C と D は互いに変形不可能である。 \square

定義 5.7. 交差交換を許すとき、定理 5.4 の図 5 のようななめらかな変形を正則ホモトピー (regular homotopy) という。

6 コンウェイ多項式

この節では [4] の p.71 ~ p.81 に従って、コンウェイ多項式の定義といくつかの具体例の計算を行う。

定理 6.1. 有向絡み目 L に対して、次の3つの公理を用いて、多項式 $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を定義することができる：

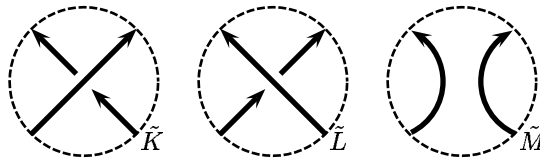
公理 (C_0): 有向絡み目 L と L' が有向同型ならば、

$$\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z).$$

公理 (C_1): 平凡な有向結び目 O について、

$$\nabla_O(z) = 1.$$

公理 (C_2): 3つの有向絡み目 K, L, M が正則の位置にあって、これらの正則表示 $\tilde{K}, \tilde{L}, \tilde{M}$ はある1点の近傍がそれぞれ下図に示す状態になっていて、さらにこれらの近傍の外部では完全に一致しているとする。



このとき次の等式が成り立つ：

$$\nabla_K(z) - \nabla_L(z) = z\nabla_M(z).$$

ここで、 $\mathbb{Z}[z]$ は z を変数とする整係数多項式環である。

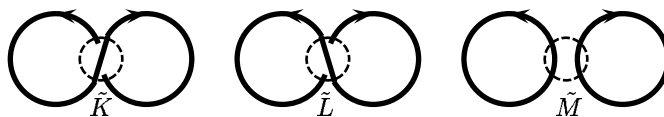
公理 (C_0) は、 $\nabla_L(z)$ が有向絡み目型の不変量であることを意味する。 $\nabla_L(z)$ を有向絡み目 L およびその有向絡み目型 $[L]$ のコンウェイ多項式と呼ぶ。

\tilde{K} や \tilde{L} を \tilde{M} に変更することを平滑化するという。

初期条件となる公理 (C_1) と、漸化式となる公理 (C_2) から、コンウェイ多項式 $\nabla_L(z)$ がどのようにして計算されるかを例に挙げて解説する。

例. μ 成分 ($\mu \geq 2$) の平凡型の有向絡み目 O_μ については、

$$\nabla_{O_\mu}(z) = 0.$$



実際、 $\mu = 2$ の場合は、上図に公理 (C_2) を適用すると、

$$\nabla_K(z) - \nabla_L(z) = z\nabla_M(z).$$

ここで K と L は共に平凡型の結び目だから、公理 (C_0) と (C_1) より、

$$\nabla_K(z) = \nabla_L(z) = 1.$$

$$\therefore z\nabla_M(z) = 0 \quad \therefore \nabla_M(z) = 0.$$

$\mu \geq 3$ の場合は、図の K, L, M のそれぞれに $\mu - 2$ 成分の平凡な絡み目を加えることによって、同じように証明される。

今の証明と同じ方法によって、一般に次の命題が示される。

命題 6.2. 有向絡み目 M が分離可能ならば、 $\nabla_M(z) = 0$

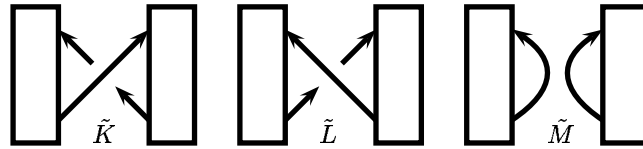
証明. 仮定から、 $[M]$ の正則の位置にある代表元 M で、その表示が下図の右端に示す状態となるものが存在する。この M を基にして、図の左側 2 つの有向絡み目の正則表示 \tilde{K}, \tilde{L} を構成する。 \tilde{K} と \tilde{L} は明らかに有向同型な絡み目の表示だから、公理 (C_0) により、

$$\nabla_{\tilde{K}}(z) = \nabla_{\tilde{L}}(z).$$

よって公理 (C_2) より、

$$0 = \nabla_{\tilde{K}}(z) - \nabla_{\tilde{L}}(z) = z\nabla_M(z).$$

$$\therefore \nabla_M(z) = 0$$



□

例. Hopf 絡み目 (1) のコンウェイ多項式

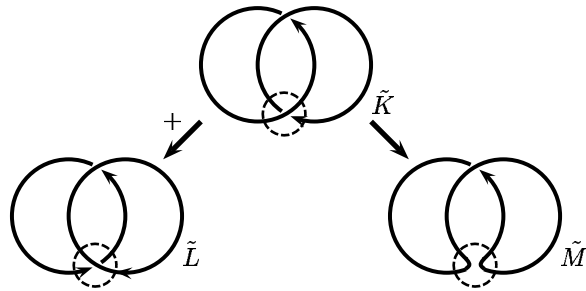
下図では、 L は 2 成分の平凡な絡み目、 M は平凡な結び目だから、

$$\nabla_L(z) = 0, \quad \nabla_M(z) = 1$$

これらを (C_2) $\nabla_K(z) - \nabla_L(z) = z\nabla_M(z)$. に代入すると、下図のように向きを指定した Hopf 絡み目 K について、

$$\nabla_K(z) = z$$

が求められる。



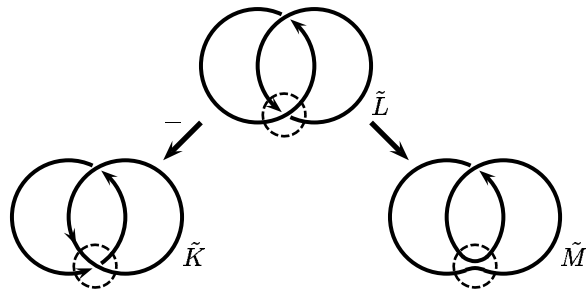
Hopf 絡み目 (2) のコンウェイ多項式

下図では、 K は 2 成分の平凡な絡み目、 M は平凡な結び目だから、

$$\nabla_K(z) = 0, \quad \nabla_M(z) = 1$$

これらを (C_2) に代入して、下図のように向きを指定した Hopf 絡み目 L のコンウェイ多項式を得る：

$$\nabla_L(z) = -z.$$



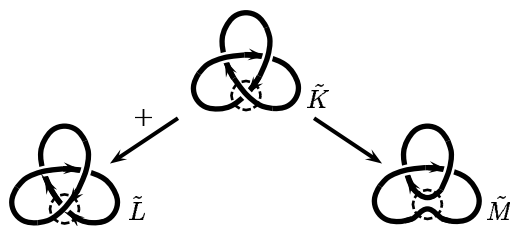
例. 三葉結び目 (1)

下図で、 L は平凡な結び目、 M は (1) の Hopf 絡み目だから、

$$\nabla_L(z) = 1, \quad \nabla_M(z) = z.$$

これらを (C_2) に代入して、

$$\nabla_K(z) = 1 + z^2.$$



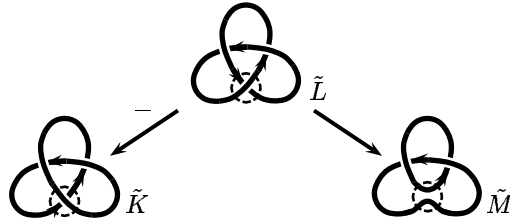
三葉結び目 (2)

下図では、 K は平凡な結び目、 M は (2) の Hopf 絡み目だから、

$$\nabla_K(z) = 1, \quad \nabla_M(z) = -z.$$

これらを (C_2) に代入して、

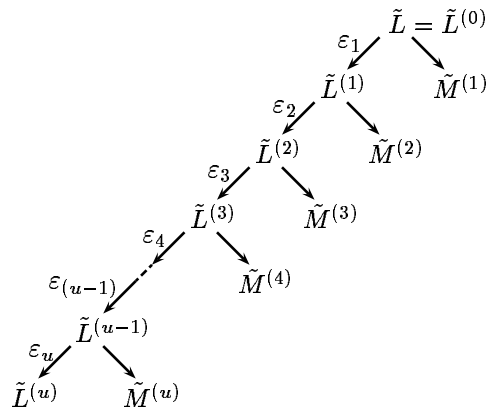
$$\nabla_L(z) = 1 + z^2.$$



上で調べた右手系三葉結び目も、その鏡像である左手系三葉結び目も可逆的なので、上の2つの場合を調べれば十分で、これらのコンウェイ多項式を公理 (C_1) と比較することによって、(向きを指定しない) 三葉結び目が非平凡であることが、結論された。

ただし、コンウェイ多項式では、右手系三葉結び目と左手系三葉結び目の区別はつけられない。

以上の例をもとにして、コンウェイ多項式の一般的な計算方法について考察する。 L を μ 成分の有向絡み目とし、 \tilde{L} をその正則表示とする。交差点の数 $c(\tilde{L})$ が 0 ならば、 L は平凡で、定理 6.1 より公理 (C_1) から $\nabla_L(z) = 0$ と計算できた。よって、 $c(\tilde{L}) = c > 0$ とする。定理 5.2 より、交差点の集合 $\{q_1, \dots, q_u\} \subset \mathcal{D}(\tilde{L})$ 、 $0 \leq u \leq c$ が存在して、これらの点において \tilde{L} の交差交換をすると、 \tilde{L} は平凡な μ 成分の有向絡み目 $[O_\mu]$ の正則表示となる。各交差点 q_i に対し、定義 1.10 に示す規則によって符号 $\varepsilon_i = \varepsilon(q_i) = \pm 1$ を対応させる。そこで、最初の表示 \tilde{L} に対し、 q_1, \dots, q_u の順に交差交換を実行することによって、以下の「平凡化図式」を得る：



ここで、 $\tilde{L}^{(i)}$ は表示 $\tilde{L}^{(i-1)}$ を交差点 q_i において交差交換して得られる正則表示を表し、 $\tilde{M}^{(i)}$ は表示 $\tilde{L}^{(i-1)}$ を交差点 q_i において平滑化して得られる正則表示を表すものとする。 $\{q_1, \dots, q_u\}$ の選び方から、 $\tilde{L}^{(u)}$ は μ 成分の平凡な絡み目であり、コンウェイ多項式 $\nabla_{\tilde{L}^{(u)}}(z)$ は決定している。一方、 $\tilde{M}^{(i)}$ の交差点は $\tilde{L}^{(i-1)}$ より q_i の点が少ないから

$$c(\tilde{M}^{(i)}) = c(\tilde{L}^{(i-1)}) - 1 = c(\tilde{L}) - 1 < c$$

である。従って交差点の数に関する帰納法の適用が可能となり、コンウェイ多項式 $\nabla_{\tilde{M}^{(i)}}(z)$ ($i = 1, \dots, u$) がすべて決定される。上の方法を丁寧に観察すると、次の定理となる。

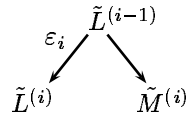
定理 6.3. μ 成分の有向絡み目 L に対して、非負整数 n と整数 $a_0, a_2, a_4, \dots, a_{2n}$ が存在して、 $\nabla_L(z)$ は次のようになる：

$$\nabla_L(z) = z^{\mu-1}(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots + a_{2n} z^{2n})$$

証明. \tilde{L} を L の正則表示とし、 $c(\tilde{L})$ に関する帰納法によって証明する。また、定理の上の考察で用いた記号などを、そのまま使用する。 $c(\tilde{L}) \leq 1$ のとき、交点数 1 以下のときは、明らかに L は平凡であるから、

$$\begin{aligned} \mu = 1 \quad \text{のとき} \quad \nabla_L(z) &= 1 \quad (n = 0, a_0 = 1), \\ \mu \geq 2 \quad \text{のとき} \quad \nabla_L(z) &= 0 \quad (n = 0, a_0 = 0) \end{aligned}$$

となって、定理が成り立っている。さて、 $c(\tilde{L}) \geq 2$ とし、 $c(\tilde{L})$ より少ない交差点の正則表示をもつ絡み目については、定理が正しいと仮定する。平凡化図式の一部を取り出すと



$$\begin{aligned} \varepsilon_i = +1 \quad \text{のとき} \quad \nabla_{L^{(i-1)}}(z) - \nabla_{L^{(i)}}(z) &= z \nabla_{M^{(i)}}(z), \\ \varepsilon_i = -1 \quad \text{のとき} \quad \nabla_{L^{(i-1)}}(z) - \nabla_{L^{(i)}}(z) &= -z \nabla_{M^{(i)}}(z) \end{aligned}$$

だから、この2つの式は、まとめて次のように書ける：

$$\begin{aligned} \nabla_{L^{(i-1)}}(z) - \nabla_{L^{(i)}}(z) &= \varepsilon_i z \nabla_{M^{(i)}}(z) \\ \therefore \sum_{i=1}^u (\nabla_{L^{(i-1)}}(z) - \nabla_{L^{(i)}}(z)) &= \sum_{i=1}^u \varepsilon_i z \nabla_{M^{(i)}}(z). \\ \therefore \nabla_{L^{(0)}}(z) - \nabla_{L^{(u)}}(z) &= \sum_{i=1}^u \varepsilon_i z \nabla_{M^{(i)}}(z). \\ \therefore \nabla_L(z) = \nabla_{L^{(0)}}(z) &= \sum_{i=1}^u \varepsilon_i z \nabla_{M^{(i)}}(z) + \nabla_{L^{(u)}}(z) \end{aligned} \quad (a)$$

ここで $L^{(u)}$ は μ 成分の平凡な絡み目であるから、

$$\nabla_{L^{(u)}}(z) = 1 \quad (\mu = 1) \quad \text{または} \quad 0 \quad (\mu \geq 2) \quad (b)$$

に注意する。また、

$$\mu(L^{(i)}) = \mu \quad \text{だから、} \quad \mu(M^{(i)}) = \mu \pm 1$$

である。さらに、

$$c(\tilde{M}^{(i)}) < c(\tilde{L}^{(i-1)}) = c(\tilde{L})$$

であるから、帰納法の仮定によって、次が成り立つ： $i = 1, \dots, u$ について、非負整数 $n(i)$ と整数 $a_{i0}, a_{i2}, a_{i4}, \dots, a_{i2n(i)}$ が存在して、

$$\nabla_{M^{(i)}}(z) = z^{\mu-2}(a_{i0} + a_{i2}z^2 + a_{i4}z^4 + \dots + a_{i2n(i)}z^{2n(i)}) \quad (c)$$

ただし、 $\mu = 1$ のときは $\mu(M^{(i)}) = 2$ なので

$$\nabla_{M^{(i)}}(z) = z(a_{i0} + a_{i2}z^2 + a_{i4}z^4 + \dots + a_{i2n(i)}z^{2n(i)}) \quad (c')$$

(b) と (c) (c') を (a) に代入して整理すると、定理の形となる。

□

次に、コンウェイ多項式の係数を調べてみよう。

有向絡み目 L のコンウェイ多項式の定数項を $a_0(L)$ 、 z の 1 次項の係数を $a_1(L)$ 、2 次項の係数を $a_2(L)$ 、 \dots とする。即ち、定理 6.3 の式の右辺を展開して、

$$\nabla_L(z) = a_0(L) + a_1(L)z + a_2(L)z^2 + \dots$$

とする。コンウェイ多項式は有向絡み目型 $[L]$ の不変量であるから、当然この多項式の係数 $a_i(L)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) も不変量である。

K, L, M を定理 6.1 の公理 (C_2) の仮定を満たす有向絡み目とすると、 (C_2) の関係式は係数に関して、

$$(C_2)' \quad a_i(K) - a_i(L) = a_{i-1}(M) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

と言い換えることができる。ただし、 $a_{-1} = 0$ とする。

定理 6.4. 有向絡み目 L について、次が成り立つ：

$$(1) \quad a_0(L) = \begin{cases} 1 & (\mu(L) = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\mu(L) \neq 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$(2) \quad a_1(L) = \begin{cases} lk(K_1, K_2) & (\mu(L) = 2 \text{ のとき}), \\ 0 & (\mu(L) \neq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

証明. (1) K, L, M を定理 6.1 の公理 (C_2) の仮定を満たす有向絡み目とすると、上の $(C_2)'$ から次が成り立つ：

$$a_0(K) - a_0(L) = 0, \quad \therefore \quad a_0(K) = a_0(L).$$

この事実は、コンウェイ多項式の定数項は、正則表示の交差交換によって変換しないことを意味する。

さて、定理 5.2 によって、 L の正則表示 \tilde{L} は交差交換だけで $\mu(L)$ 成分の平凡な絡み目とすることができるので、 (C_1) と命題 6.2 から (1) が結論される。

(2) L の成分数 $\mu(L)$ によって、3つの場合に分けて考える。

(イ) $\mu(L) = 2$ の場合： $L = K_1 \cup K_2$ とし、 L は正則の位置にあるものとする。 $S_0 = \{q_1, \dots, q_u\} \subset \mathcal{M}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ を \tilde{K}_1 が \tilde{K}_2 の下になる交差点の集合とし、定義 1.10 の規則によって点 q_i に符号 $\varepsilon_i = \varepsilon(q_i)$ を定める。命題 1.13 より、

$$lk(K_1, K_2) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_u$$

である。一方、この S_0 の点に関して、平凡化図式を作ると、

$$\mu(L^{(i)}) = \mu(L) = 2, \quad \mu(M^{(i)}) = 1 \quad (i = 1, \dots, u)$$

が成り立ち、この定理の (1) と $(C_2)'$ より、

$$\begin{aligned} a_1(L^{(i-1)}) - a_1(L^{(i)}) &= \varepsilon_i a_0(M^{(i)}) \\ &= \varepsilon_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^u \{a_1(L^{(i-1)}) - a_1(L^{(1)})\} &= a_1(L^{(0)}) - a_1(L^{(u)}) \\ &= a_1(L) - a_1(L^{(u)}) \\ &= \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_u \end{aligned}$$

ところで、 S_0 のとり方から、 $L^{(u)}$ は分離可能な絡み目だから、命題 6.2 によって、 $\nabla_{L^{(u)}}(z) = 0$ 、つまり、

$$a_1(L^{(u)}) = 0$$

である。以上より、

$$a_1(L) = lk(K_1, K_2)$$

を得る。

(ロ) $\mu(L) = 1$ の場合：結び目 L は正則の位置にあるとし、 q_1, \dots, q_u を定理 5.2 を満たす交差点とする。これらの点に関して、平凡化図式を作れば、

$$\mu(L^{(i)}) = \mu(L) = 1, \quad \mu(M^{(i)}) = 2 \quad (i = 1, \dots, u)$$

が成り立ち、この定理の (1) と $(C_2)'$ より、

$$a_1(L^{(i-1)}) - a_1(L^{(i)}) = \varepsilon_i a_0(M^{(i)}) = 0$$

$$\therefore a_1(L) = a_1(L^{(0)}) = a_1(L^{(1)}) = \cdots = a_1(L^{(u)}) \quad (A)$$

一方、仮定から $L^{(u)}$ は平凡な結び目だから、 $\nabla_{L^{(u)}}(z) = 1$ 、つまり $a_1(L^{(u)}) = 0$ である。これを (A) に代入して、 $a_1(L) = 0$ を得る。

(八) $\mu(L) \geq 3$ の場合： L は正則の位置にあるとし、 q_1, \dots, q_u を定理 5.2 の条件を満たす交差点とする。これらの点に関して、平凡化図式を作れば、

$$\mu(L^{(i)}) = \mu(L) \geq 3, \quad \mu(M^{(i)}) \geq 2 \quad (i = 1, \dots, u)$$

が成り立つ。従って、この定理の (1) より、 $a_0(M^{(i)}) = 0$ である。また、仮定と定理 6.3 より、 $a_1(L^{(u)}) = 0$ である。よって (口) と同様にして、 $a_1(L) = 0$ を得る。

□

7 コンウェイ多項式の性質と計算例

この節では、前節に続き、[4]の第6、7章に従ってコンウェイ多項式の性質を述べ、トーラス結び目、トーラス絡み目における計算例を示す。

L の正則表示 \tilde{L} の全ての交差点において交差交換して得られる絡み目を L^* とかき、 L の鏡像という。

定理 7.1. (1) 有向絡み目 L について、

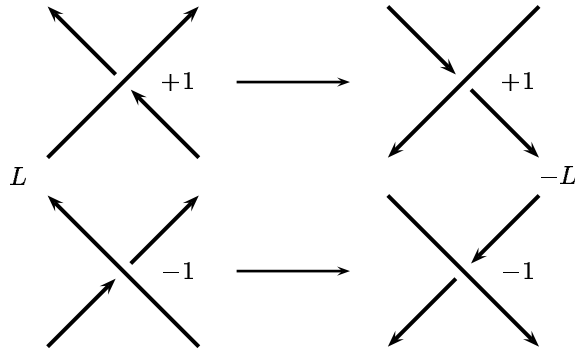
$$\nabla_L(z) = \nabla_{-L}(z).$$

従って、コンウェイ多項式は、結び目に関しては、向きに依存しない不変量である。

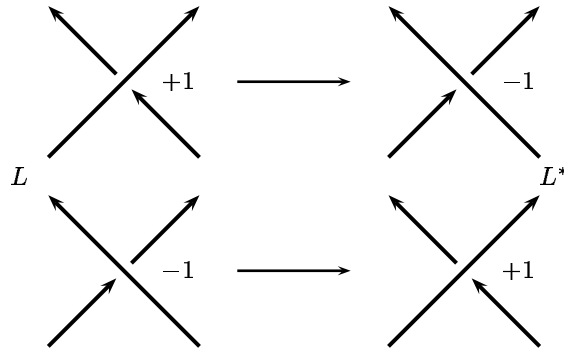
(2) μ 成分の有向絡み目 L について、

$$\begin{aligned} \nabla_{L^*}(z) &= \nabla_L(-z) \\ &= (-1)^{\mu-1} \nabla_L(z). \end{aligned}$$

証明. (1) L の正則表示 \tilde{L} の、交差点 q_1, \dots, q_u に関する平凡化図式と、 \tilde{L} の向きを逆にして得られる $-L$ の正則表示 $-\tilde{L}$ の、同じ交差点 q_1, \dots, q_u に関する平凡化図式を比べると、図式中の絡み目の向きが逆になるだけで交差点の符号は一致し、分解樹としては同じものである。分解樹の根元の平凡な絡み目は可逆的だから、これらの分解樹を用いて計算したコンウェイ多項式は一致する。

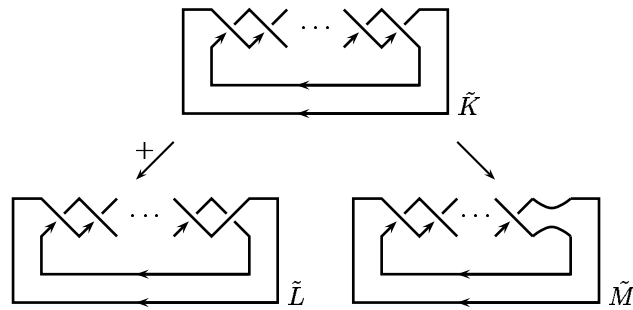


(2) 正則表示 \tilde{L}^* の、対応する同じ交差点 q_1, \dots, q_u に関する平凡化図式を比べると、図式中の絡み目が鏡像となり、交差点の符号が逆になる。分解樹としては同じ形になるから、これらの分解樹を用いてコンウェイ多項式を計算すると、(2)の等式が得られる。



□

例. (1)



上図の K の交差点の数を q とし、 K の表す絡み目を $K(q)$ とする。

$q = 2n + 1$ のとき、 $K(q)$ は $(2, q)$ 型トーラス結び目、

$q = 2n$ のとき、 $K(q)$ は $(2, q)$ 型トーラス絡み目

と呼ばれる。上図の L は $K(q - 2)$ を表し、 M は $K(q - 1)$ を表す。よって、

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \quad (B)$$

を得る。 $K(1)$ は平凡な結び目、 $K(2)$ は Hopf 絡み目 (1) だから、

$$\nabla_{K(1)}(z) = 1,$$

$$\nabla_{K(2)}(z) = z,$$

$$\nabla_{K(3)}(z) = 1 + z^2,$$

$$\nabla_{K(4)}(z) = z + z(1 + z^2) = 2z + z^3,$$

$$\nabla_{K(5)}(z) = 1 + z^2 + z(2z + z^3) = 1 + 3z^2 + z^4,$$

.....

が得られる。(B) に $z = 1$ を代入すると、

$$\nabla_{K(q)}(1) = \nabla_{K(q-2)}(1) + \nabla_{K(q-1)}(1)$$

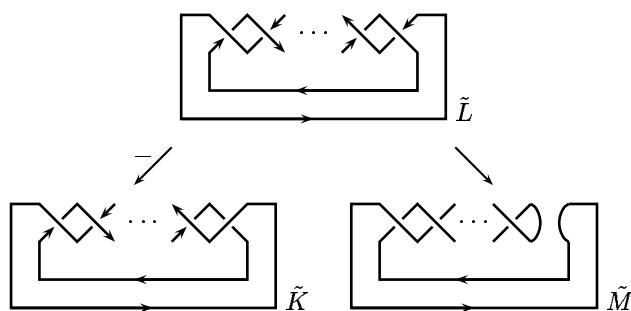
となる。 $\nabla_{K(1)}(1) = \nabla_{K(2)}(1) = 1$ であるから、 $\nabla_{K(n)}(1)$ は、フィボナッチ数列 $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ となる。よって、これらはすべて同型でないことがわかる。

(2) $K(q)$ の交差の上下を逆にしたものを $K(-q)$ と表すことにする。このとき、定理 7.1(2) より、

$$\nabla_{K(-q)}(z) = (-1)^{q-1} \nabla_{K(q)}(z)$$

であることがわかる。

(3)



上図の上段 \tilde{L} の交差点の数を $2n$ とし、 \tilde{L} の表す 2 成分の有向絡み目を $L(2n)$ とする。これは $(2, 2n)$ 型トーラス絡み目の一方の成分の向きを逆にしたもので、 $Lk(L(2n)) = -n$ である。

さて、上図の K は明らかに $L(2n-2)$ を表し、 M は平凡な結び目である。ところで、 $L(2)$ は Hopf 絡み目 (2) だから、 $\nabla_{L(2)}(z) = -z$ であり、上図で $n = 2$ の場合を考えれば、

$$\nabla_{L(4)}(z) = \nabla_{L(2)}(z) - z\nabla_M(z) = -z - z = -2z$$

帰納的に計算して、一般に、次を得る：

$$\nabla_{L(2n)}(z) = \nabla_{L(2n-2)}(z) - z\nabla_M(z) = -nz$$

我々は、中心線が結び目 C であるようなメビウスの帯 X を半分に切ることができるリボンの中心線 K が平凡であるならば、 C 自身が平凡でなければならないことを示した。

C が平凡であるとき、 X は上の例の (1)、(2) のような境界をもつメビウスの帯 (以下、 $M(q)$ と書く) であり $K = K(q)$ (q は奇数) となる。これが平凡であるのは、 $q = \pm 1$ のときだけである。

以上をまとめて、次の定理を得る：

定理 7.2. メビウスの帯 M を半分に切ることができるリボンの中心線が平凡であるのは、 $M = M(\pm 1)$ の 2 つの場合のみである。

A 平面曲線の回転数

この節では平面の閉曲線の回転数の定義を行い、正則ホモトピーによる分類について述べる。

この節は、[3] の p.102 ~ p.111 を元としている。

定義 A.1. 向きのつけられたなめらかな閉曲線 a に対して、

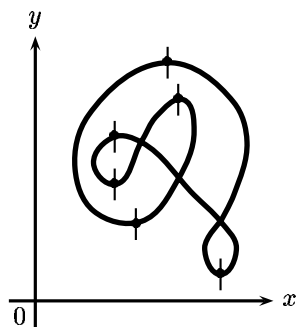
$$\theta(a) = (\text{法線が曲線 } a \text{ を } a \text{ の向きに一周するときの角の変化量})$$

を曲線 a の回転角という。また、

$$\rho(a) = \frac{1}{2\pi} \theta(a)$$

を曲線 a の回転数という。

平面上に直交座標 $((x,y)$ -座標) をとる。曲線 a 上の点 P での法線が y 軸に平行になるときの点 P を危点という。一般には危点が線分上にあるような場合もあるが、曲線 a がなめらかな閉曲線であることにより、直交座標軸を少し回転すれば危点は有限個のみにすることができる。そうすると、危点の近くの様子は極大点、極小点、変曲点の3種類しかない。このうちの極大点と極小点を本質的危点という。一方変曲点は、危点の周りをちょっとだけなめらかに変形すれば回転数が変わらないように除去できるので非本質的である。



●:危点 図1

曲線 a 上の2点、 Q 、 R に対し、 $\theta(Q, R)$ で点 Q での法線が a の向きに R での法線までうつつたときの角の変化量を表すことにする。 P が本質的危点であれば、 P のごく近くにかつてに2点 Q 、 R をとり、 a の向きが Q から R へ向かうとき、必ず、 $\theta(Q, R) > 0$ か、 $\theta(Q, R) < 0$ かのいずれかが成立する。 $\theta(Q, R) > 0$ のとき P で凸といい、 P での符号は1とし、 $\theta(Q, R) < 0$ のとき P で凹といい、 P での符号は-1とする。

このとき、次のように性格づけることができる。

定義 A.2. 危点 P の符号を ε で表すと、

$\varepsilon = 1$ (P で凸) \iff 極大点かつ a が左向き、または、極小点かつ a が右向き

$\varepsilon = -1$ (P で凹) \iff 極大点かつ a が右向き、または、極小点かつ a が左向き

本質的危点およびその符号がわかると、次の定理により回転数が決定できる。

定理 A.3. a を向きのつけられた、なめらかな閉曲線とし、その本質的危点を a の向きに順に番号をつけて P_1, P_2, \dots, P_m とする。各 P_i の符号を ε_i とすると、 a の回転角は $\theta(a)$ は、

$$\theta(a) = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m)\pi$$

で与えられる。したがって a の回転数 $\rho(a)$ は次の式で与えられる。

$$\rho(a) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m)$$

証明. a 上の3点 P, Q, R に対して

$$\theta(P, R) = \theta(P, Q) + \theta(Q, R)$$

が成立するのは明らかである。

したがって、 a を一周するときの法線の角の変化 $\theta(a)$ は、

$$\theta(a) = \theta(P_1, P_2) + \theta(P_2, P_3) + \dots + \theta(P_{m-1}, P_m) + \theta(P_m, P_1)$$

によって与えられる。この各 $\theta(P_i, P_{i+1})$ 、($i = 1, \dots, m$ 、ただし $m+1 \equiv 1$ とする) が、

$$\theta(P_i, P_{i+1}) = \frac{(\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1})}{2}\pi$$

で与えられることは図2よりわかる。

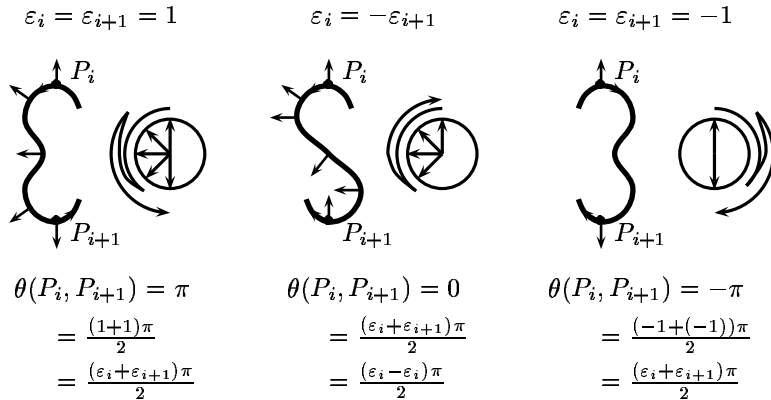


図 2

よって、 a の回転角 $\theta(a)$ 、回転数 $\rho(a)$ は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \theta(a) &= \theta(P_1, P_2) + \theta(P_2, P_3) + \cdots + \theta(P_{m-1}, P_m) + \theta(P_m, P_1) \\ &= \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\pi}{2} + \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\pi}{2} + \cdots + \frac{(\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m)\pi}{2} + \frac{(\varepsilon_m + \varepsilon_1)\pi}{2} \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m)\pi \\ \rho(a) &= \frac{1}{2\pi}\theta(a) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m) \end{aligned}$$

□

定義 5.7 で正則ホモトピーについて述べたが、図 3、図 4 に示すような、自己交差を許すなめらかな変形も正則ホモトピーという。

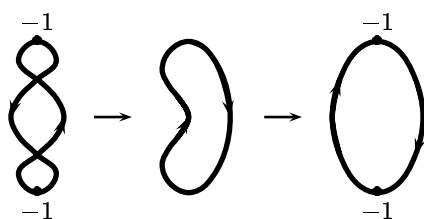


図 3

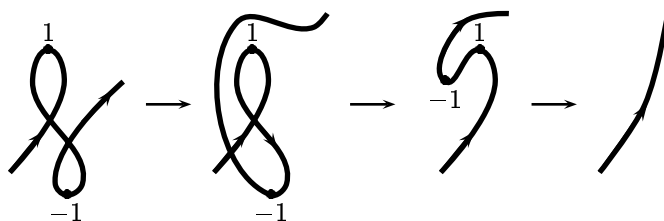


図 4

ただし、図 5 のようにコブをつくったりしてはなめらかな変形とはいえない。

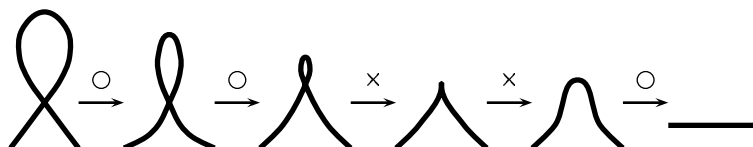


図 5

閉曲線 a に対し、回転数 $\rho(a)$ は整数になる。逆に、かつてな整数 n が与えられると、なめらかな閉曲線 a_n がみつかり、 $\rho(a_n) = n$ となる。これは図 6 より明らかである。

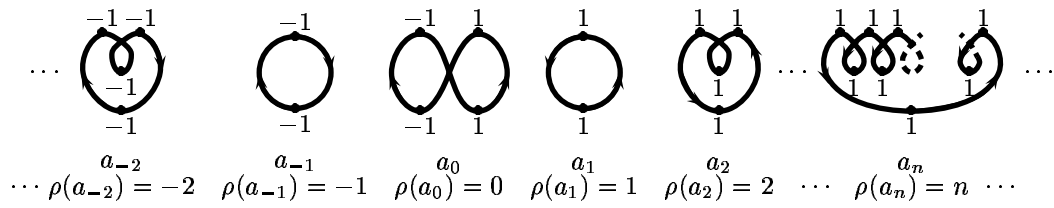


図 6

この図 6 に示された曲線 a_n を、回転数が n の標準形と呼ぶ。

一般的には a の向き順に本質的危点が例えば、凸凹凸凸凸凹... と並んでいて、互いに隣り合う凸と凹の危点は、他に凸あるいは凹の危点があるときには図 4 のような変形をしたり、危点の高さがうまくいかないときには図 7 のような変形を組み合わせ、互いに打ち消すことができ、図 3 のように危点の数を変えない変形で交点の数を減らし、最後には a_n の形へ変形できる。

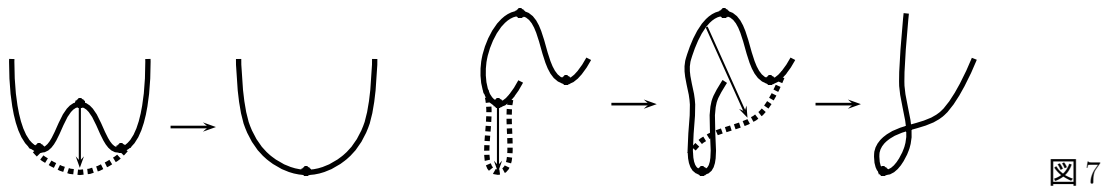
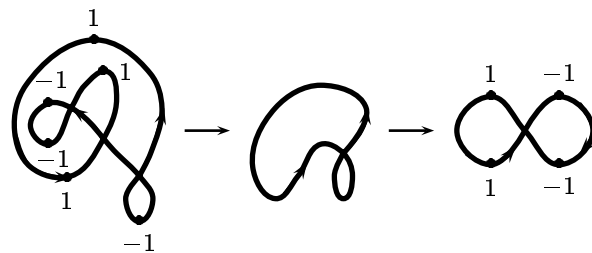


図 7

したがって、かつてになめらかな閉曲線 a が与えられ、 $\rho(a) = n$ であれば a をなめらかに変形して a_n に向きを保つように重ねることができることがわかる。

図 1 を標準形に変形する例が図 8 である。



$$\rho(a) = \frac{1+1+1+(-1)+(-1)+(-1)}{2} = 0 = \rho(a_0)$$

図 8

なお、この事実は [5] にも別の証明が与えられている。

参考文献

- [1] Gerhard Burde and Heiner Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2003.
- [2] G.K. フランシス, 『トポロジーの絵本 (新装版)』 シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社, 2005.
- [3] 加藤十吉, 曲線の微分トポロジー, 『トポロジーの世界』 日本評論社, 1982, 102–111.
- [4] 鈴木晋一, 『結び目理論入門』 サイエンス社, 1991.
- [5] 梅原雅顕・山田光太郎, 『曲線と曲面 微分幾何的アプローチ』 裳華房, 2006.