

ベクトル場とつむじ

岡山理科大学 理学部 基礎理学科

幾何学ゼミ

担当教授	山崎	正之
S04S006	泉	佳孝
S04S023	構	宏章

目次

0	導入	2
1	ベクトル場	3
2	ベクトル場の変形	7
3	閉曲面上のベクトル場	16
4	円板上のベクトル場	19
5	境界のある曲面における Poincaré-Hopf の定理	22
6	つむじ	25
付録 A	1 の分割	27

0 導入

我々は、曲面上のベクトル場の指数に関する Poincaré-Hopf の定理について調べた。曲面 X 上のベクトル場 V が有限個の特異点しかもたず、しかもどの特異点も境界 $\partial X = c_1 \cup \cdots \cup c_n$ の上にないとする。このとき、各特異点 p に対し、 p における V の回転数 $i(V; p)$ が定まる。その合計が V の指数 $i(V)$ である。また、各境界成分 c_i に対して、 V の c_i における栓数 $s(V; c_i)$ という数が定まる。これらに関し、次の定理が成り立つ

$$\text{定理 } i(V) = \chi(X) - \sum_{i=1}^n (s(V; c_i) - 1)$$

ただし、 $\chi(X)$ は X のオイラー標数を表す。

第 1 節では、指数や回転数など、ベクトル場に関する基本的な定義を述べる。第 2 節では、ベクトル場の変形について述べ、実際に変形の様子を図で観察する。第 3 節では、閉曲面上のベクトル場に注目し、その指数を考察する。第 3 節の最後では、閉曲面に関する Poincaré-Hopf の定理について述べる。第 4 節では、第 5 節で定理を導く準備として円板上のベクトル場に注目し、その指数を考察する。第 5 節では、第 4 節の内容をふまえて、境界をもつ曲面における Poincaré-Hopf の定理を導いていく。第 6 節では、前節までの考えを用いて、人間の髪の毛をベクトル、つむじを特異点、頭をベクトル場として幾何学的に考察する。付録 A では、第 3 節で述べるベクトル場の合成に必要な関数をつくる。

論文作成にあたって、我々の執拗な質問攻めに嫌気をささず、様々な指導や指摘、修正をして下さった、山崎正之先生には大変お世話になりました。本当にありがとうございました。

2008 年 2 月 夜更けのゼミ室より
泉・構

1 ベクトル場

ユークリッド空間 \mathbb{R}^N 中の部分集合 X を考える。

定義 1.1. X 上のベクトル場とは、写像 $V : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ のことをいう。特に $V(p) = \vec{0}$ となる点 $p \in X$ を V の特異点と呼ぶ。 X が曲面であり各点 $p \in X$ で、 $V(p)$ が X の p における接ベクトルであるとき、 V は X 上の接ベクトル場であるという。ただし曲面の場合、単にベクトル場とかき接ベクトル場を表す。

例 1.1.

(1) 式 $V_1(x, y) = (0.5, 0)$ で定まる写像 $V_1 : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は \mathbb{D}^2 上の接ベクトル場 (図 1) である。このとき、 V_1 は特異点をもたない。

(2) 式 $V_2(x, y) = (x, y)$ で定まる写像 $V_2 : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は \mathbb{D}^2 上の接ベクトル場 (図 2) である。このとき、点 $p = (0, 0)$ は V_2 の唯一の特異点である。

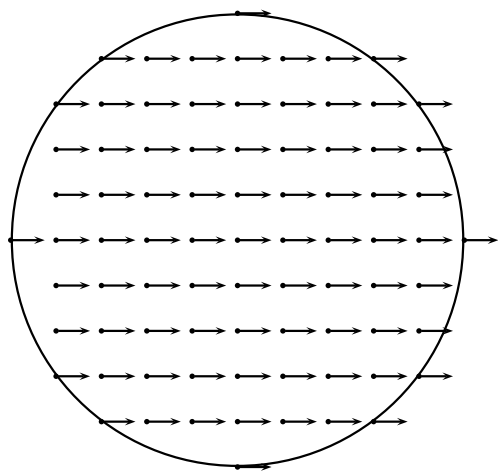


図 1 $V_1(x, y) = (0.5, 0)$

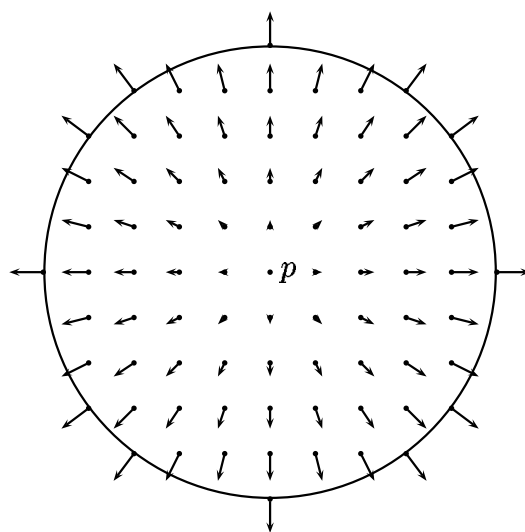


図 2 $V_2(x, y) = (x, y)$

(ここで扱うベクトル場の各ベクトルは見易いように、大きさを縮めてある)

定義 1.2. S^1 を \mathbb{R}^2 の部分集合と考え、 S^1 上のベクトル場 $v : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で特異点をもたないものに対し、 $\hat{v} : S^1 \rightarrow S^1$ を

$$\hat{v}(p) = \frac{v(p)}{|v(p)|}$$

で定める。この写像 \hat{v} の写像度、つまり S^1 の像 $v(S^1)$ が S^1 に本質的に何回巻きついて
いるか、その回数を $r(V)$ とかき、 v の回転数という。

次に曲面上のベクトル場 V の孤立した特異点 p での回転数を定義する。 p の周りを平面
と考え、 p を中心とする半径 ϵ の円周 S_ϵ^1 をとる (ϵ は他の特異点を含まないくらい小さ
な数)。

定義 1.3. 曲面上のベクトル場 V の孤立した特異点 p の周りの回転数 $i(V; p)$ とは $V|_{S_\epsilon^1}$
の回転数 $r(V|_{S_\epsilon^1})$ のことである。

注意. 回転数 $i(V; p)$ は p の周りを平面とみる見方や向きの方
向によらない。例えば、3次元空間の曲面を表からみて $i(V; p)$ を計算しても、裏からみて計算しても同じ値を得る。

例 1.2.

- (1) 図 2 において、特異点 p の周りの回転数は 1 である。
- (2) 同様に図 3~6 でも特異点 p の周りの回転数を考えると、図 3 と図 4 においては 1、図 5 においては -1、図 6 においては 2 である。

曲面上のベクトル場の指数を次のように定義する。

定義 1.4. 曲面 X 上のベクトル場 V は有限個の特異点 p_1, p_2, \dots, p_n をもつとする。た
だし、 X が境界をもつ場合どの p_i も X の境界上にはないものとする。このとき、 V の
指数 $i(V)$ を次式で定める：

$$i(V) = i(V; p_1) + i(V; p_2) + \dots + i(V; p_n) .$$

例 1.3.

\mathbb{D}^2 上のベクトル場 $V(x, y) = (4x^3 - 3x, -4y^3 + 3y)$ (図 7) を考える。 $i(V; p_1) = -1, i(V; p_2) = 1, i(V; p_3) = 1, i(V; p_4) = 1, i(V; p_5) = 1$ より、ベクトル場 V の指
数 $i(V)$ は

$$\begin{aligned} i(V) &= i(V; p_1) + i(V; p_2) + i(V; p_3) + i(V; p_4) + i(V; p_5) \\ &= (-1) + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

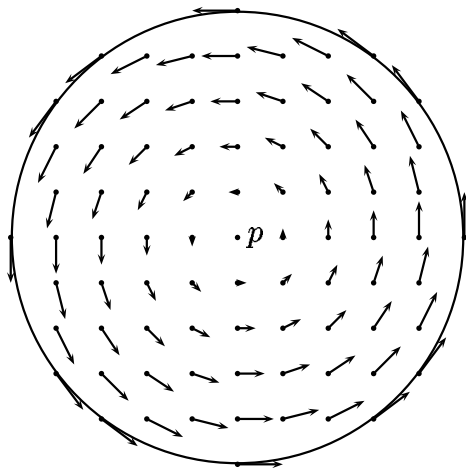


图 3 $V(x, y) = (-y, x)$

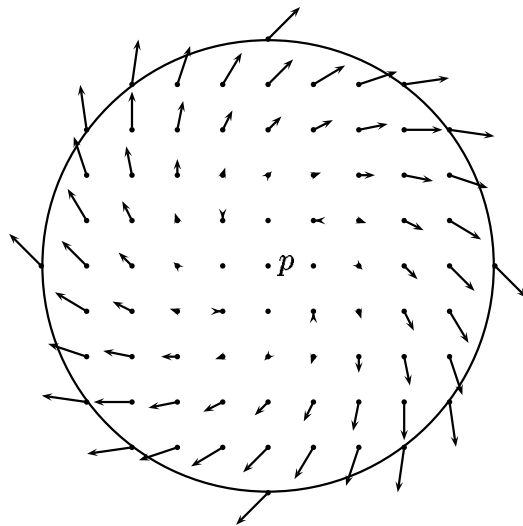


图 4 $V(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y))$

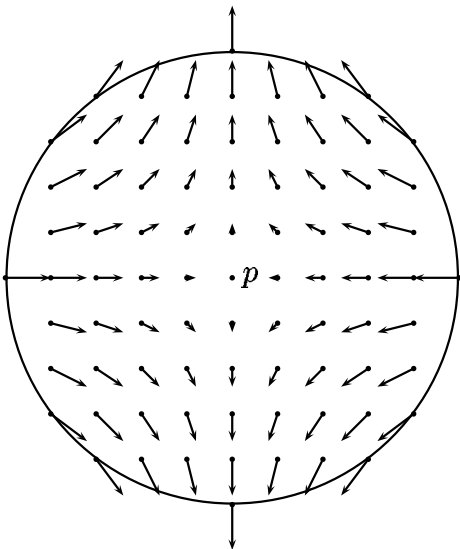


图 5 $V(x, y) = (-x, y)$

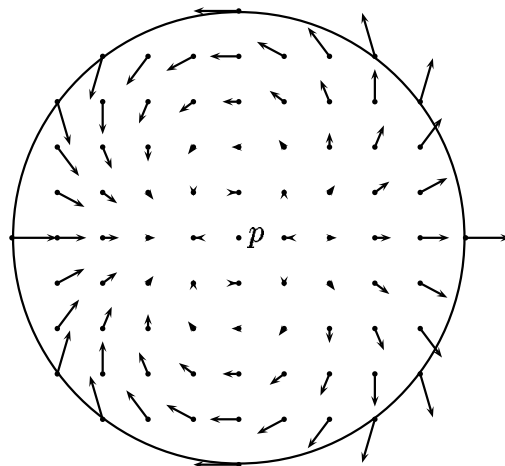


图 6 $V(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

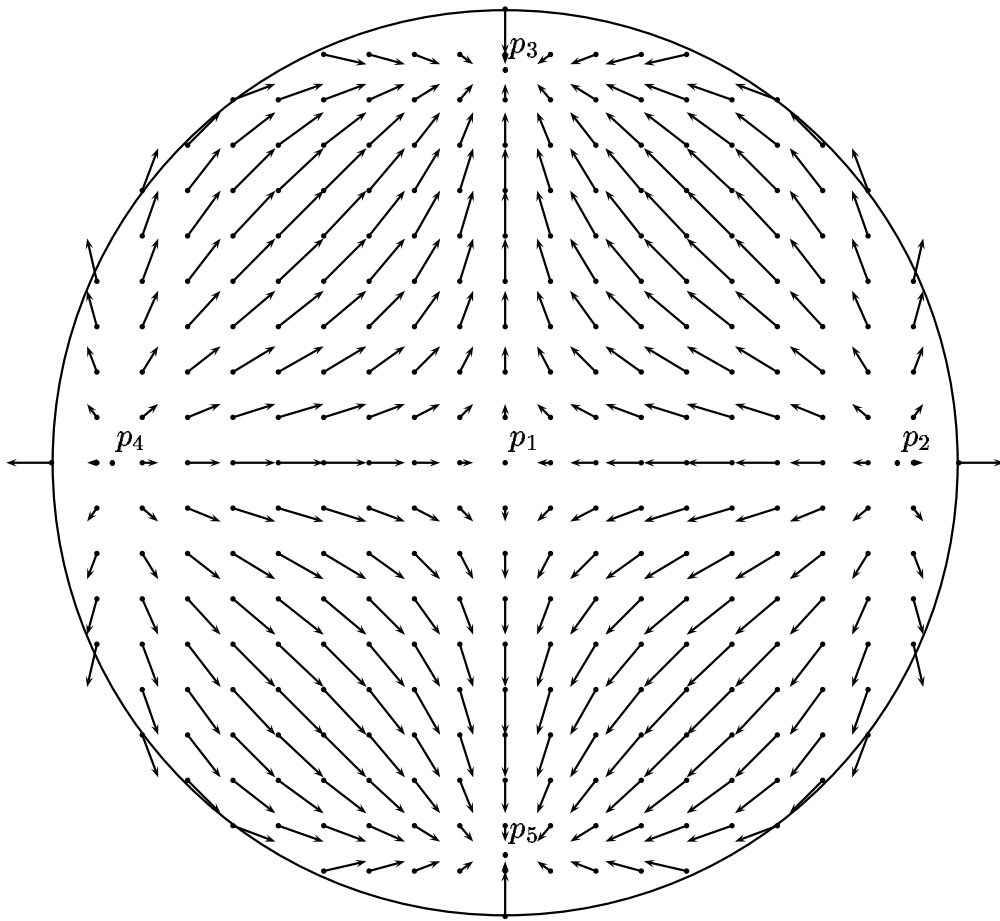


图 7 $V(x, y) = (4x^3 - 3x, -4y^3 + 3y)$

2 ベクトル場の変形

ベクトル場を連続的に変形すると、それに対応して特異点の様子も色々変わる。この節では色々な具体例でその様子を観察する。

まず、より複雑な \mathbb{D}^2 上のベクトル場を考えるために、ベクトル場の合成について述べる。

\mathbb{R}^2 上のベクトル場 V, W を考える。 V を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 移動したものを V' 、 W を x 軸方向に $-\frac{1}{2}$ 移動したものを W' とすると、 V, W を合成してできるベクトル場 U は：

$$U(x, y) = g(x)V'(x, y) + (1 - g(x))W'(x, y)$$

で表される。ただし、 $g(x)$ とは附録 A の (1) 式のことである。

以下の例で、実際にベクトル場の合成を行う。合成して得られたベクトル場は定義域を \mathbb{D}^2 に制限して描画を行う。

例 2.1.

(1) ベクトル場 $V(x, y) = (-x, y)$, $W(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y))$ を考える。このとき $g(x)V'(x, y)$ は図 8、 $(1 - g(x))W'(x, y)$ は図 9 で表される。 V と W を合成したベクトル場 $U(x, y)$ は図 10 のようになり、 U の特異点は p_1, p_2 である。このとき $i(U) = i(U; p_1) + i(U; p_2) = (-1) + 1 = 0$ となる。

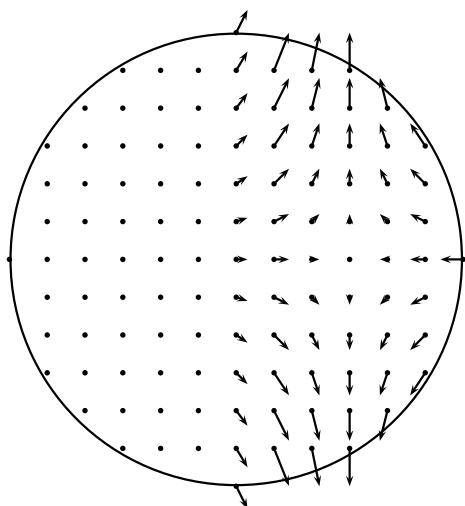


図 8 $g(x)V'(x, y)$

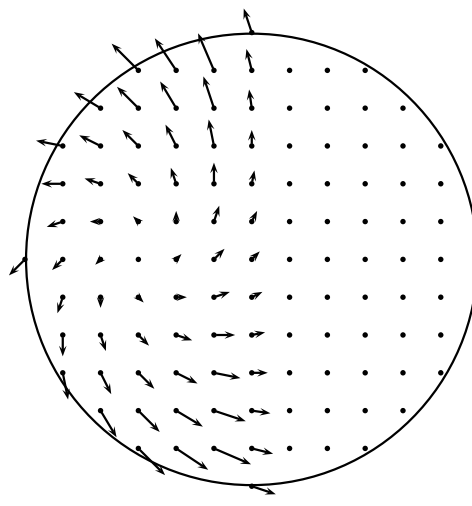


図 9 $(1 - g(x))W'(x, y)$

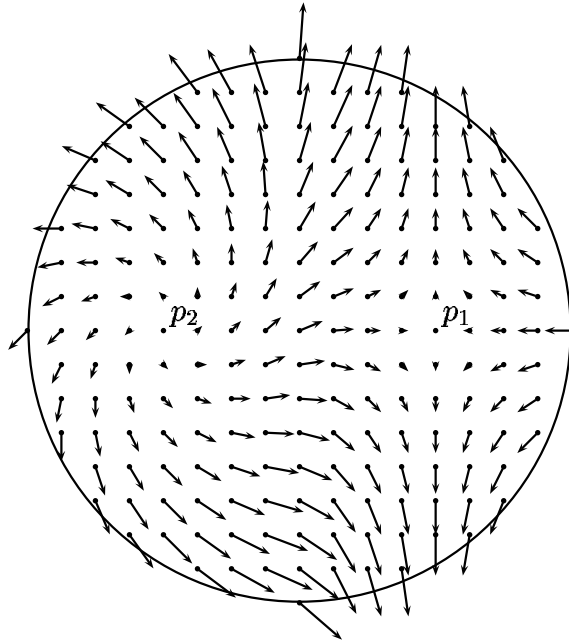


図 10 $U(x, y) = g(x)V'(x, y) + (1 - g(x))W'(x, y)$

(2) ベクトル場 $V(x, y) = (-x, y)$, $W(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ を考える。このとき $g(x)V'(x, y)$ は図 11、 $(1 - g(x))W'(x, y)$ は図 12 で表される。 V と W を合成したベクトル場 $U(x, y)$ は図 13 のようになり、 U の特異点は p_1, p_2 である。このとき $i(U) = i(V; p_1) + i(V; p_2) = 2 + (-1) = 1$ となる。

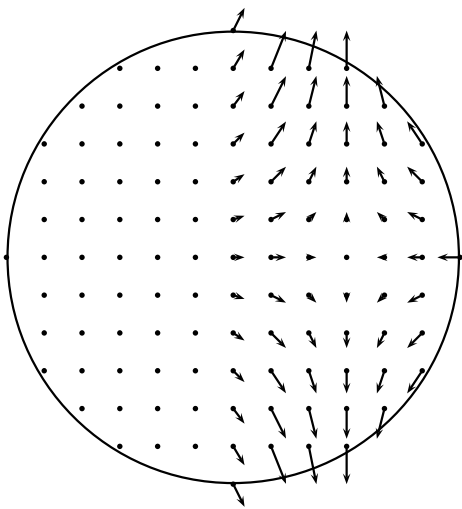


図 11 $g(x)V'(x, y)$

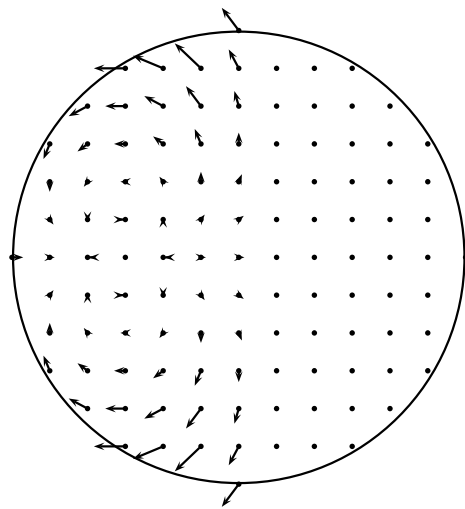


図 12 $(1 - g(x))W'(x, y)$

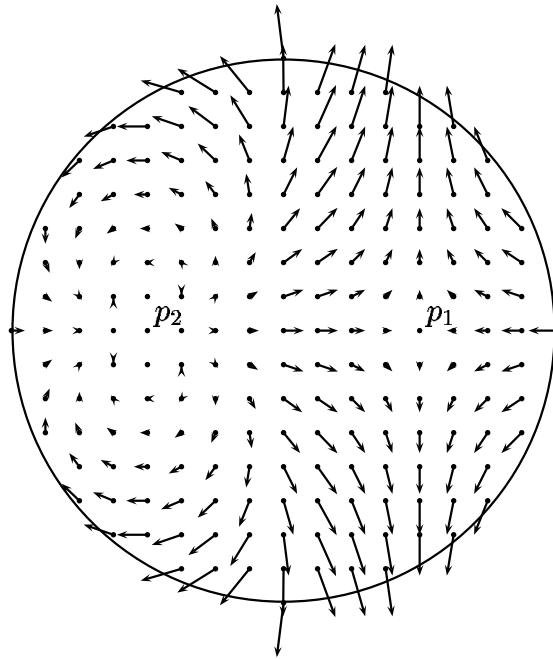


図 13 $U(x, y) = g(x)V'(x, y) + (1 - g(x))W'(x, y)$

(3) ベクトル場 $V(x, y) = (x, y)$, $W(x, y) = (-x, y)$ を考える。このとき $g(x)V'(x, y)$ は図 14、 $(1 - g(x))W'(x, y)$ は図 15 で表される。V と W を合成したベクトル場 $U(x, y)$ は図 16 のようになり、U の特異点は p_1, p_2 である。このとき $i(U) = i(U; p_1) + i(U; p_2) = 1 + (-1) = 0$ となる。

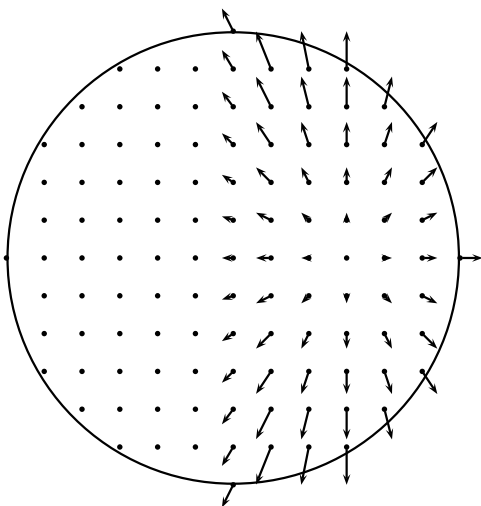


図 14 $g(x)V'(x, y)$

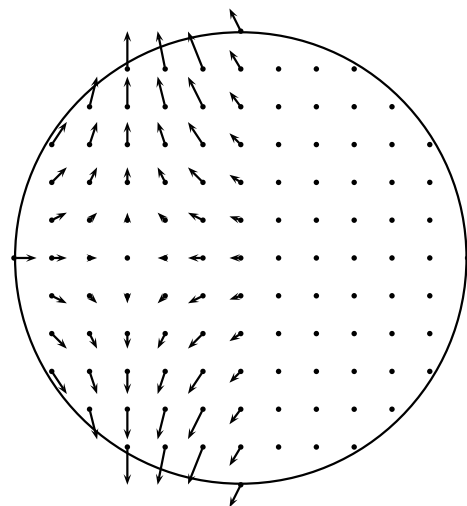


図 15 $(1 - g(x))W'(x, y)$

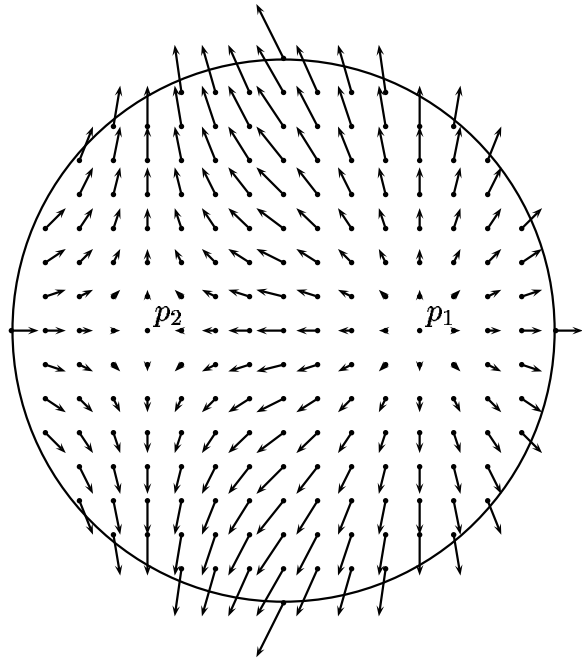


図 16 $U(x, y) = g(x)V'(x, y) + (1 - g(x))W'(x, y)$

(4) ベクトル場 $V(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y))$, $W(x, y) = (x, y)$ を考える。このとき $g(x)V'(x, y)$ は図 17、 $(1 - g(x))W'(x, y)$ は図 18 で表される。V と W を合成したベクトル場 $U(x, y)$ は図 19 のようになり、U の特異点は p_1, p_2, p_3 である。このとき $i(U) = i(U; p_1) + i(U; p_2) + i(U; p_3) = 1 + 1 + (-1) = 1$ となる。

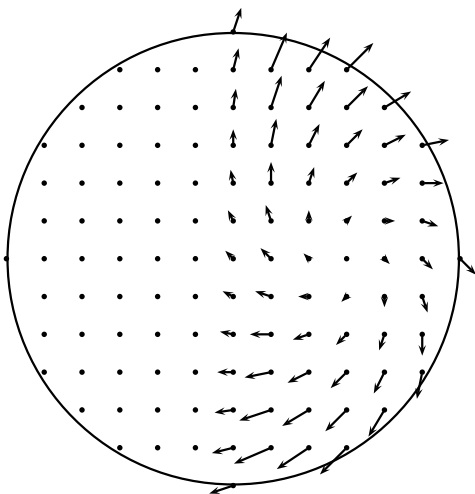


図 17 $g(x)V'(x, y)$

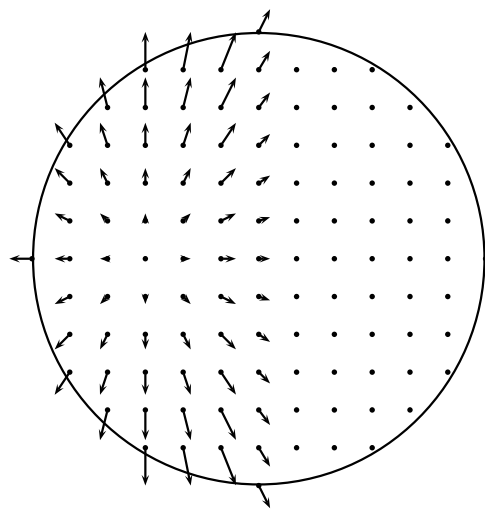


図 18 $(1 - g(x))W'(x, y)$

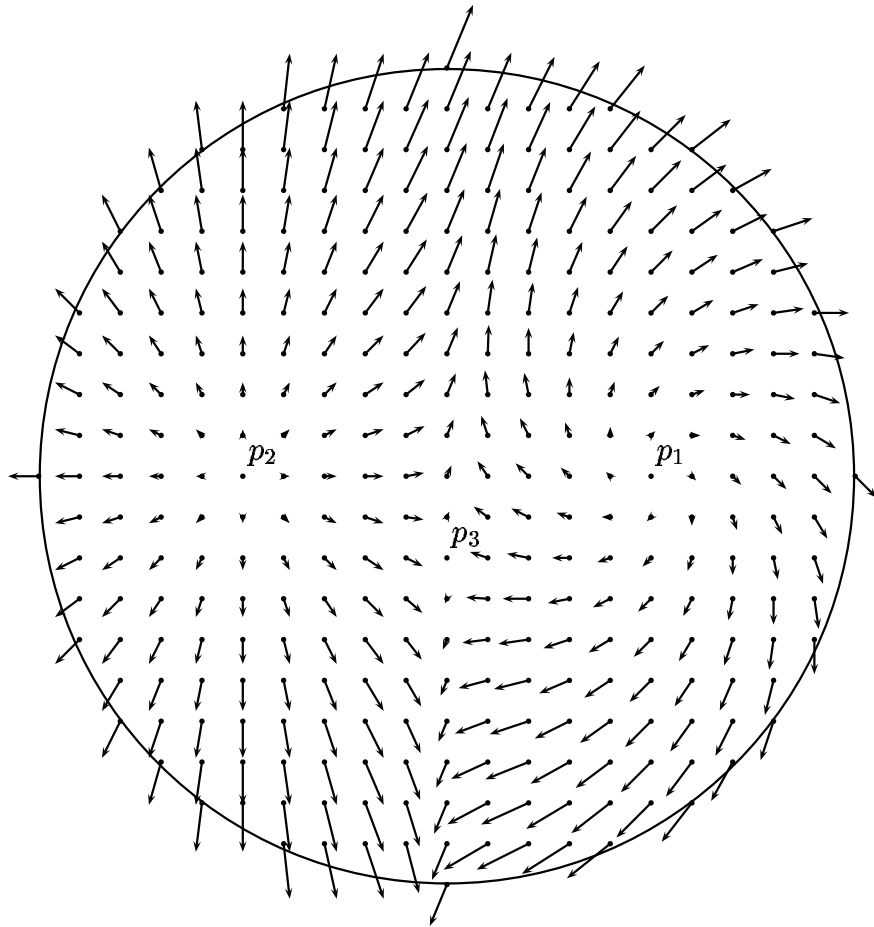


图 19 $U(x, y) = g(x)V'(x, y) + (1 - g(x))W'(x, y)$

例 2.2. 次にベクトル場の連続的な変形によって特異点の様子が変化していく例をみる。
 (1) 例 1.1 の (3) で得られた指数 0 のベクトル場 U の特異点の位置を互いに近づけていくと、特異点がぶつかり合い消滅する様子を観察する。(図 20 ~ 23) このように指数 0 のベクトル場に特異点がいくつかある場合、連続的な変形によって特異点を無くすことができる。また、逆の作業を行うことで特異点の無いベクトル場に特異点を作ることができる。

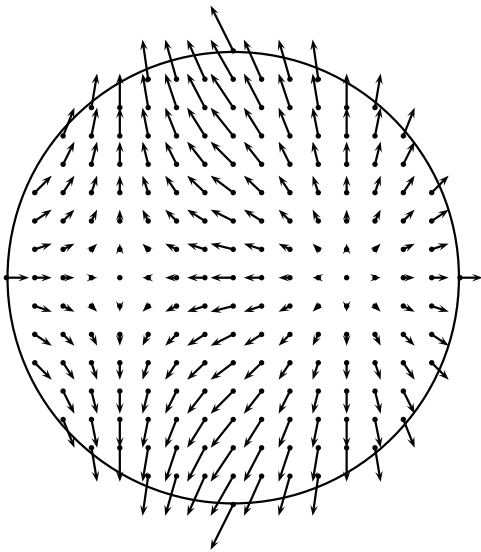


図 20

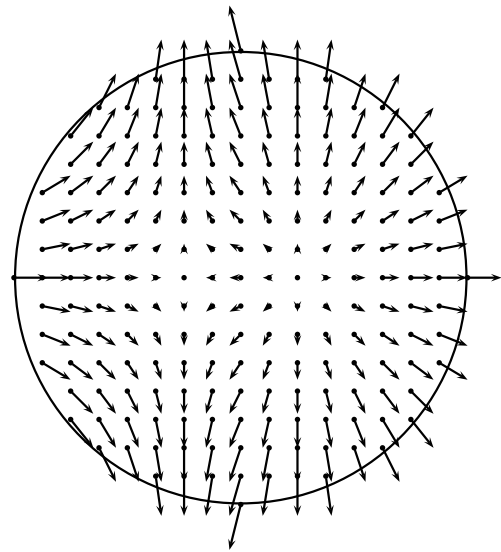


図 21

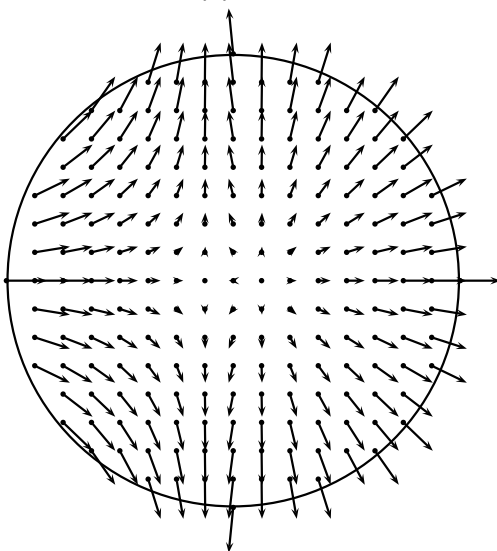


図 22

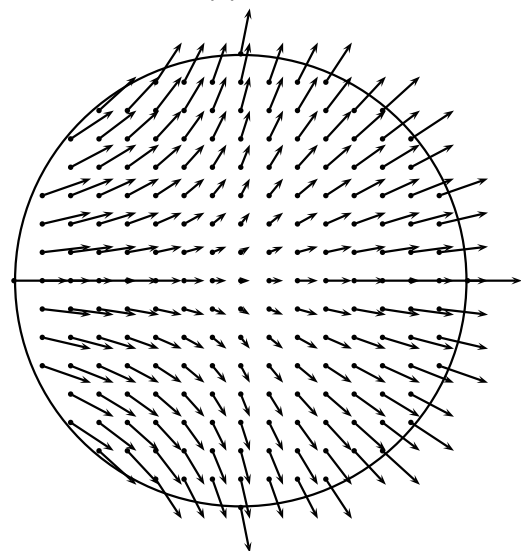


図 23

(2) 例 1.1 の (4) で得られた指数 1 のベクトル場 U を連続的に変形してベクトル場 W に変えることを考える。(図 24~29):

$$U_t(p) = (1-t)U(p) + tW(p)$$

を用いてベクトル場 $U(t=0)$ からベクトル場 $W(t=1)$ に変化させる。このとき、 $i(U) = i(W)$ であることに注意する。

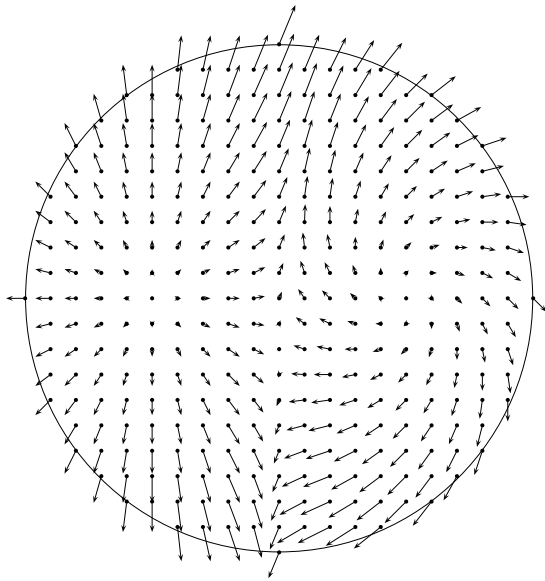


図 24 $V_0(p) = V$

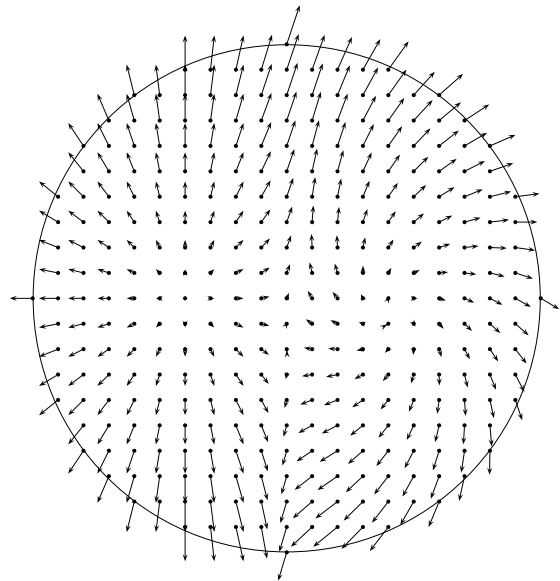


図 25 $V_{0.2}(p)$

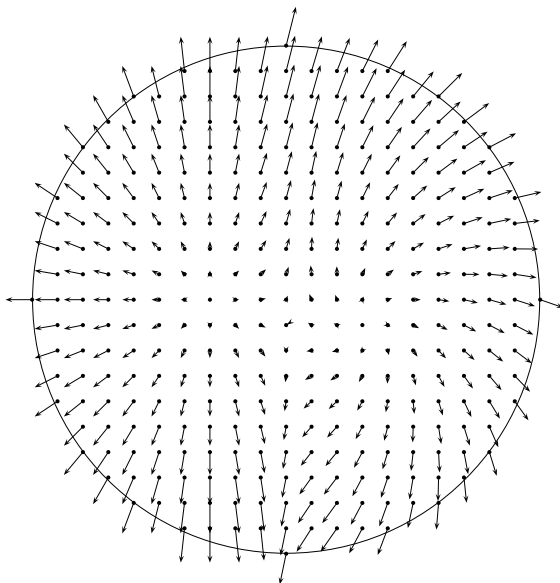


図 26 $V_{0.4}(p)$

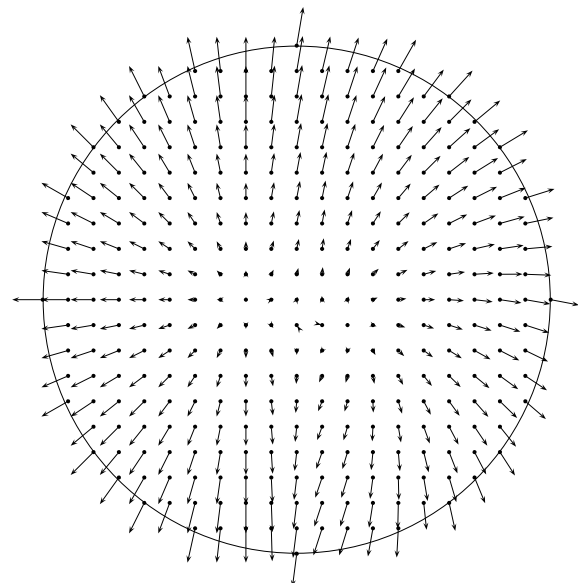


図 27 $V_{0.6}(p)$

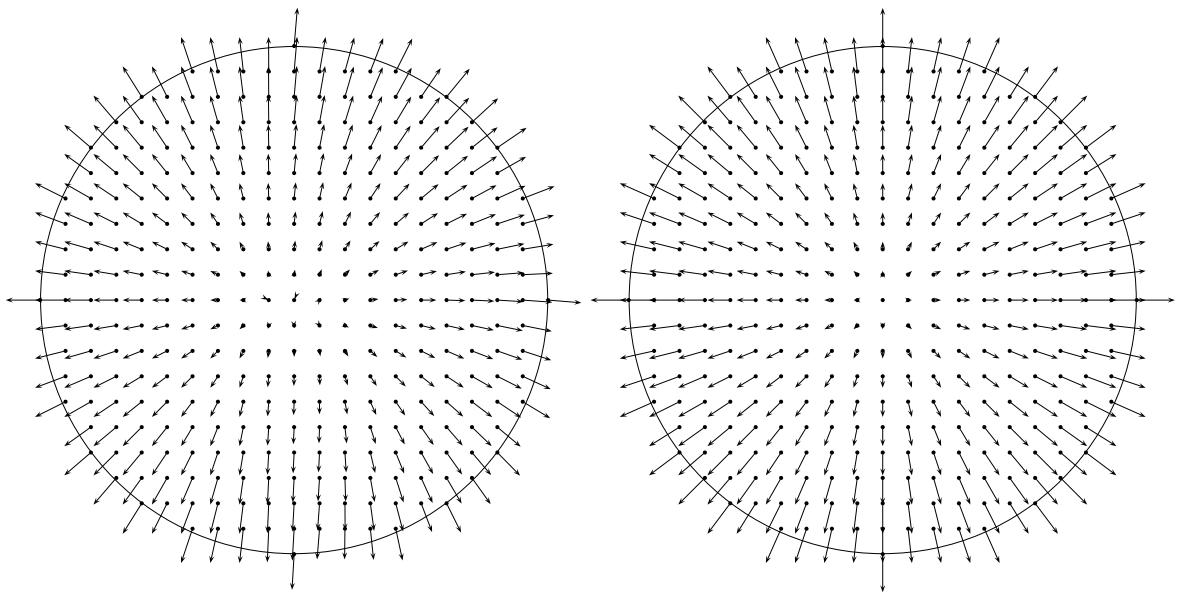


图 28 $V_{0.8}(p)$

图 29 $V_1(p) = W$

(3) ここでは指数 3 で原点だけに特異点 (p_1) をもつベクトル場 $V(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ の特異点が 3 つ (p_1, p_2, p_3) に分裂する様子を見る (図 30~33)。特異点の分裂後を見ると、3 つある特異点は全て回転数が 1 であり、分裂後も指数に変化がないことがわかる。

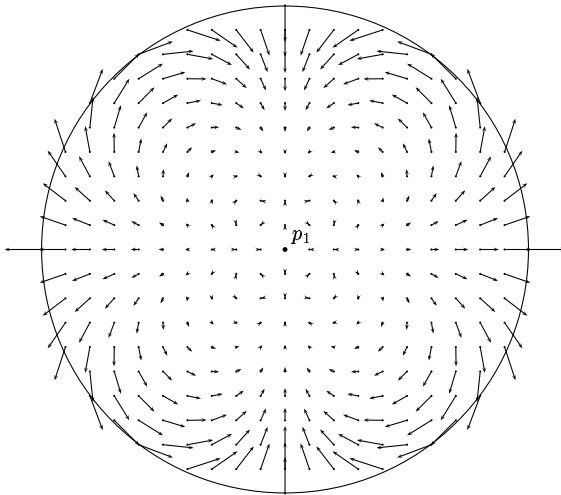


図 30

$$V(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$$

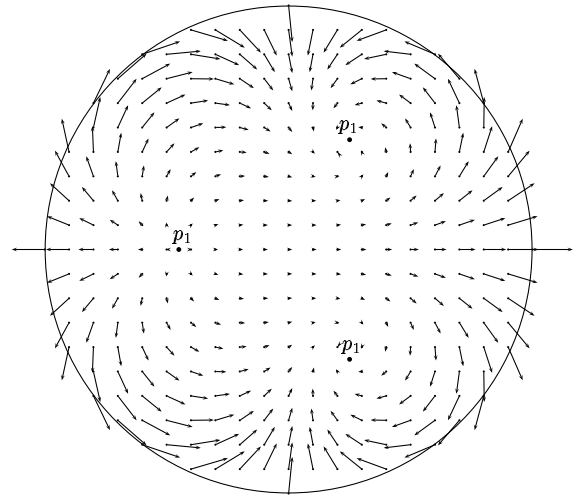


図 31

$$V(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + 0.1, 3x^2y - y^3)$$

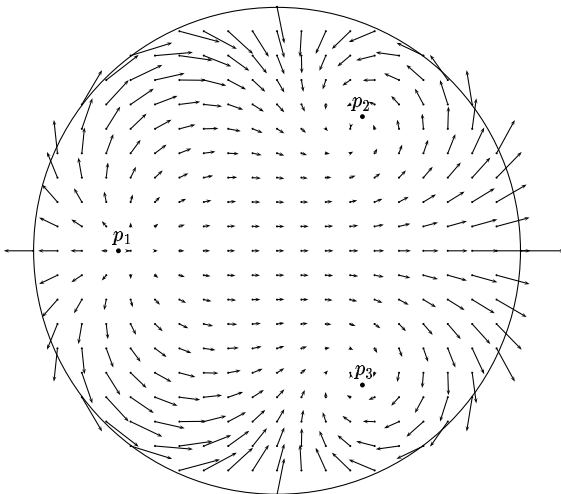


図 32

$$V(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + 0.2, 3x^2y - y^3)$$

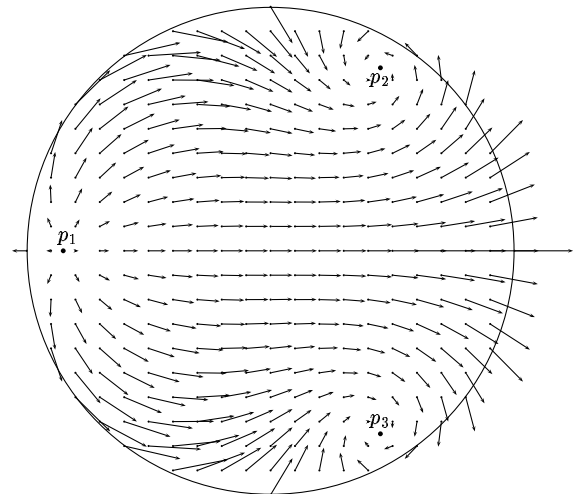


図 33

$$V(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + 0.6, 3x^2y - y^3)$$

3 閉曲面上のベクトル場

本節では、閉曲面上のベクトル場の指数について考察していく。まず球面 S^2 の場合を考える。

定理 3.1. S^2 上で特異点が有限個のベクトル場 V, W を考えると、次式が成り立つ:

$$i(V) = i(W).$$

例 3.1.

(イ) 地球儀の経線を北から南に沿うようなベクトル場 V を考える。このとき、地球儀の北極点 N は V の特異点で、南極点 S も V の特異点である。ここで特異点 N の周りのベクトル場は図 34 のようになるから、 $i(V; N) = 1$ である。一方、特異点 S の周りのベクトル場は図 35 のようになるから、 $i(V; S) = 1$ である。このことから、 $i(V) = 1 + 1 = 2$ である。

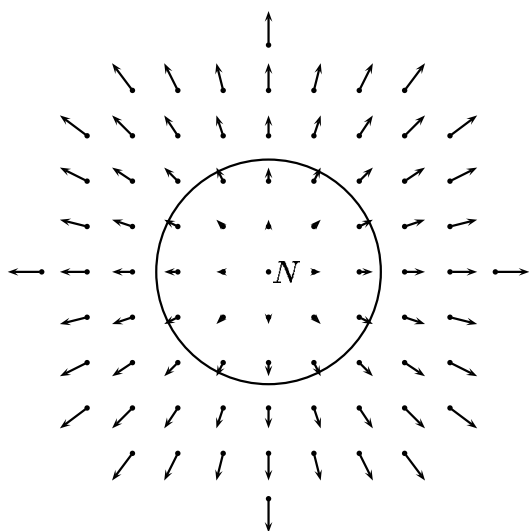


図 34 V の N の周りのベクトル場

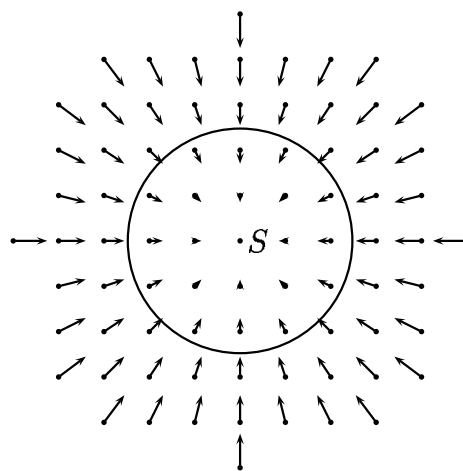


図 35 V の S の周りのベクトル場

(ロ) 地球儀の緯線を西から東に沿うようなベクトル場 W を考える。このとき、地球儀の北極点 N は W の特異点で、南極点 S も W の特異点である。ここで特異点 N の周りのベクトル場は図 36 のようになるから、 $i(W; N) = 1$ である。一方、特異点 S の周りのベクトル場は図 37 のようになるから、 $i(W; S) = 1$ である。このことから、 $i(W) = 1 + 1 = 2$

である。

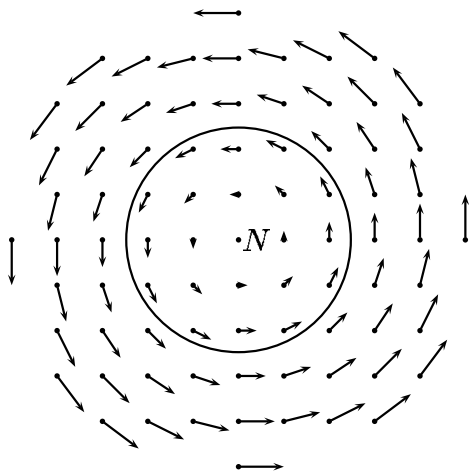


図 36 W の N の周りのベクトル場

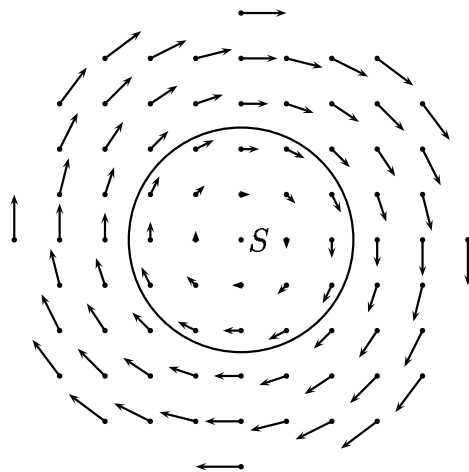


図 37 W の S の周りのベクトル場

上の定理は次のような方針で証明する。各実数 $t(0 \leq t \leq 1)$ に対し、ベクトル場 V_t を

$$V_t(p) = (1 - t)V(p) + tW(p)$$

で定める。これは $V_0 = V$ から $V_1 = W$ への変形を与えている。必要ならば、この $\{V_t\}$ をごくわずかに動かすことにより、各 V_t は有限個の特異点しかもたないようにできる。さらに t が 0 から 1 まで変わるとき、 $i(V_t)$ の値が一定であることもわかる。(ここで横断性に関する議論が必要になるが、ここではそれに触れない。)

定理を認めれば、上の (イ)、(ロ) より S^2 上のベクトル場の指数は必ず 2 になることがわかる。これは S^2 のオイラー標数 $\chi(S^2)$ と等しい。つまり、 $i(V) = \chi(S^2)$ が成り立つ。これは偶然ではなく、一般の向き付け可能な閉曲面でも成り立つことで、次の定理が知られている。

定理 3.2. (Poincaré-Hopf の定理)

閉曲面 X 上のベクトル場 V が有限個の特異点しかもたないならば、その指数 $i(V)$ は X のオイラー標数 $\chi(X)$ に等しい。

証明

まず、ベクトル場 W で指数が $\chi(X)$ と等しくなるものを構成する。 X のなめらかな三角形分割を使用する。 S^2 の場合、 S^2 に内接する正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ の表面を膨らませ

たもの (図 38) を考えると、 S^2 のオイラー標数は

$$\begin{aligned}\chi(S^2) &= (\text{頂点}) + (\text{辺}) - (\text{面}) \\ &= 4 + 6 - 4 \\ &= 2\end{aligned}$$

で与えられる。 S^2 以外の閉曲面も、なめらかな三角形分割をもつことが知られている。

この三角形分割の各 2 単体上に図 39 のようにベクトル場を定め、 X 上のベクトル場 W を作る:

1. 各頂点 P は特異点で、 $i(W; P) = 1$
2. 各辺の中点 Q は特異点で、 $i(W; P) = -1$
3. 各面の重心 R は特異点で、 $i(W; R) = 1$
4. 1,2,3 以外の特異点なし

すると、明らかに $i(W) = \chi(X)$ が成り立つ。 $i(V)$ と $i(W)$ が等しいことは、 S^2 の場合と同じようにして示すことができるので、 $i(V) = \chi(X)$ がわかる。□

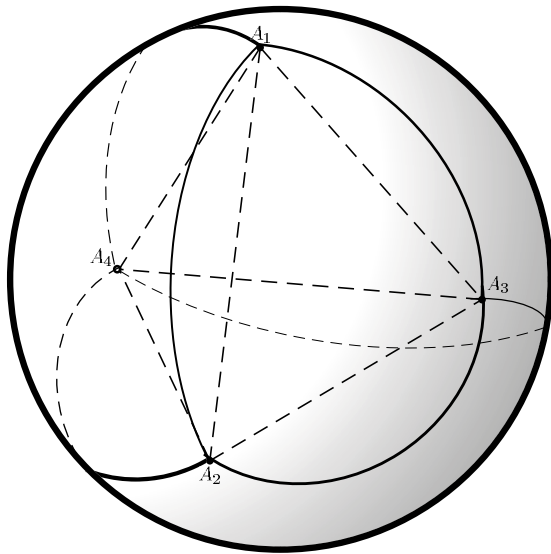


図 38 S^2 の三角形分割

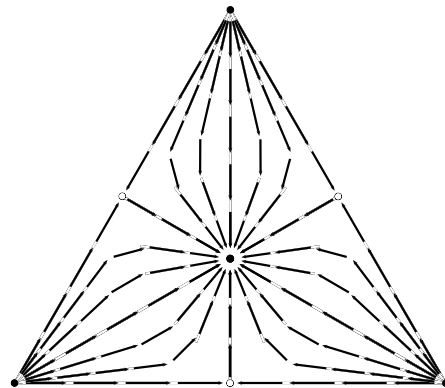


図 39 ベクトル場 W

4 円板上のベクトル場

前節では閉曲面上においての Poincaré-Hopf の定理を導いた。本節では、境界のある曲面においての Poincaré-Hopf の定理を導くための準備として、 \mathbb{D}^2 上のベクトル場の指数を考察する。

定理 4.1. 円板 \mathbb{D}^2 上のベクトル場 V を考える。 V の特異点は有限個で、 \mathbb{D}^2 の境界上のベクトルがすべて外向きであるとき、 $i(V) = 1$ が成り立つ。

ここで、境界上のベクトルが外向きであるとは、図 40 で境界上の点 p から出るベクトルが矢印の範囲内にあることをいう。

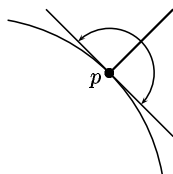


図 40

証明の方針

ベクトル場 $W(x, y) = (x, y)$ を考える。 W は原点にのみ特異点をもち、境界上のベクトルはすべて外向きであり、 $i(W) = 1$ である。前節と同様に:

$$V_t(p) = (1 - t)V(p) + tW(p)$$

を用いて、ベクトル場 $V(t = 0)$ を、ベクトル場 $W(t = 1)$ へとなめらかに変化させる。 t が 0 から 1 まで変わるとき、 V_t の境界上に特異点は生まれず、境界上のベクトルは常に外を向いている。従って $i(V_t)$ は一定であり、 $i(V) = i(W)$ がわかる。特に $i(W) = 1$ なので、 $i(V) = 1$ である。□

ところで、 V_t の境界 S^1 上のベクトル場の回転数を $r(V_t|S^1)$ とすると、 $r(V_t|S^1) = 1$ で一定かつ、 $i(V_t) = 1$ と一致している。これは境界上で外向きのベクトル以外をもつベクトル場でもいえることで、次の定理が成り立つ。

定理 4.2. 円板 \mathbb{D}^2 上のベクトル場 V を考える。 V の特異点が有限個で、境界 S^1 上にな

いとき、

$$i(V) = r(V|S^1)$$

が成り立つ。

注意. 定理 4.1 で述べた、境界上のベクトルの向きが外向きの場合には $r(V|S^1) = 1$ となっている。

定理 4.2 を証明するために、次の定理を利用する。

定理 4.3. v を S^1 上の平面ベクトル場で特異点をもたないものとする。このとき、 \mathbb{D}^2 上のベクトル場 V で次の 2 条件をみたすものが存在する。

- (1) $V|S^1 = v$
- (2) $r(v) \neq 0$ の場合は原点にただ 1 つの特異点をもち、 $r(v) = 0$ の場合は V は特異点をもたない

v がなめらかならば、 V もなめらかなものがとれる。

証明

与えられたベクトル場 $v : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ に対し新しいベクトル場 $\hat{v} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ を

$$\hat{v}(p) = \frac{v(p)}{|v(p)|}$$

で定める。 v は \hat{v} にホモトピック ($v \simeq \hat{v}$) である。実際、 $(1-t)v(p) + t\hat{v}(p)$ が v から \hat{v} へのホモトピーを与えている。このホモトピーで回転数は保たれる: $i(v) = i(\hat{v})$ 。

明らかに $|\hat{v}(p)| = 1$ であるから、 \hat{v} に対して、関数 $\phi = \phi(\theta)$ で次をみたすものが存在する:

$$\hat{v}(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \phi(\theta), \sin \phi(\theta))$$

このとき、 $\phi(2\pi) - \phi(0) = 2n\pi$ となる。ただし、 n は $r(v)(= r(\hat{v}))$ である。関数 ψ を $\psi(\theta) = n\theta$ と定める。 ϕ は ψ とホモトピックであり、 \hat{v} は $\tilde{v}(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \psi(\theta), \sin \psi(\theta))$ で定まるベクトル場 \tilde{v} に変形できる。この \tilde{v} は \mathbb{D}^2 全体のベクトル場 \tilde{V} に次のように拡張する:

$$\tilde{V}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} (r^n \cos \theta, r^n \sin \theta) & (n \geq 0) \\ (r^n \cos \theta, -r^n \sin \theta) & (n < 0) \end{cases}$$

さて、 \mathbb{D}^2 を半径 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ の円周で区切って 3 つの領域に分け、 $\mathbb{D}^2 - \frac{2}{3}\mathring{\mathbb{D}}^2$ では、 v から \hat{v} への変形のコピーを、 $\frac{2}{3}\mathbb{D}^2 - \frac{1}{3}\mathring{\mathbb{D}}^2$ では、 \hat{v} から \tilde{v} への変形のコピーを、そして、 $\frac{1}{3}\mathbb{D}^2$ では \tilde{V} のコピーを考えると求める V が得られる。 v がなめらかな場合は、接続部でなめらかになるように近似を行うことにより、 V もなめらかにできる。□

注意. 上の \tilde{V} は、平面を複素数平面 \mathbb{C} と考えるときは、

$$\tilde{V}(z) = \begin{cases} z^n & (n \geq 0) \\ \bar{z}^n & (n < 0) \end{cases}$$

と表すこともできる。

この定理 4.3 を用いて、定理 4.2 の証明をする。

証明

定理 4.3 を用いて $V|S^1 = W|S^1$ となるベクトル場 W で原点 O のみに特異点をもつものをつくる。このとき、 $i(W; O) = r(W|S^1) = r(V|S^1)$ がわかる。さて、 V から W への変形を考える:

$$(1-t)V(p) + tW(p)$$

この変形でベクトル場の指数は変わらない。従って、 $i(V) = i(W) = i(W; O) = r(V|S^1)$ となる。□

5 境界のある曲面における Poincaré-Hopf の定理

本節では前節で作った定理を用いて境界のある曲面における Poincaré-Hopf の定理を導いていく。まず、定理を述べるために重要な栓数を定義する。

定義 5.1. 境界のあるコンパクトな曲面 X を考える。その境界 $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ に、 X が閉曲面になるように円板 Y_i をはりつける。 V は $\partial Y_i = c_i$ 上のベクトル場を定めるが、 Y_i を \mathbb{D}^2 と同一視することにより、これを S^1 上の平面ベクトル場とすることができる。このベクトル場の回転数を V の c_i における栓数とよび、 $s(V; c_i)$ とかく。

例 5.1. \mathbb{D}^2 上のベクトル場 V を考える。 V に対して $i(V) = r(V|c)$ が成り立っている。この値を n とおく。一方、 c に円板 Y をはりつけることを考える。このとき、 V の c における栓数 $s(V; c)$ と n に関し、等式

$$n + s(V; c) = 2$$

が成り立つ。これは、 V を前節の方法で Y 上に拡張してできる $\mathbb{D}^2 \cup Y = S^2$ 上の接ベクトル場の指数が $n + s(V; c)$ になることからわかる。よって

$$s(V; c) = 2 - n$$

となる。

ここから、境界のある曲面における Poincaré-Hopf の定理について述べていく。

定理 5.2. 境界 $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ をもつコンパクトな曲面 X 上のベクトル場 V が有限個の特異点しか持たず、どの特異点も境界上にはないならば、次式が成り立つ:

$$i(V) = \chi(X) - \sum_{i=1}^n (s(V; c_i) - 1).$$

証明

図 41 のような、境界 $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ をもつ曲面 X を考える。 X 上のベクトル場 V の特異点は有限個で、どれも境界上にはないとする。この X の各境界 c_i に対して円板 Y_i をはりつけてできる閉曲面を W (図 42) とする。このとき、前節の定理 4.3 を用いてベクトル場 V を Y_i 上に拡張すると、原点のみに特異点をもつかまたは特異点を全くもたない、 $i(v_i) = s(V|c_i)$ となる Y_i 上のベクトル場 v_i がつくられる。このとき、閉曲面 W に

ついでに Poincaré-Hopf の定理より

$$i(V) + \sum_{i=1}^n s(V; c_i) = \chi(W)$$

であることがわかる。 $\chi(S^1) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \chi(W) &= \chi(X) + \sum_{i=1}^n \chi(Y_i) \\ &= \chi(X) + n \end{aligned}$$

となり、上の式とあわせると、

$$\begin{aligned} i(V) + \sum_{i=1}^n s(V; c_i) &= \chi(X) + n \\ i(V) &= \chi(X) + n - \sum_{i=1}^n s(V; c_i) \\ &= \chi(X) - \sum_{i=1}^n (s(V; c_i) - 1) \quad \square \end{aligned}$$

注意.

(1) X 上のベクトル場 V が境界ですべて外を向いている場合を考えると $s(V; c_i) = 1$ となるため、定理より、 $i(V) = \chi(X)$ である。

(2) $s(V; c_i) - 1$ とは、 $V|_{c_i}$ の回転数と Y_i の外向き法線ベクトル場の回転数との差であると考えられる。

(3) この定理は、Morse が 1929 年に発見した定理:

$$i(V) = \chi(X) - i(\partial_- V)$$

の特別な場合であるということを後に知った。詳しくは [4] を参照していただきたい。

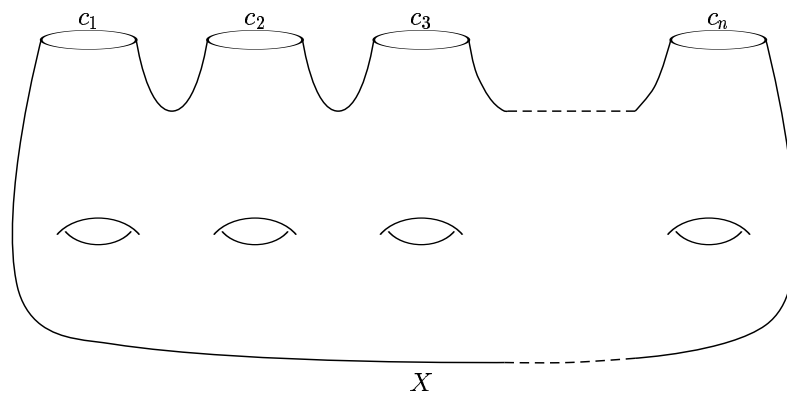


図 41 境界をもつ曲面 X

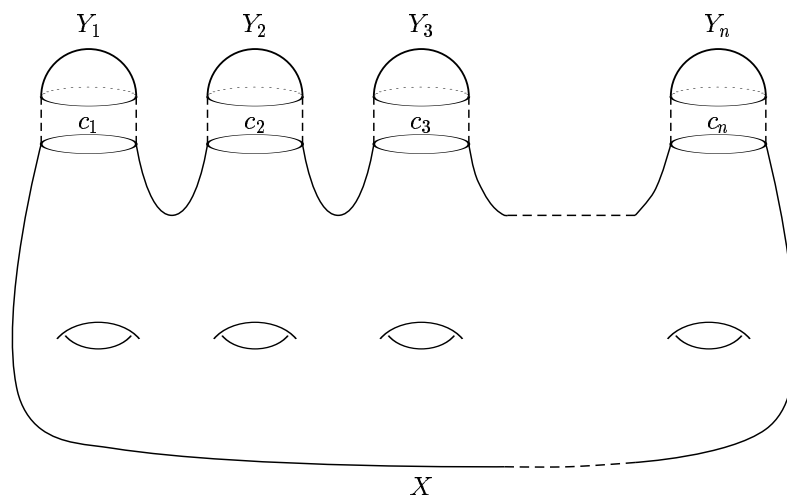


図 42 閉曲面 W

6 つむじ

本節では人間のつむじ (特異点) について考える。

髪の毛の生えている頭を半球 X と思い、 X 上の点 (毛穴) を $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 、 p_i から生える髪の毛の p_i における単位接ベクトルを v_{p_i} とする。 p_i での接平面へ v_{p_i} を直交射影したものを $V(p_i)$ とし、 $V(p_i)$ たちが X 上の接ベクトル場 V に連続に拡張していると仮定する (図 43)。いわゆるつむじは、このベクトル場 V の特異点に対応している。重力により、 X のふちでは髪の毛は下向きに生えていると考えれば、 V は ∂X で外向きである。

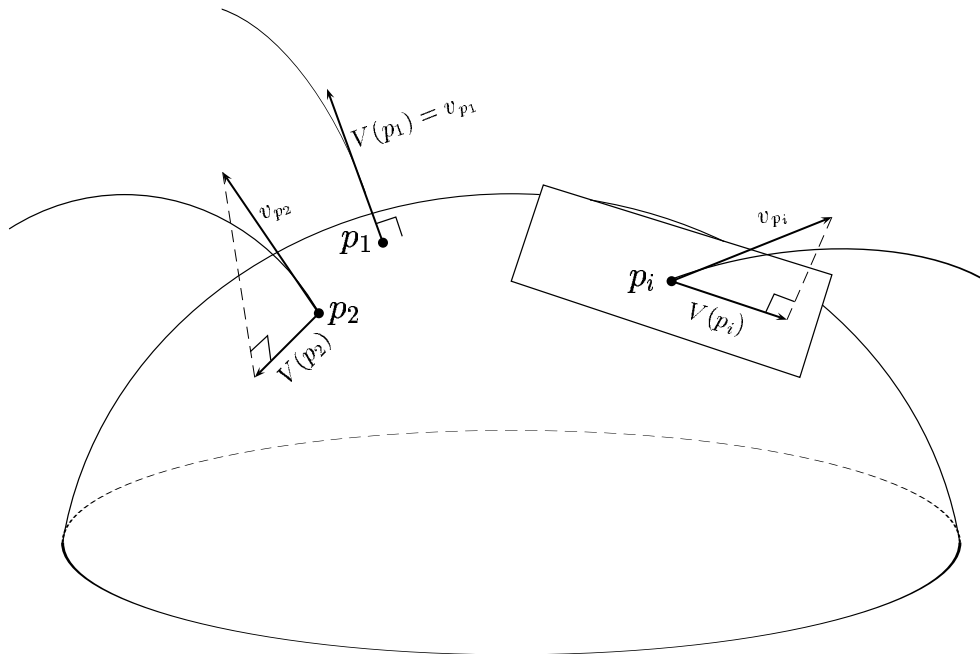


図 43 頭 X

例 6.1. ここではよくあるつむじから得られるベクトル場を観察する。

- (1) つむじを中心として右巻きに生える髪の毛をベクトル場で表したもの (図 44) で、 $i(V) = 1$ となる。
- (2) つむじを中心として左巻きに生える髪の毛をベクトル場で表したもの (図 45) で、こちらも $i(V) = 1$ となる。

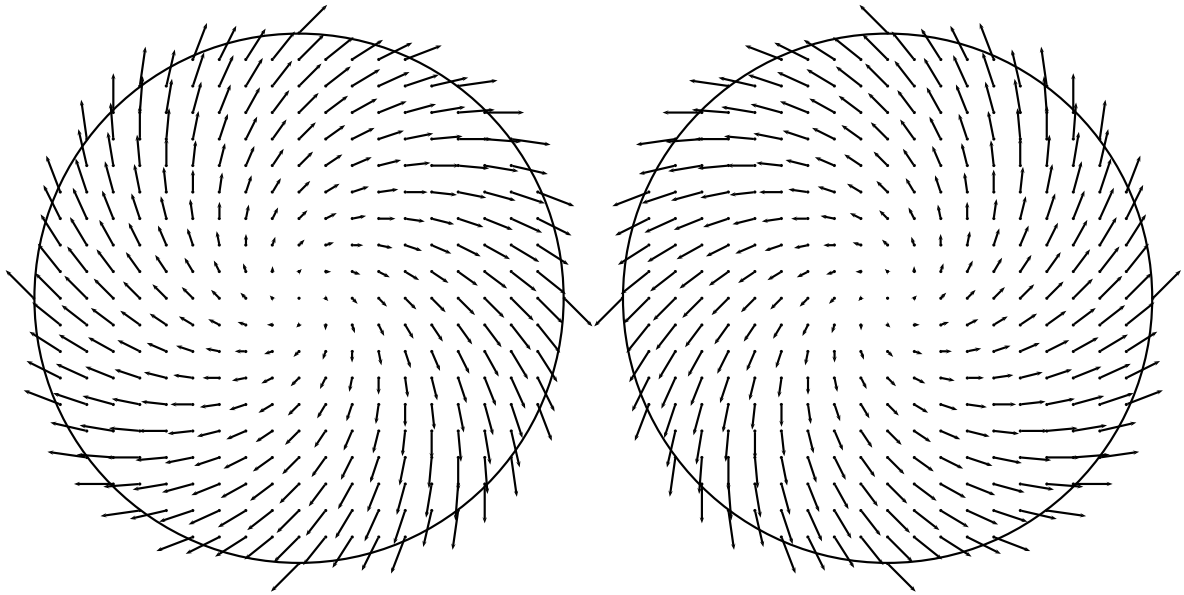


図 44 $V(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y))$ 図 45 $V(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y))$

もしつむじが (1)(2) のようなものばかりであれば、つむじ (特異点) の個数は 1 つに限られる。もしこのようなタイプのつむじが 2 つ以上あるとすれば、 $i(V) \geq 2$ となり、公式

$$i(V) = \chi(X) = 1$$

に反するからである。しかし、つむじを 2 つ以上もつ人は現実に存在している。この場合はこの節の最初に仮定した条件がみたされていないと考えられる。

これは余談であるが、実際につむじが 2 個ある人に話を聞いたところ、髪の毛をセットしにくいとのことだった。人間って不思議だなあと考えさせられた。

付録 A 1 の分割

付録として、ベクトル場の一部分を取り出すための関数をつくる。〈step1〉、〈step2〉では関数について、〈step3〉ではつくった関数の使い方を説明する。

〈step1〉まず、 $t \leq 0$ では $f(t) = 0$ であり、 $t > 0$ では単調増加で限りなく 1 に近づくような関数 $f(t)$ をつくる (図 46):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{e^{\frac{1}{t}}} & (t > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

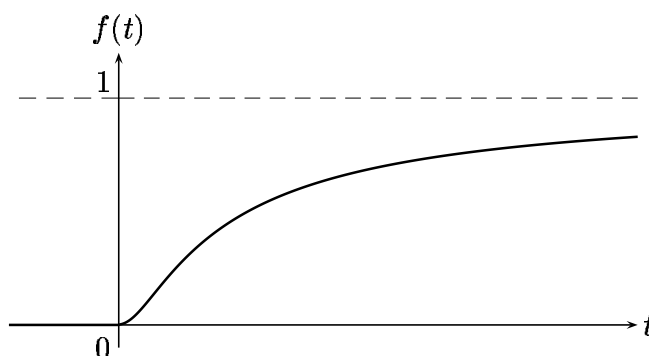


図 46 $f(t)$ のグラフ

〈step2〉次に 〈step1〉 の関数を用いて $t \leq 0$ では $h(t) = 0$ となり、 $0 < t < 1$ においては単調増加で、 $t \geq 1$ では $h(t) = 1$ となる関数 $h(t)$ をつくることのできる (図 47):

$$h(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)} = \begin{cases} 0 & (t \leq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{1 + \frac{e^{\frac{1}{t}}}{e^{\frac{1}{1-t}}}} & (0 < t < 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (t \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この関数は無限回連続微分可能である。

さて $\bar{h}(t) = 1 - h(t)$ とおく。 $\bar{h}(t)$ は $t \leq 0$ では $\bar{h}(t) = 1$ であり、 $0 < t < 1$ では単調

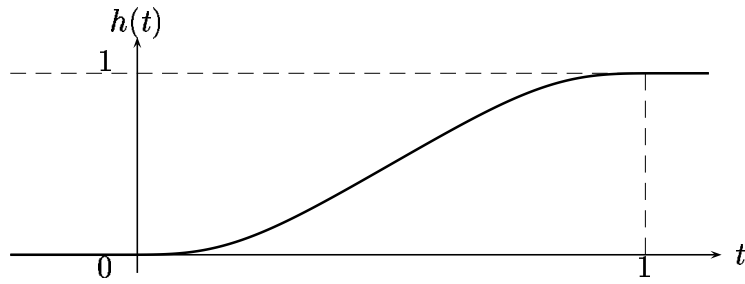


図 47 $h(t)$ のグラフ

減少で、 $t \geq 1$ では $\bar{h}(t) = 0$ である。しかも、つくり方から

$$1 = h(t) + \bar{h}(t)$$

が成り立つ。このように定数 1 を 2 つの関数 $h(t), \bar{h}(t)$ で分割することを 1 の分割という。

<step3> ここではベクトル場の合成をするための関数を与える。<step2> の $h(t)$ では $0 < t < 1$ で $h(t)$ の値が変化していたものを $-\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4}$ で変化するような関数 $g(t)$ につくりかえる (図 48):

$$g(t) = h\left(2t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & (t \leq -\frac{1}{4} \text{ のとき}) \\ \frac{1}{1 + \frac{e^{\frac{1}{2t - \frac{1}{2}}}}{e^{\frac{1}{1 - (2t - \frac{1}{2})}}}} & (-\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4} \text{ のとき}) \\ 1 & (t \geq \frac{1}{4} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (1)$$

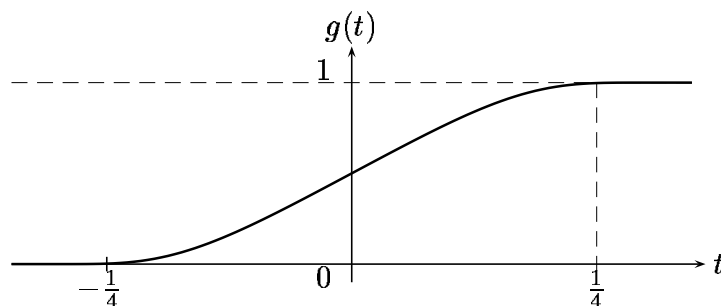


図 48 $g(t)$ のグラフ

さらに、関数 $g(t)$ から関数 $\bar{g}(t) = 1 - g(t)$ をつくる (図 49):

$$\bar{g}(t) = 1 - g(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq -\frac{1}{4} \text{ のとき}) \\ 1 - \frac{1}{1 + \frac{e^{\frac{1}{2t - \frac{1}{2}}}}{e^{1 - (2t - \frac{1}{2})}}} & (-\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4} \text{ のとき}) \\ 0 & (t \geq \frac{1}{4} \text{ のとき}) \end{cases}$$

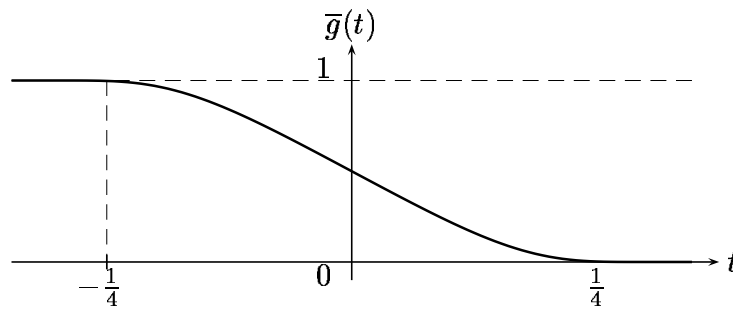


図 49 $\bar{g}(t) = 1 - g(t)$ のグラフ

例

ベクトル場 V を $V(x, y) = (x - \frac{1}{2}, y)$ (図 50) とし、 $g(x)$ を掛け合わせてベクトル場 $W(x, y) = g(x)V(x, y)$ をつくる (図 51)。

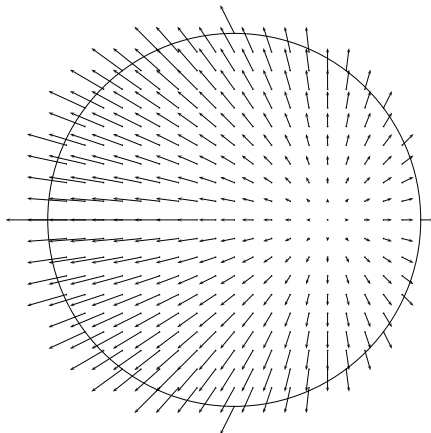


図 50 $V(x, y) = (x - \frac{1}{2}, y)$

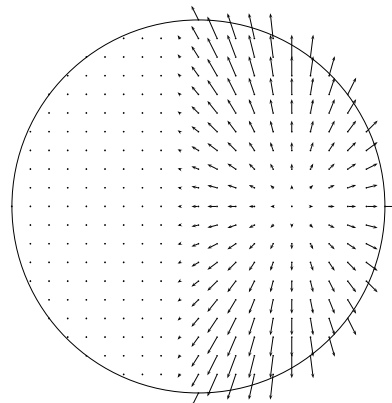


図 51 $W(x, y) = g(x)V(x, y)$

同じように $\bar{g}(x) = 1 - g(x)$ をかけることでベクトル場 $\bar{W}(x, y) = \bar{g}(x)V(x, y)$ をつくる。このとき $V(x, y) = W(x, y) + \bar{W}(x, y)$ と分解できる。 $W(x, y)$ は $t \geq \frac{1}{4}$ では $V(x, y)$ と一致しており、 $t \leq -\frac{1}{4}$ では $\vec{0}$ である。

参考文献

- [1] 加藤十吉, 風の流れのトポロジー, 『トポロジーの世界』 日本評論社, 1982, 113–121.
- [2] 佐久間一浩, 『トポロジー集中講義』 培風館, 2006.
- [3] J.W. ミルナー, 『微分トポロジー講義』 シュプリンガー・フェアラー東京株式会社, 1998.
- [4] Daniel Henry Gottlieb, All the Way with Gauss-Bonnet and the Sociology of Mathematics, The American Mathematical Monthly, Volume 103, Issue 6, 2003, 457-469.