曲面・結び目・多様体のトポロジー

S04S021 片岡 美絵
S04S028 木下 拓也
S04S029 木村 泰彰
S04S049 内藤 優
S04S079 山口 由加里

曲面への構造の導入

S04S021 片岡 美絵

基礎理学科

2008 年 2 月 29 日

定義(コンパクト)

X を空間内の点の集合とする。

定義(コンパクト)

X を空間内の点の集合とする。

(a) X のどのような 2 点間の距離もある数以下のときに、X は**有界**であるという。

定義(コンパクト)

X を空間内の点の集合とする。

(a) X のどのような 2 点間の距離もある数以下のときに、X は**有界**であるという。

(b) X 内のどのような点列の極限も X 内に含まれるときに、X は**閉**であるという。

定義(コンパクト)

X を空間内の点の集合とする。

(a) X のどのような 2 点間の距離もある数以下のときに、X は**有界**であるという。

(b) X 内のどのような点列の極限も X 内に含まれるときに、X は**閉**であるという。

(c) X が**有界**かつ**閉**であるとき、X は**コンパクト**であるという。

定義 (タイル張り)

コンパクトな曲面 X 上に有限個の多角形が次の条件をみたすように配置されているとき、この配置を X 上のタイル張りという。

定義 (タイル張り)

コンパクトな曲面 X 上に有限個の多角形が次の条件をみたすように配置されているとき、この配置を X 上のタイル張りという。

(a) 多角形が X 全体を覆っている。

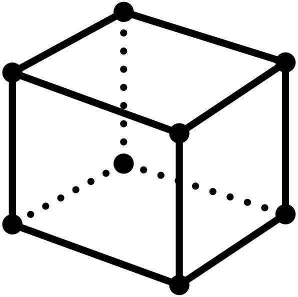
定義 (タイル張り)

コンパクトな曲面 X 上に有限個の多角形が次の条件をみたすように配置されているとき、この配置を X 上の**タイル張り**という。

(a) 多角形が X 全体を覆っている。

(b) 多角形が交われば、それは頂点または辺全体で交わっている。

例 (タイル張り)



定義

コンパクトな曲面のタイル張りに対して、

定義

コンパクトな曲面のタイル張りに対して、
タイル張りの**頂点**の個数を V、

定義

コンパクトな曲面のタイル張りに対して、
タイル張りの**頂点**の個数を V、
タイル張りの**辺**の本数を E、

定義

コンパクトな曲面のタイル張りに対して、
タイル張りの**頂点**の個数を V、
タイル張りの**辺**の本数を E、
タイル張りの**面**の個数を F
で表すことにする。

定理 (コンパクトな曲面の基本タイル張り予想)

X をコンパクトな曲面とする。X のどのようなタイル張りに対しても $V - E + F$ の値は一定である。

定理 (コンパクトな曲面の基本タイル張り予想)

X をコンパクトな曲面とする。 X のどのようなタイル張りに対しても $V - E + F$ の値は一定である。この整数を $\chi(X)$ で表し、X の**オイラー標数**とよぶ。

定理 コンパクトな曲面のオイラー標数

$m \geqq 0$ のとき, $\chi(mT) = 2 - 2m$.

$m \geqq 1$ のとき, $\chi(mP) = 2 - m$.

$m \geqq 0$ のとき, $\chi(K\#mT) = -2m$.

$m \geqq 0$ のとき, $\chi(P\#mT) = 1 - 2m$.

定理 コンパクトな曲面のオイラー標数

$m \geqq 0$ のとき, $\chi(mT) = 2 - 2m.$
$m \geqq 1$ のとき, $\chi(mP) = 2 - m.$
$m \geqq 0$ のとき, $\chi(K\#mT) = -2m.$
$m \geqq 0$ のとき, $\chi(P\#mT) = 1 - 2m.$

これより、コンパクトな曲面のオイラー標数は 2 以下とわかる。

問 2.8

(a)(コンパクトな曲面ではない) コンパクトな縁付き曲面の具体的な例を考えよ。

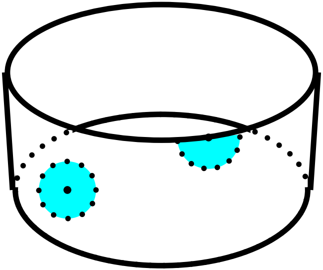
問 2.8

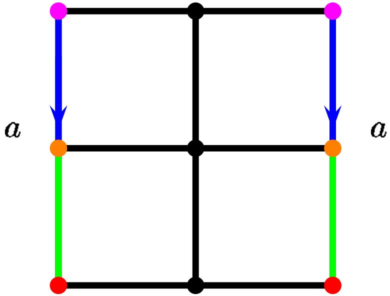
(a)(コンパクトな曲面ではない) コンパクトな縁付き曲面の具体的な例を考えよ。
　その例の平面モデルにタイル張りを描いてから、それを基準にして、考えている例のオイラー標数をどのように定義すればよいか考察せよ。

問 2.8

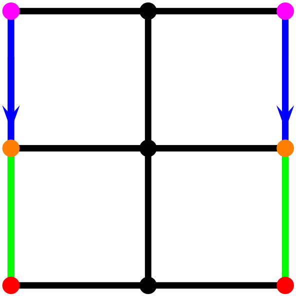
(b) このように定義したコンパクトな縁付き曲面のオイラー標数としてどのような数が現われるか。

(a) 具体例

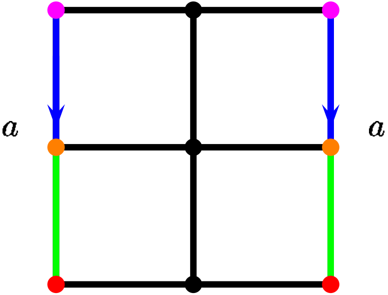




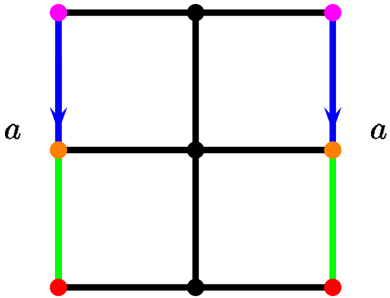
a
a



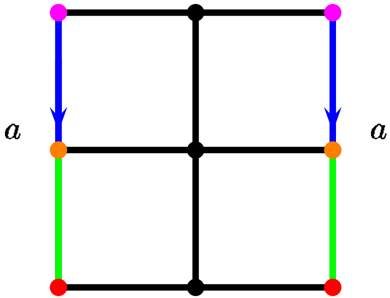
$$V = 6,$$



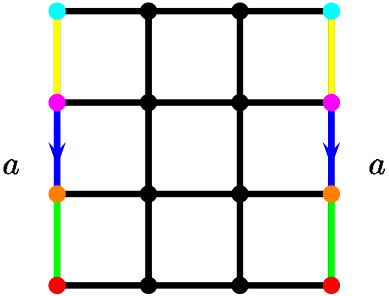
$$V = 6, \ E = 10,$$

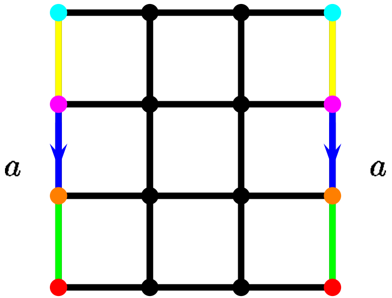


$$V = 6,\ E = 10,\ F = 4$$

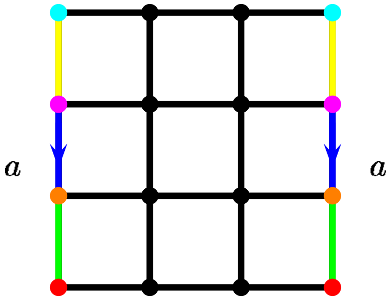


$$V = 6,\ \ E = 10,\ F = 4$$
$$V - E + F = 6 - 10 + 4 = 0$$

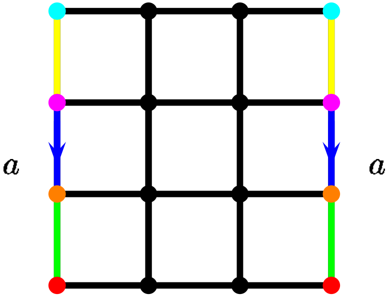

a
a



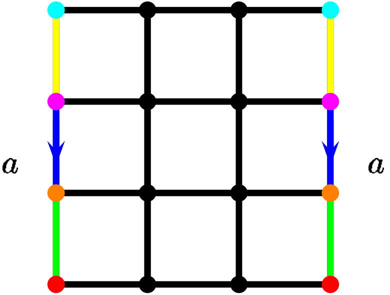
$$V = 12,$$



$$V = 12,\ E = 21,$$



$$V = 12,\ E = 21,\ F = 9$$



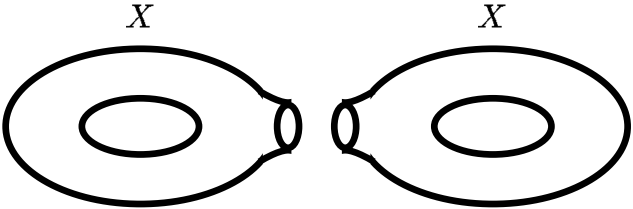
$$V = 12,\ E = 21,\ F = 9$$
$$V - E + F = 12 - 21 + 9 = 0$$

2つのタイル張りの $V - E + F$ の値は一致する。
よって、どのようなタイル張りに対しても $V - E + F$ は一定であると推測できる。

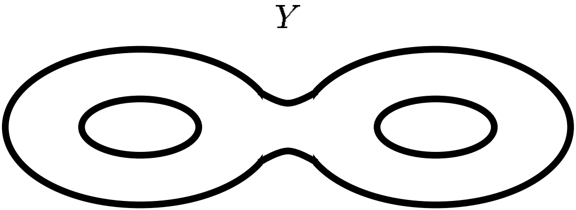
2つのタイル張りの$V-E+F$の値は一致する。よって、どのようなタイル張りに対しても$V-E+F$は一定であると推測できる。

従って、オイラー標数を$V-E+F$と定義すればよい。

(b) X が縁付き曲面であるとする。
X のコピーを 2 つ用意する。



縁で貼り合わせて曲面 Y をつくる。



X の縁の上にある頂点および辺の個数は、等しい。
これを α とおく。
このとき、Y の頂点・辺・面の個数は次で与えられる。

$$V_Y = 2V_X - \alpha ,$$
$$E_Y = 2E_X - \alpha ,$$
$$F_Y = 2F_X .$$

Y のオイラー標数は次のように計算できる:

$$\begin{aligned}\chi(Y) &= V_Y - E_Y + F_Y \\ &= (2V_X - \alpha) - (2E_X - \alpha) + 2F_X \\ &= 2(V_X - E_X + F_X) - \alpha + \alpha \\ &= 2(V_X - E_X + F_X) \\ &= 2\chi(X)\,.\end{aligned}$$

コンパクトな曲面のオイラー標数は 2 以下であるから、

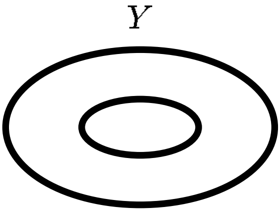
$$2\chi(X) \leqq 2$$
$$\chi(X) \leqq 1$$

を得る。

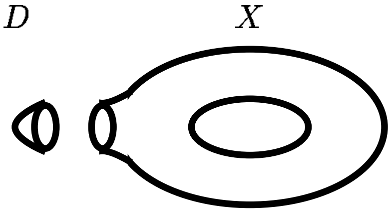
具体的な構成

具体的な構成

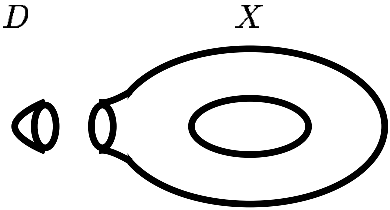
縁のない曲面を Y とする。



Y から 1 つの小開円板 ($\mathring{D}$) を取り除いた (1 つの縁をもつ) 図形を X とする。

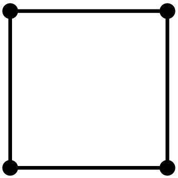


Y から 1 つの小開円板 $(\mathring{D})$ を取り除いた (1 つの縁をもつ) 図形を X とする。

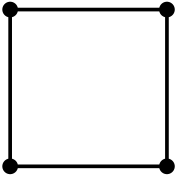


$$\chi(Y) = \chi(X) + \chi(D)$$

小円板 (D) のオイラー標数を考える。

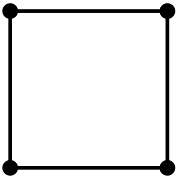


小円板 (D) のオイラー標数を考える。



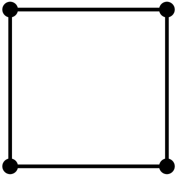
$$V = 4,$$

小円板 (D) のオイラー標数を考える。



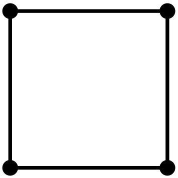
$$V = 4,\ E = 4,$$

小円板 (D) のオイラー標数を考える。



$$V = 4,\ E = 4,\ F = 1$$

小円板 (D) のオイラー標数を考える。



$$V = 4,\ E = 4,\ F = 1$$
$$\chi(D) = V - E + F = 4 - 4 + 1 = 1$$

$$\chi(Y) = \chi(X) + \chi(D)$$
$$= \chi(X) + 1$$

よって、

$$\chi(X) = \chi(Y) - 1$$

Y から n 個 $(n \geqq 1)$ の小開円板を取り除いて、X をつくると、

$$\chi(X) = \chi(Y) - n$$

Y から n 個の小開円板を取り除いた図形のオイラー標数を示す:

Y	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$\cdots$	一般の n
S	1	0	-1	$\cdots$	$2-n$
P	0	-1	-2	$\cdots$	$1-n$
T or $2P(K)$	-1	-2	-3	$\cdots$	$0-n$
$3P$ $(P\#T)$	-2	-3	-4	$\cdots$	$-1-n$
$2T$ or $4P(K\#T)$	-3	-4	-5	$\cdots$	$-2-n$