曲面上の地図の塗り分け

s04s028 木下　拓也

基礎理学科

2008 年２月２９日

曲面上の地図の塗り分け

球面上に描かれた地図を考えていこう。

定義：地図

コンパクトな曲面 X 上のパターンで、各頂点の価数が３以上のものを地図という。

定義：地図

コンパクトな曲面 X 上のパターンで、各頂点の価数が３以上のものを**地図**という。

パターン：次の２条件を満たすタイル張りをパターンとする。

定義：地図

コンパクトな曲面 X 上のパターンで、各頂点の価数が３以上のものを**地図**という。

パターン：次の２条件を満たすタイル張りをパターンとする。

(a) 端点の頂点において自分自身と交わる辺はない。

(b) 辺全体で自分自身と交わる面はない。

定義：地図

コンパクトな曲面 X 上のパターンで、各頂点の価数が３以上のものを**地図**という。

パターン：次の２条件を満たすタイル張りをパターンとする。

(a) 端点の頂点において自分自身と交わる辺はない。

(b) 辺全体で自分自身と交わる面はない。

価数：頂点につながる線分の本数。

定義：N 彩色可能

コンパクトな曲面上の地図が N **彩色可能**であるとは、N 色の異なる色が与えられたとき、同じ辺を共有する２つの異なる面が異なる色で塗られるように地図の各面を N 色のうちの１色で塗ることができるときをいう。

N 彩色可能であるための十分条件

定理：N を正の整数、X をコンパクトな曲面とする。X 上の面の数が N より大きいどのような地図に対しても

$$6\left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right) < N$$

が成り立つならば、X 上のすべての地図は N 彩色可能である。

N 彩色可能であるための十分条件

定理：N を正の整数、X をコンパクトな曲面とする。X 上の面の数が N より大きいどのような地図に対しても

$$6\left(1-\frac{\chi(X)}{F}\right) < N$$

が成り立つならば、X 上のすべての地図は N 彩色可能である。

証明は面の個数 F に関する数学的帰納法で得られる。

定義：染色数

ある地図が N 彩色可能であるが $(N-1)$ 彩色可能でないとき、N をその地図の**染色数**と定義する。

定義：彩色数

コンパクトな曲面 X に対して、X 上の地図の染色数の最大値（すなわち、X 上のすべての地図を塗り分けるために必用な色の数の最少数のこと）を X の**彩色数**という。

定義：ヒーウッド数

X をオイラー標数が負のコンパクトな曲面とする。このとき曲面 X のヒーウッド数を次のように定義する。

$$H(X) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}}{2} \right\rfloor$$

X を $\chi(X) < 0$ をみたすコンパクトな曲面とする。

X を $\chi(X) < 0$ をみたすコンパクトな曲面とする。

F:X 上の地図の面の個数

X を $\chi(X) < 0$ をみたすコンパクトな曲面とする。

F:X 上の地図の面の個数

N:正の整数

X を $\chi(X) < 0$ をみたすコンパクトな曲面とする。

F:X 上の地図の面の個数

N:正の整数

$F \leqq N$ のときその地図は

X を $\chi(X) < 0$ をみたすコンパクトな曲面とする。

F:X 上の地図の面の個数

N:正の整数

$F \leqq N$ のときその地図は N 彩色可能である。

$F \geqq N + 1$ のとき

$F \geqq N+1$ のとき

$$\frac{1}{F} \leqq \frac{1}{N+1}$$

$F \geqq N+1$ のとき

$$\frac{1}{F} \leqq \frac{1}{N+1}$$

$$\frac{\chi(X)}{F} \geqq \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$F \geqq N+1$ のとき

$$\frac{1}{F} \leqq \frac{1}{N+1}$$

$$\frac{\chi(X)}{F} \geqq \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$$1-\frac{\chi(X)}{F} \leqq 1-\frac{\chi(X)}{N+1}$$

$F \geqq N+1$ のとき

$$\frac{1}{F} \leqq \frac{1}{N+1}$$

$$\frac{\chi(X)}{F} \geqq \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$$1 - \frac{\chi(X)}{F} \leqq 1 - \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$$6(1 - \frac{\chi(X)}{F}) \leqq 6(1 - \frac{\chi(X)}{N+1})$$

$F \geqq N+1$ のとき

$$\frac{1}{F} \leqq \frac{1}{N+1}$$

$$\frac{\chi(X)}{F} \geqq \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$$1 - \frac{\chi(X)}{F} \leqq 1 - \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$$6\left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right) \leqq 6\left(1 - \frac{\chi(X)}{N+1}\right)$$

$$6\left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right) \leqq 6\left(1 - \frac{\chi(X)}{N+1}\right) < N$$

$F \geqq N+1$ のとき

$$\frac{1}{F} \leqq \frac{1}{N+1}$$

$$\frac{\chi(X)}{F} \geqq \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$$1 - \frac{\chi(X)}{F} \leqq 1 - \frac{\chi(X)}{N+1}$$

$$6(1 - \frac{\chi(X)}{F}) \leqq 6(1 - \frac{\chi(X)}{N+1})$$

$$6(1 - \frac{\chi(X)}{F}) \leqq 6(1 - \frac{\chi(X)}{N+1}) < N$$

N は左辺より大きいのでこの地図は N 彩色可能です。

$$6\left(1 - \frac{\chi(X)}{N+1}\right) < N$$

$$6\left(1-\frac{\chi(X)}{N+1}\right) < N$$

$$6(N+1-\chi(X)) < N(N+1)$$

$$6\left(1 - \frac{\chi(X)}{N+1}\right) < N$$

$$6(N + 1 - \chi(X)) < N(N + 1)$$

$$N^2 - 5N + 6\chi(X) - 6 > 0$$

$$6\left(1-\frac{\chi(X)}{N+1}\right) < N$$

$$6(N+1-\chi(X)) < N(N+1)$$

$$N^2 - 5N + 6\chi(X) - 6 > 0$$

$$N > \frac{5+\sqrt{49-24\chi(X)}}{2}$$

$$6\left(1 - \frac{\chi(X)}{N+1}\right) < N$$

$$6(N + 1 - \chi(X)) < N(N + 1)$$

$$N^2 - 5N + 6\chi(X) - 6 > 0$$

$$N > \frac{5+\sqrt{49-24\chi(X)}}{2}$$

$$N \geqq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi(X)}}{2} \right\rfloor$$

定理：負のオイラー標数をもつコンパクトな曲面の染色数

X をオイラー標数が負のコンパクトな曲面とする。X 上のすべての地図は $H(X)$ 彩色可能である。したがって、$H(X)$ は X 上の地図の染色数の上界である。

$\chi(X)$ が 2 から -4 までのヒーウッド数の表

X	$\chi(X)$	$H(X)$
S	2	4
P	1	6
T または $2P(K)$	0	7
$3P$ $(P\#T)$	-1	7
$2T$ または $4P(K\#T)$	-2	8
$5P$ $(P\#2T)$	-3	9
$3T$ または $6P(K\#2T)$	-4	9

$\chi(X)$ が 2 から -4 までのヒーウッド数の表

X	$\chi(X)$	$H(X)$
S	2	4
P	1	6
T または $2P(K)$	0	7
$3P$ $(P\#T)$	-1	7
$2T$ または $4P(K\#T)$	-2	8
$5P$ $(P\#2T)$	-3	9
$3T$ または $6P(K\#2T)$	-4	9

注：$H(X)$ は彩色数と一致する。しかしクラインの壺 (K) を除いてである。K の彩色数は 6 であるが、$H(K)$ は 7 となる。

問 2.6

X をコンパクトな曲面とする。X 上のある地図を塗り分けるために 72 色を必要とする。また、X 上の地図はすべて 75 色あれば塗り分けられるとする。以上の条件をみたすコンパクトな曲面 X は、同相なものは同じとみていくつあるか調べよ。

解法

$H(X)$ が 72 以上 75 以下のとき $\chi(X)$ がいくつになるかを求める。

解法

$H(X)$ が 72 以上 75 以下のとき $\chi(X)$ がいくつになるかを求める。

$\chi(X)$ は -780 から -873 となる。

解法

$H(X)$ が 72 以上 75 以下のとき $\chi(X)$ がいくつになるかを求める。

$\chi(X)$ は -780 から -873 となる。

これを先程の表のようにしてみると、次のようになる:

X	$\chi(X)$	$H(X)$
S	2	4
P	1	6
T または $2P(K)$	0	7
$3P$ $(P\#T)$	-1	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$781P$	-779	71
$391T$ または $782P$	-780	72
$783P$	-781	72
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$437T$ または $874P$	-872	75
$875P$	-873	75
$438T$ または $876P$	-874	76

条件を満たす mT の形の曲面は 94 個、mP の形の曲面は 47 個できる。合計 141 個である。