# 結び目理論

S04S049　内藤　優

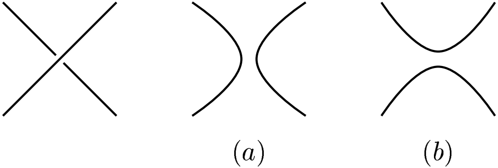
基礎理学科

2008 年 2 月 29 日

# 「カウフマンのブラケット多項式について」

# 定義 1

## 適切に配置した交点と 2 種類の平滑化




**(a)A 型の平滑化、(b)B 型の平滑化**

**前ページのように各交点において、2 種類の平滑化のうちのいずれかの平滑化をおこなうことができ、これによってもとの射影図を変形して得られた絡み目の射影図をステイトとよぶ。**
**各交点で 2 通りあるので、もし $n$ 交点あれば、$2^n$ 通りの平滑化の方法がある。**

**交点が適切に配置された射影図 $D$ に対して、カウフマンのブラケット $< D >$ を定義する。**
**各ステイト $S$ における、**

交点が適切に配置された射影図 $D$ に対して、カウフマンのブラケット $< D >$ を定義する。
各ステイト $S$ における、

- 円周の本数　$|S|$

交点が適切に配置された射影図 $D$ に対して、カウフマンのブラケット $< D >$ を定義する。
各ステイト $S$ における、

- 円周の本数　$|S|$
- $A$ 型の平滑化の個数　$a$

交点が適切に配置された射影図 $D$ に対して、カウフマンのブラケット $< D >$ を定義する。
各ステイト $S$ における、

- 円周の本数　$|S|$
- $A$ 型の平滑化の個数　$a$
- $B$ 型の平滑化の個数　$b$

$D$ の各ステイト $S$ において、

$$< D|S >= t^{a-b}$$

と定義する。
($a$ は $A$ 型の平滑化の数、$b$ は $B$ 型の平滑化の数)

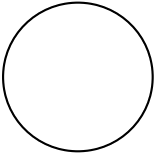
射影図 $D$ のカウフマンのブラケット $< D >$ を、$D$ の各ステイト $S$ について $< D|S > (-t^{-2} - t^{2})^{|S|-1}$ という形の項を求め、それらの総和と定義する。以上のことを、記号的に

$$< D >= \sum_{S} < D|S > (-t^{-2} - t^{2})^{|S|-1}$$

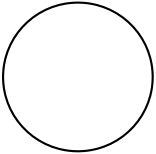
とかく。

# 例 1

平面の単純円周 $D$ はアンノット $U$ の射影図であり、この射影図のカウフマンのブラケットを計算する。

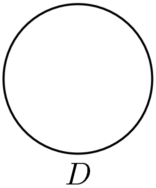


$D$



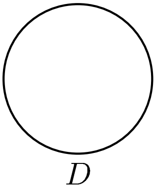
$D$

$D$ には交点がないので



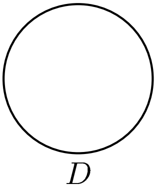

$D$ には交点がないので

- ステイトはちょうど $2^0 = 1$ 個、すなわち $S = D$ である。




$D$には交点がないので

- ステイトはちょうど$2^0 = 1$個、すなわち$S = D$である。
- このステイト$S$では、$a = b = 0$、$|S| = 1$.




$D$ には交点がないので

- ステイトはちょうど $2^0 = 1$ 個、すなわち $S = D$ である。
- このステイト $S$ では、$a = b = 0$、$|S| = 1$.
- ステイト $S$ について、$< D|S >= t^{a-b} = t^0 = 1$ となる。

よって、$D$ のカウフマンのブラケットは

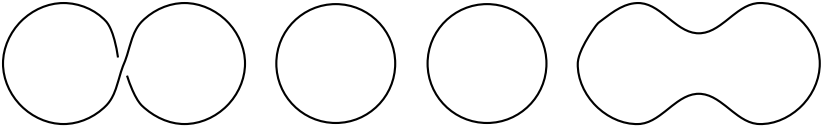
よって、$D$ のカウフマンのブラケットは

$$\begin{aligned} < D > = < D|S > (-t^{-2} - t^{2})^{|S|-1} \\ = 1(-t^{-2} - t^{2})^{1-1} \\ = 1(-t^{-2} - t^{2})^{0} \\ = 1 \end{aligned}$$

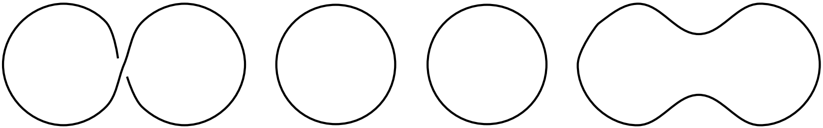
となる。

# 例 2

次に下図に描かれた別のアンノットの射影図 $D$ のカウフマンのブラケットを計算する。
$S_1$ と $S_2$ は射影図 $D$ のステイトである。

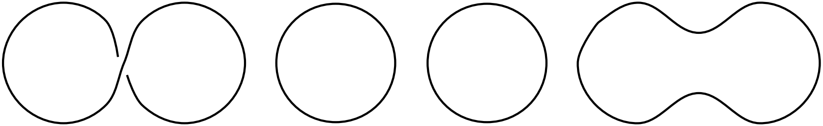


$D$　　$S_1$　　$S_2$



$D$ $S_1$ $S_2$

$S_1$ では、

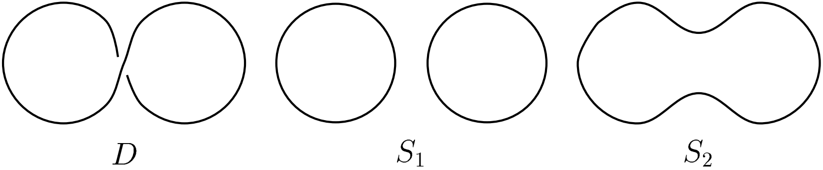


$D$　　　　$S_1$　　　　$S_2$

$S_1$ では、

$$a = 1、b = 0、|S_1| = 2$$

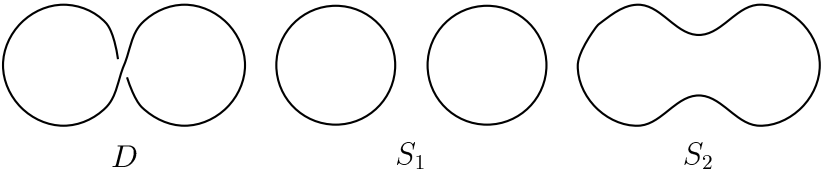
である。




$S_1$ では、

$$a = 1、b = 0、|S_1| = 2$$

である。
したがって、



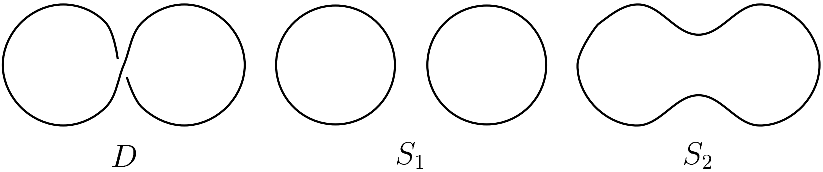

$S_1$ では、

$$a = 1、b = 0、|S_1| = 2$$

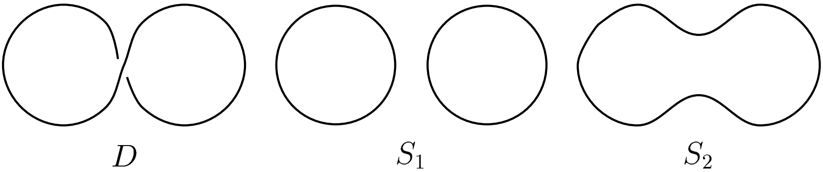
である。
したがって、

$$< D|S_1 >= t^{1-0} = t$$

となる。



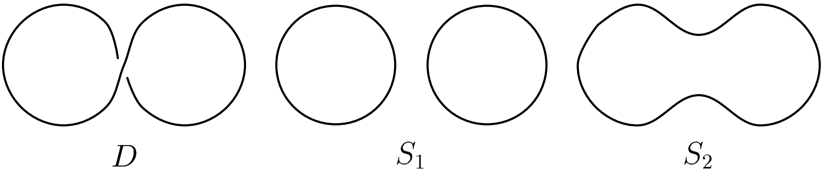

**一方 $S_2$ については、**




一方 $S_2$ については、

$$a = 0、b = 1、|S_2| = 1$$

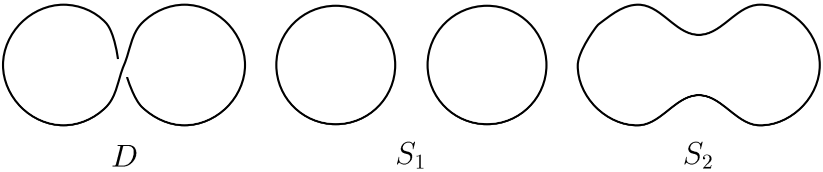
である。




一方 $S_2$ については、

$$a = 0、b = 1、|S_2| = 1$$

である。
したがって、




一方 $S_2$ については、

$$a = 0、b = 1、|S_2| = 1$$

である。
したがって、

$$< D|S_2 >= t^{0-1} = t^{-1}$$

となる。

よって $D$ のカウフマンのブラケットは、

よって $D$ のカウフマンのブラケットは、

$$\begin{aligned} < D > = & < D|S_1 > (-t^{-2} - t^2)^{|S_1|-1} \\ & + < D|S_2 > (-t^{-2} - t^2)^{|S_2|-1} \\ & = t(-t^{-2} - t^2)^{2-1} + t^{-1}(-t^{-2} - t^2)^{1-1} \\ & = t(-t^{-2} - t^2)^1 + t^{-1}(-t^{-2} - t^2)^0 \\ & = -t^{-1} - t^3 + t^{-1} \\ & = -t^3 \end{aligned}$$

となる。

**以上の 2 つの例から、カウフマンのブラケットは向きの付いていない絡み目の不変量でないことがわかる。**

# 定義 2

$D$ を向きの付いた絡み目 $L$ の射影図とする。$r$ を $D$ の右巻きの交点の個数、$l$ を $D$ の左巻きの交点の個数とし、
$D$ のカウフマンのブラケット多項式を

$$(-t)^{-3(r-l)} < D >$$

と定義する。ただし、$< D >$ は $D$ のカウフマンのブラケットである。

**$D$ を例 1 で調べたアンノットの射影図とする。この時 $< D >= 1$ であり、この射影図には交点がなかったので $D$ にどちら向きに向きを付けても $r = l = 0$ である。**

$D$ を例 1 で調べたアンノットの射影図とする。この時 $< D >= 1$ であり、この射影図には交点がなかったので $D$ にどちら向きに向きを付けても $r = l = 0$ である。したがって、$D$ のカウフマンのブラケット多項式は、

**$D$ を例 1 で調べたアンノットの射影図とする。この時 $< D >= 1$ であり、この射影図には交点がなかったので $D$ にどちら向きに向きを付けても $r = l = 0$ である。したがって、$D$ のカウフマンのブラケット多項式は、**

$$(-t)^{-3(r-l)} < D >= 1$$

**となる。**

次に $D$ を例 2 で調べたアンノットの射影図とする。どちら向きに向きを付けても $r=1$、$l=0$ で、$<D>=-t^3$ である。

次に $D$ を例 2 で調べたアンノットの射影図とする。どちら向きに向きを付けても $r = 1$、$l = 0$ で、
$< D >= -t^3$ である。
したがって、この場合 $D$ のカウフマンのブラケット多項式は、

次に $D$ を例 2 で調べたアンノットの射影図とする。どちら向きに向きを付けても $r = 1$、$l = 0$ で、
$< D >= -t^3$ である。
したがって、この場合 $D$ のカウフマンのブラケット多項式は、

$$\begin{aligned}(-t)^{-3(r-l)} < D > &= (-t)^{-3(1-0)}(-t^3) \\ &= (-t^{-3})(-t^3) \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。

すなわち、これらのアンノットの向きの付いた射影図のカウフマンのブラケット多項式は、それぞれ 1 に等しいことがわかる。
実際、カウフマンのブラケット多項式は不変量であるが、次に定理としてまとめる。

# 定理

$L$ を向きの付いた絡み目とする。$L$ のどの $2$ つの射影図からカウフマンのブラケット多項式を求めてもそれらは等しい。

**すなわち、$L$ のカウフマンのブラケット多項式といういい方が許される。この多項式を $F_L(t)$ とかくと、**

すなわち、$L$ のカウフマンのブラケット多項式というい方が許される。この多項式を $F_L(t)$ とかくと、

$$F_L(t) = (-t)^{-3(r-l)} < D >$$

となる。

すなわち、$L$ のカウフマンのブラケット多項式という いい方が許される。この多項式を $F_L(t)$ とかくと、

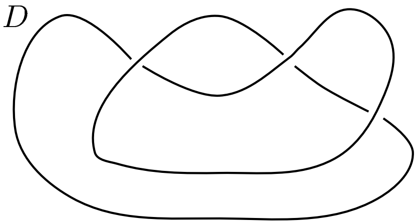
$$F_L(t) = (-t)^{-3(r-l)} < D >$$

となる。
ただし、$D$ は $L$ のかってな射影図、$< D >$ は $D$ のカウフマンのブラケット、$r$ と $l$ はそれぞれ $D$ の右巻きの交点の個数、左巻きの交点の個数とする。

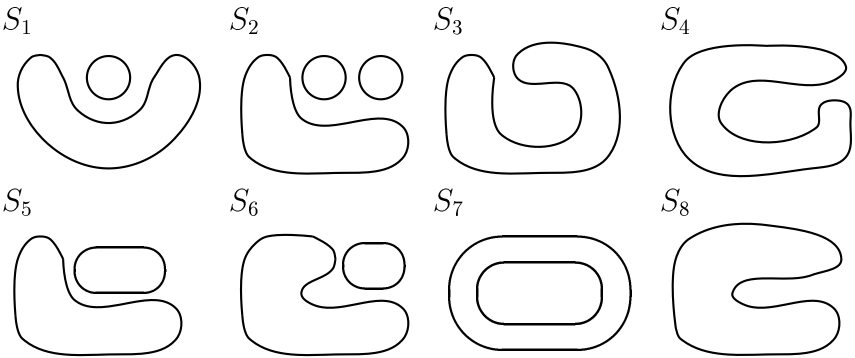
また、$L$ が結び目のときは、$F_L(t)$ は $L$ の向きの選び方によらない。すなわち、$F_L(t)$ は向きの付いていない結び目の不変量である。

# 問

**下図のような交点を 3 個もつアンノットの射影図 $D$ から求めたカウフマンのブラケット多項式が 1 になることを示せ。**




**アンノットの射影図**




**アンノットの射影図のステイト**

**最初に述べた平滑化の定義より $S_1$ から $S_8$ までのアンノットの射影図のステイトを描くことができる。**

# この８個のステイトよりアンノットの射影図のカウフマンのブラケットを計算するために必要な情報を表にまとめると、次のようになる。

| | $a$ | $b$ | $\|S\|$ | $< D\|S >= t^{a-b}$ | $< D\|S > (-t^{-2} - t^2)^{\|S\|-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 3 | 0 | 2 | $t^3$ | $-t - t^5$ |
| $S_2$ | 2 | 1 | 3 | $t$ | $t^{-3} + 2t + t^5$ |
| $S_3$ | 2 | 1 | 1 | $t$ | $t$ |
| $S_4$ | 2 | 1 | 1 | $t$ | $t$ |
| $S_5$ | 1 | 2 | 2 | $t^{-1}$ | $-t^{-3} - t$ |
| $S_6$ | 1 | 2 | 2 | $t^{-1}$ | $-t^{-3} - t$ |
| $S_7$ | 1 | 2 | 2 | $t^{-1}$ | $-t^{-3} - t$ |
| $S_8$ | 0 | 3 | 1 | $t^{-3}$ | $t^{-3}$ |

表よりカウフマンのブラケットを計算すると、

表よりカウフマンのブラケット多項式を計算すると、

$$
\begin{aligned}
< D > &= -t - t^5 + t^{-3} + 2t + t^5 + 2t + 3(-t^{-3} - t) + t^{-3} \\
&= -t - t^5 + t^{-3} + 2t + t^5 + 2t - 3t^{-3} - 3t + t^{-3} \\
&= 2t^{-3} - 3t^{-3} \\
&= -t^{-3}
\end{aligned}
$$

となる。

3 交点での向きは $r = 1, l = 2$ となるので、$D$ のカウフマンのブラケット多項式は、

3 交点での向きは $r = 1, l = 2$ となるので、$D$ のカウフマンのブラケット多項式は、

$$
\begin{aligned}
F_D(t) &= (-t)^{-3(r-l)} < D > \\
&= (-t)^{-3(1-2)}(-t^{-3}) \\
&= -t^3(-t^{-3}) \\
&= t^0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となり、カウフマンのブラケット多項式が 1 であることが示された。