ベクトル場とつむじ

s04s006 泉　佳孝
s04s023 構　宏章

基礎理学科

2008 年 2 月 29 日

ベクトル場とは？

定義(ベクトル場)

定義(ベクトル場)

$\mathbb{R}^N$ の中の部分集合 X を考える。

定義 (ベクトル場)

$\mathbb{R}^N$ の中の部分集合 X を考える。

X 上の**ベクトル場**とは、

定義(ベクトル場)

$\mathbb{R}^N$ の中の部分集合 X を考える。

X 上の**ベクトル場**とは、連続写像 $V : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ のことをいう。

定義(ベクトル場)

$\mathbb{R}^N$ の中の部分集合 X を考える。

X 上の**ベクトル場**とは、連続写像 $V : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ のことをいう。
特に $V(p) = \vec{0}$ となる点 $p \in X$ を V の**特異点**と呼ぶ。

定義(ベクトル場)

$\mathbb{R}^N$ の中の部分集合 X を考える。

X 上の**ベクトル場**とは、連続写像 $V : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ のことをいう。
特に $V(p) = \vec{0}$ となる点 $p \in X$ を V の**特異点**と呼ぶ。
X が曲面であり各点 $p \in X$ で、$V(p)$ が X の p における接ベクトルであるとき、V は X 上の接ベクトル場であるという。ただし曲面の場合、単にベクトル場とかき接ベクトル場を表す。

定義 (回転数)

定義 (回転数)

S^1 を $\mathbb{R}^2$ の部分集合と考え、S^1 上のベクトル場
$v : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ で特異点をもたないものに対し、
$\hat{v} : S^1 \longrightarrow S^1$ を

$$\hat{v}(p) = \frac{v(p)}{|v(p)|}$$

で定める。

定義 (回転数)

S^1 を $\mathbb{R}^2$ の部分集合と考え、S^1 上のベクトル場
$v : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ で特異点をもたないものに対し、
$\hat{v} : S^1 \longrightarrow S^1$ を

$$\hat{v}(p) = \frac{v(p)}{|v(p)|}$$

で定める。この写像 $\hat{v}$ の写像度、つまり S^1 の像 $v(S^1)$ が S^1 に本質的に何回巻きついているか、その回数を $r(v)$ とかき、v の**回転数**という。

定義 (特異点の周りの回転数)

定義 (特異点の周りの回転数)

曲面上のベクトル場 V を考える。

定義 (特異点の周りの回転数)

曲面上のベクトル場 V を考える。特異点 p の周りを平面と考え、p を中心とする半径 ϵ の円周 S^1_ϵ をとる。(ϵ:十分小さな数)

定義 (特異点の周りの回転数)

曲面上のベクトル場 V を考える。特異点 p の周りを平面と考え、p を中心とする半径 ϵ の円周 S^1_ϵ をとる。(ϵ:十分小さな数)

V の孤立した**特異点 p の周りの回転数** $i(V;p)$ とは $V|S^1_\epsilon$ の回転数 $r(V|S^1_\epsilon)$ のことである。

定義(指数)

定義(指数)

曲面 X 上のベクトル場 V は有限個の特異点
$p_1, p_2, \cdots, p_n$ をもつとする。

定義(指数)

曲面 X 上のベクトル場 V は有限個の特異点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ をもつとする。ただし、X が境界をもつ場合どの p_i も X の境界上にはないものとする。

定義 (指数)

曲面 X 上のベクトル場 V は有限個の特異点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ をもつとする。ただし、X が境界をもつ場合どの p_i も X の境界上にはないものとする。このとき、V の**指数** $i(V)$ を次式で定める:

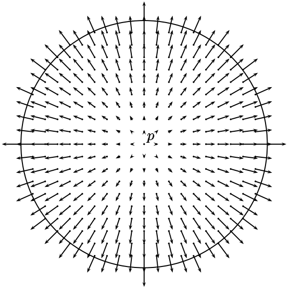
定義 (指数)

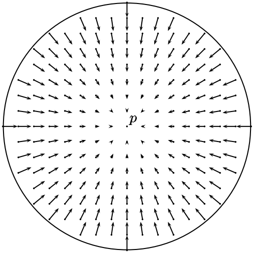
曲面 X 上のベクトル場 V は有限個の特異点 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ をもつとする。ただし、X が境界をもつ場合どの p_i も X の境界上にはないものとする。このとき、V の**指数** $i(V)$ を次式で定める:

$$i(V) = i(V; p_1) + i(V; p_2) + \cdots + i(V; p_n) \,.$$

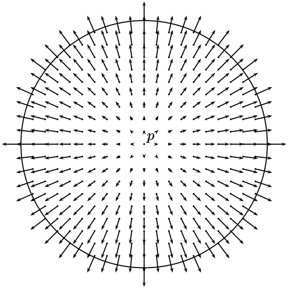
ベクトル場の例

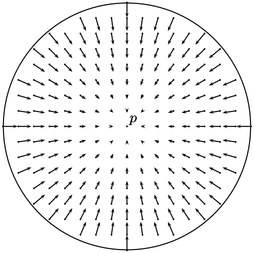
ベクトル場の例





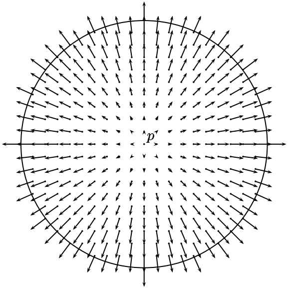
ベクトル場の例

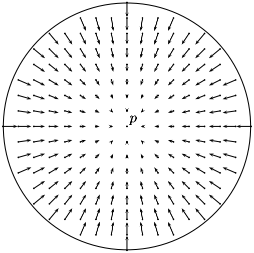




$$i(V;p) = 1$$

ベクトル場の例



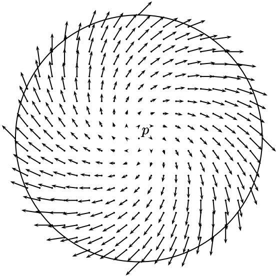


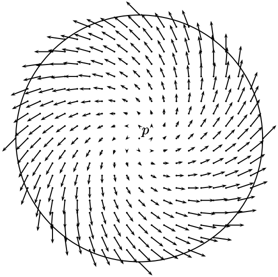
$$i(V;p)=1$$

$$i(V;p)=1$$

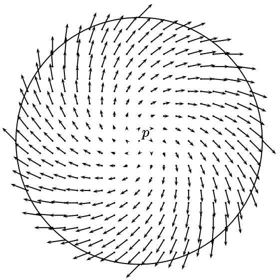
ベクトル場の例

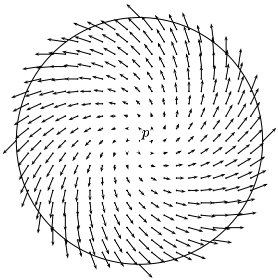
ベクトル場の例





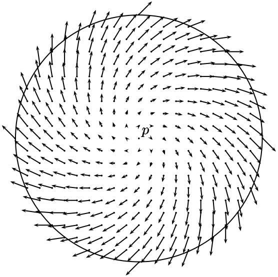
ベクトル場の例

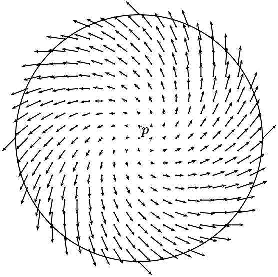




$$i(V;p)=1$$

ベクトル場の例

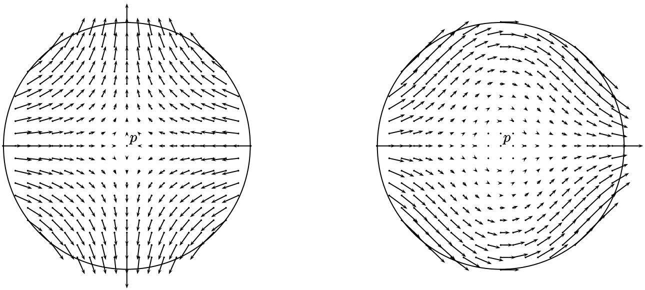




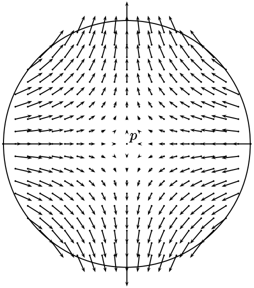
$i(V; p) = 1$　　$i(V; p) = 1$

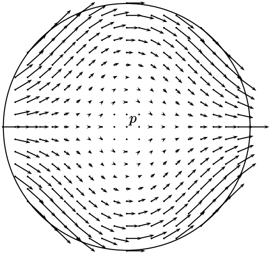
ベクトル場の例

ベクトル場の例



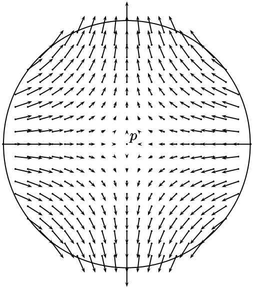
ベクトル場の例



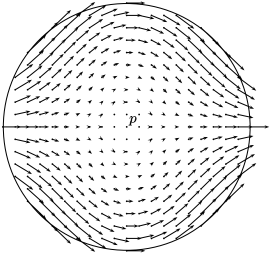


$$i(V;p) = -1$$

ベクトル場の例



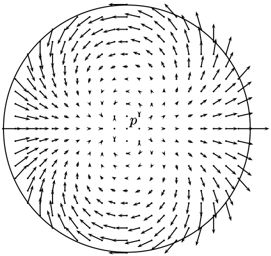
$$i(V;p) = -1$$

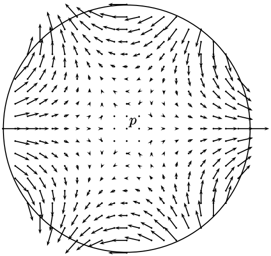


$$i(V;p) = 0$$

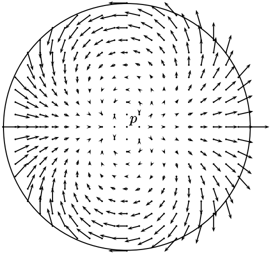
ベクトル場の例

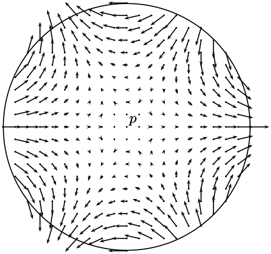
ベクトル場の例





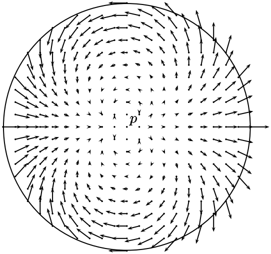
ベクトル場の例

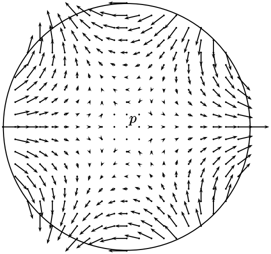




$$i(V;p) = 2$$

ベクトル場の例

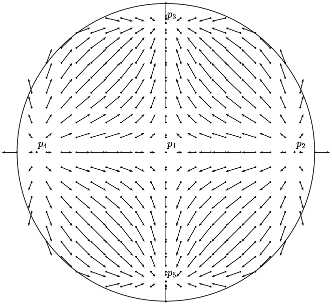




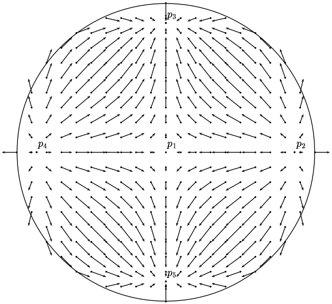
$i(V;p) = 2$　　　　$i(V;p) = -2$

ベクトル場の例

ベクトル場の例

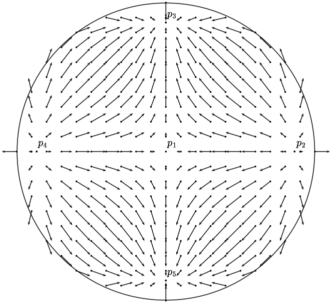


ベクトル場の例



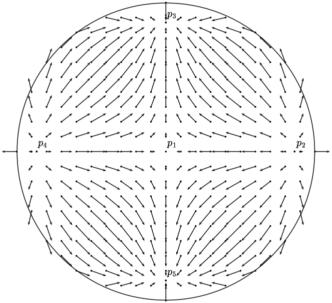
$$i(V; p_1) = -1,$$

ベクトル場の例



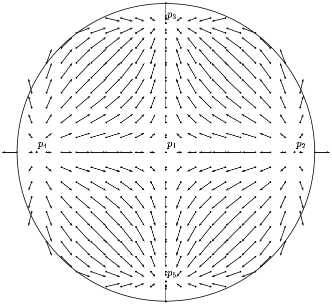
$$i(V;p_1) = -1, i(V;p_2) = 1,$$

ベクトル場の例



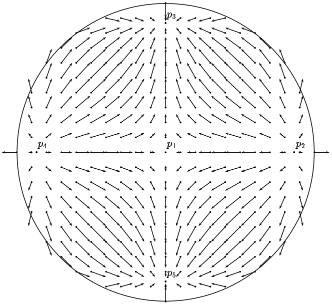
$$i(V; p_1) = -1, i(V; p_2) = 1, i(V; p_3) = 1,$$

ベクトル場の例



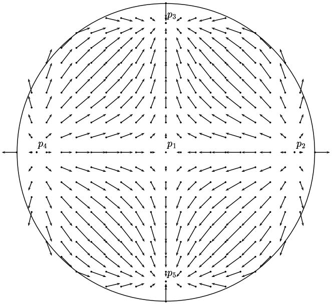
$$i(V;p_1)=-1,\ i(V;p_2)=1,\ i(V;p_3)=1,\ i(V;p_4)=1,$$

ベクトル場の例



$$i(V;p_1)=-1,\ i(V;p_2)=1,\ i(V;p_3)=1,\ i(V;p_4)=1,\ i(V;p_5)=1$$

ベクトル場の例



$$i(V;p_1) = -1, i(V;p_2) = 1, i(V;p_3) = 1, i(V;p_4) = 1, i(V;p_5) = 1$$

よって　$i(V) = (-1) + 1 + 1 + 1 + 1 = 3$

球面上のベクトル場

球面上のベクトル場の例

球面上のベクトル場の例

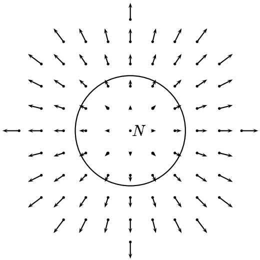
地球儀の経線を北から南に沿うようなベクトル場 V を考える。

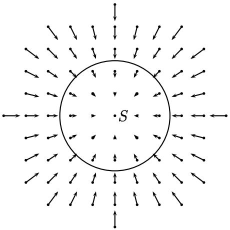
球面上のベクトル場の例

地球儀の経線を北から南に沿うようなベクトル場 V を考える。このとき、地球儀の北極点 N は V の特異点で、南極点 S も V の特異点である。

球面上のベクトル場の例

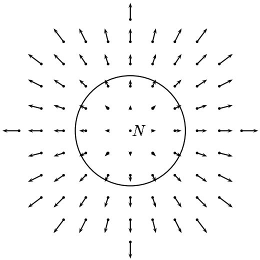
地球儀の経線を北から南に沿うようなベクトル場 V を考える。このとき、地球儀の北極点 N は V の特異点で、南極点 S も V の特異点である。

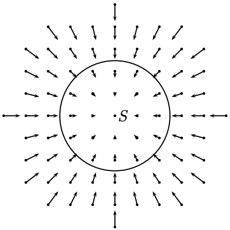




球面上のベクトル場の例

地球儀の経線を北から南に沿うようなベクトル場 V を考える。このとき、地球儀の北極点 N は V の特異点で、南極点 S も V の特異点である。

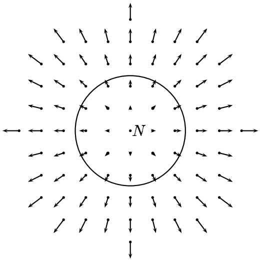




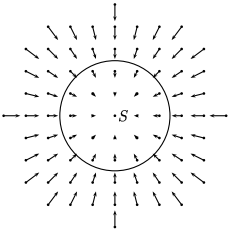
$$i(V;N)=1$$

球面上のベクトル場の例

地球儀の経線を北から南に沿うようなベクトル場 V を考える。このとき、地球儀の北極点 N は V の特異点で、南極点 S も V の特異点である。



$$i(V; N) = 1$$



$$i(V; S) = 1$$

球面上のベクトル場の例

球面上のベクトル場の例

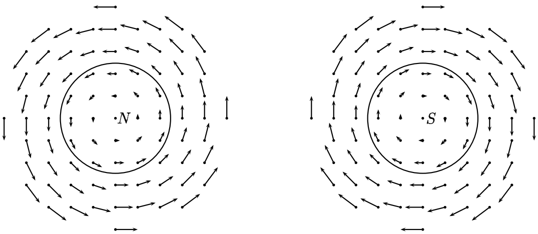
地球儀の緯線を西から東に沿うようなベクトル場 W を考える。

球面上のベクトル場の例

地球儀の緯線を西から東に沿うようなベクトル場 W を考える。このとき、地球儀の北極点 N は W の特異点で、南極点 S も W の特異点である。

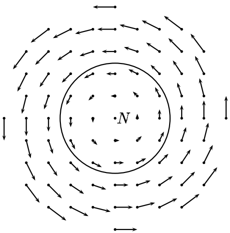
球面上のベクトル場の例

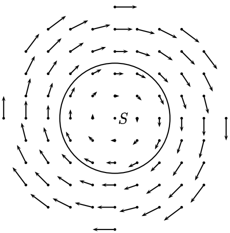
地球儀の緯線を西から東に沿うようなベクトル場 W を考える。このとき、地球儀の北極点 N は W の特異点で、南極点 S も W の特異点である。



球面上のベクトル場の例

地球儀の緯線を西から東に沿うようなベクトル場 W を考える。このとき、地球儀の北極点 N は W の特異点で、南極点 S も W の特異点である。

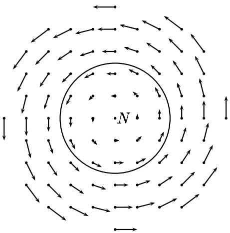


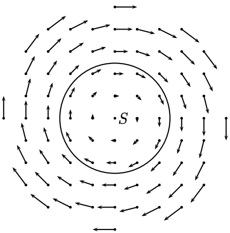


$$i(W; N) = 1$$

球面上のベクトル場の例

地球儀の緯線を西から東に沿うようなベクトル場 W を考える。このとき、地球儀の北極点 N は W の特異点で、南極点 S も W の特異点である。





$$i(W;N) = 1 \qquad i(W;S) = 1$$

球面上のベクトル場を V, W の 2 つ見たが、それぞれの指数は:

球面上のベクトル場を V, W の 2 つ見たが、それぞれの指数は:

$$i(V) = i(W) = 1 + 1 = 2\,.$$

球面上のベクトル場を V, W の 2 つ見たが、それぞれの指数は:

$$i(V) = i(W) = 1 + 1 = 2\,.$$

これは球面のオイラー標数 $\chi(S^2) = 2$ に等しい。

球面上のベクトル場を V, W の 2 つ見たが、それぞれの指数は:

$$i(V) = i(W) = 1 + 1 = 2\,.$$

これは球面のオイラー標数 $\chi(S^2) = 2$ に等しい。

偶然ではない!!

定理

定理

閉曲面 X 上のベクトル場 V が有限個の特異点しかもたない

定理

閉曲面 X 上のベクトル場 V が有限個の特異点しかもたない

$$\Longrightarrow i(V) = \chi(X) \tag{1}$$

境界のある曲面における定理

さて、円板のオイラー標数 $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$ であるが、前の例で計算した円板上のベクトル場の指数は $-2, -1, 1, 2, 3$ と様々であった。

さて、円板のオイラー標数 $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$ であるが、前の例で計算した円板上のベクトル場の指数は $-2, -1, 1, 2, 3$ と様々であった。

円板は閉曲面ではないから、定理の (1) 式には当てはめることができない。

さて、円板のオイラー標数 $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$ であるが、前の例で計算した円板上のベクトル場の指数は $-2, -1, 1, 2, 3$ と様々であった。

円板は閉曲面ではないから、定理の (1) 式には当てはめることができない。

そこで、円板でも満たすようにこの定理を拡張したい。そのために、**栓数**というものを定義する。

定義(栓数)

定義 (栓数)

境界のあるコンパクトな曲面 X を考える。

定義(栓数)

境界のあるコンパクトな曲面 X を考える。

その境界 $c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に、X が閉曲面になるように円板 Y_i をはりつける。

定義 (栓数)

境界のあるコンパクトな曲面 X を考える。

その境界 $c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に、X が閉曲面になるように円板 Y_i をはりつける。V は $\partial Y_i = c_i$ 上のベクトル場を定めるが、Y_i を $\mathbb{D}^2$ と同一視することにより、これを S^1 上の平面ベクトル場と思うことができる。

定義 (栓数)

境界のあるコンパクトな曲面 X を考える。

その境界 $c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ に、X が閉曲面になるように円板 Y_i をはりつける。V は $\partial Y_i = c_i$ 上のベクトル場を定めるが、Y_i を $\mathbb{D}^2$ と同一視することにより、これを S^1 上の平面ベクトル場と思うことができる。このベクトル場の回転数を V の c_i における**栓数**とよび、$s(V; c_i)$ とかく。

定理

定理

境界 $c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ をもつコンパクトな曲面 X 上のベクトル場 V が有限個の特異点しか持たず、どの特異点も境界上にはないならば、次式が成り立つ:

定理

境界 $c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ をもつコンパクトな曲面 X 上のベクトル場 V が有限個の特異点しか持たず、どの特異点も境界上にはないならば、次式が成り立つ:

$$i(V) = \chi(X) - \sum_{i=1}^{n} (s(V; c_i) - 1) .$$

注意

注意

(1) X 上のベクトル場 V が境界ですべて外を向いている場合を考えるとき $s(V; c_i) = 1$ となるため、定理より、$i(V) = \chi(X)$ である。

注意

(1) X 上のベクトル場 V が境界ですべて外を向いている場合を考えるとき $s(V; c_i) = 1$ となるため、定理より、$i(V) = \chi(X)$ である。

(2) $s(V; c_i) - 1$ とは、$V|c_i$ の回転数と Y_i の外向き法線ベクトル場の回転数との差であると考えられる。

注意

(1) X 上のベクトル場 V が境界ですべて外を向いている場合を考えるとき $s(V;c_i)=1$ となるため、定理より、$i(V)=\chi(X)$ である。

(2) $s(V;c_i)-1$ とは、$V|c_i$ の回転数と Y_i の外向き法線ベクトル場の回転数との差であると考えられる。

(3) この定理は、Morse が 1929 年に発見した定理:

$$i(V)=\chi(X)-i(\partial\_V)$$

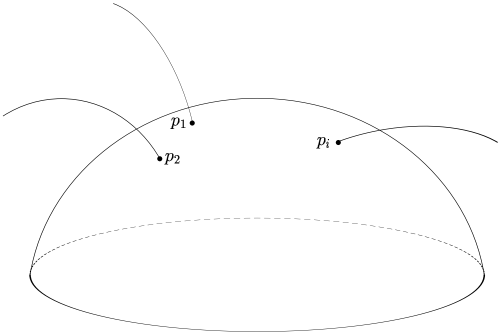
の特別な場合である。

つむじ

人間の頭に注目

人間の頭に注目

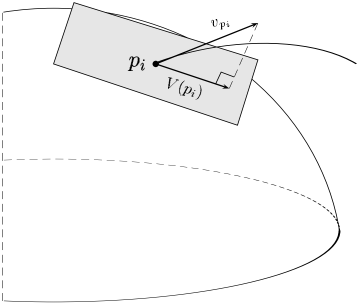
頭を半球 X と思い、X 上の点 (毛穴) を $p_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする。



p_i の周りに注目

p_i の周りに注目

p_i から生える髪の毛の p_i における単位接ベクトルを v_{p_i} とし、v_{p_i} を p_i での接平面へ直交射影したものを $V(p_i)$ とする。



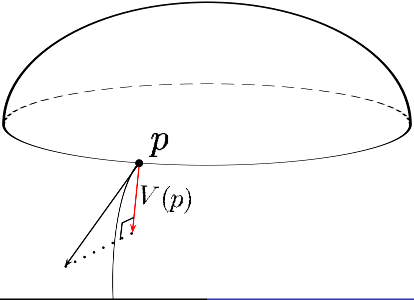
条件

条件

(1) $V(p_i)$ たちが X 上の接ベクトル場 V に連続に拡張している。

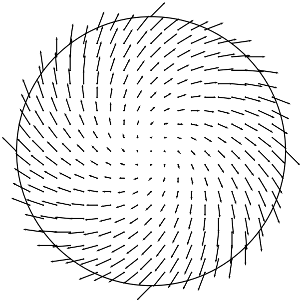
条件

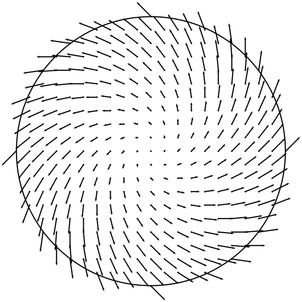
(1) $V(p_i)$ たちが X 上の接ベクトル場 V に連続に拡張している。
(2) 重力により X のふちでは髪の毛は下向きに生えている。



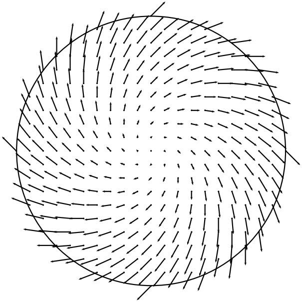
よくあるつむじから得られるベクトル場を観察する。

よくあるつむじから得られるベクトル場を観察する。

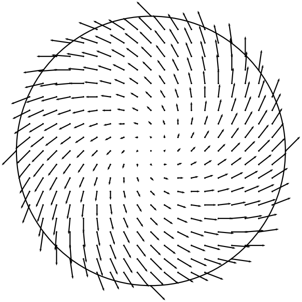




よくあるつむじから得られるベクトル場を観察する。



(1) $i(V) = 1$



(2) $i(V) = 1$

つむじが (1)(2) のようなものばかりであれば、つむじ (特異点) の個数は 1 つに限られる。

つむじが (1)(2) のようなものばかりであれば、つむじ (特異点) の個数は 1 つに限られる。もしこのようなタイプのつむじが 2 つ以上あるとすれば、

つむじが(1)(2)のようなものばかりであれば、つむじ(特異点)の個数は1つに限られる。もしこのようなタイプのつむじが2つ以上あるとすれば、$i(V) \geqq 2$となり、公式

$$i(V) = \chi(X) = 1$$

に反するからである。

終わり

ご清聴有難うございました