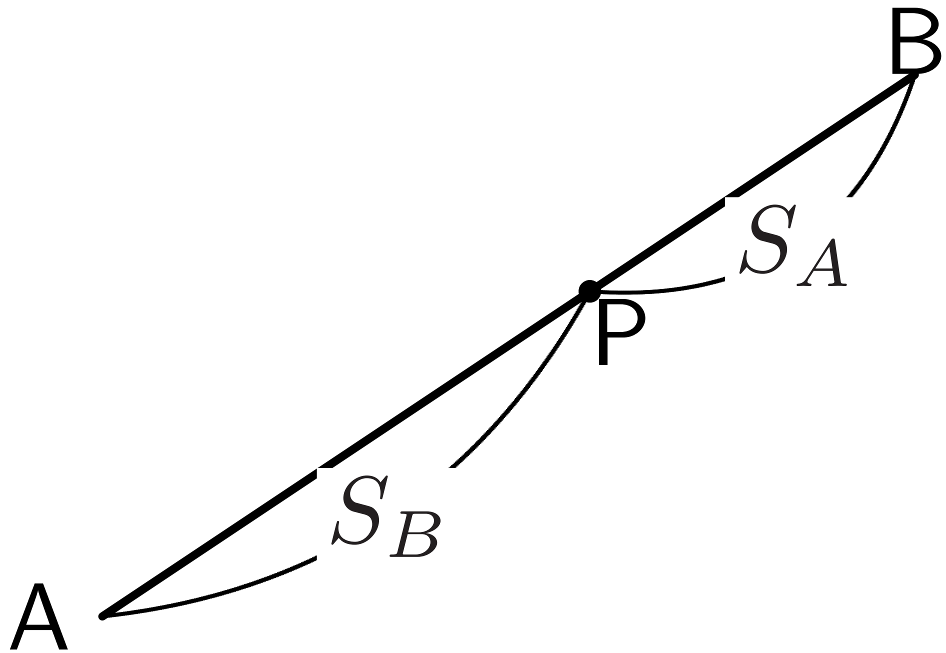
空間の分割

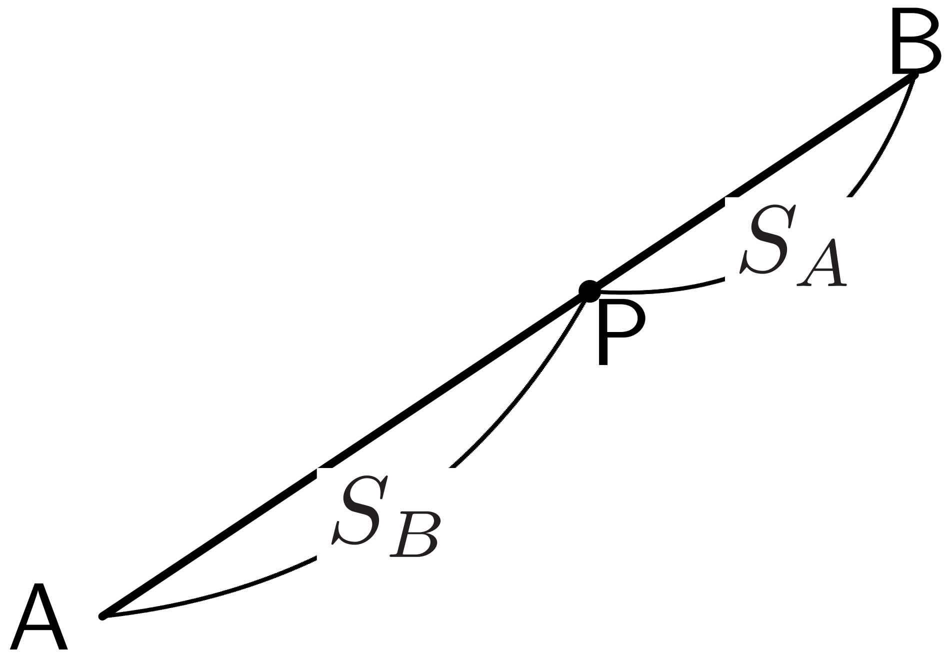
岡山理科大学　理学部　基礎理学科

２００５年度　山崎（正）ゼミ

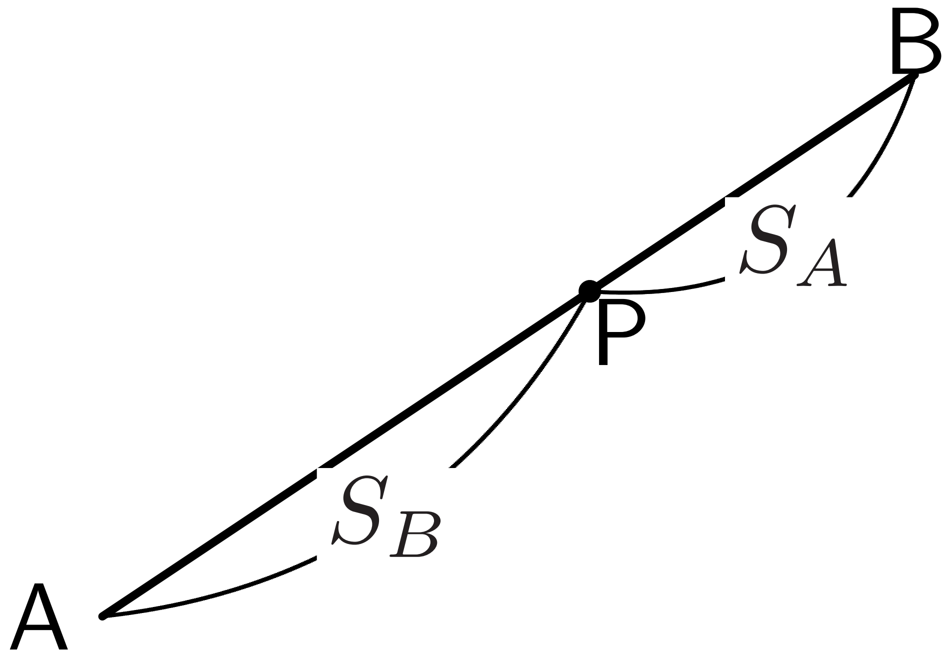
S02S059 田村幸子　S02S074 難波里恵

1. 線分・三角形の重心座標


B
S_A
P
S_B
A

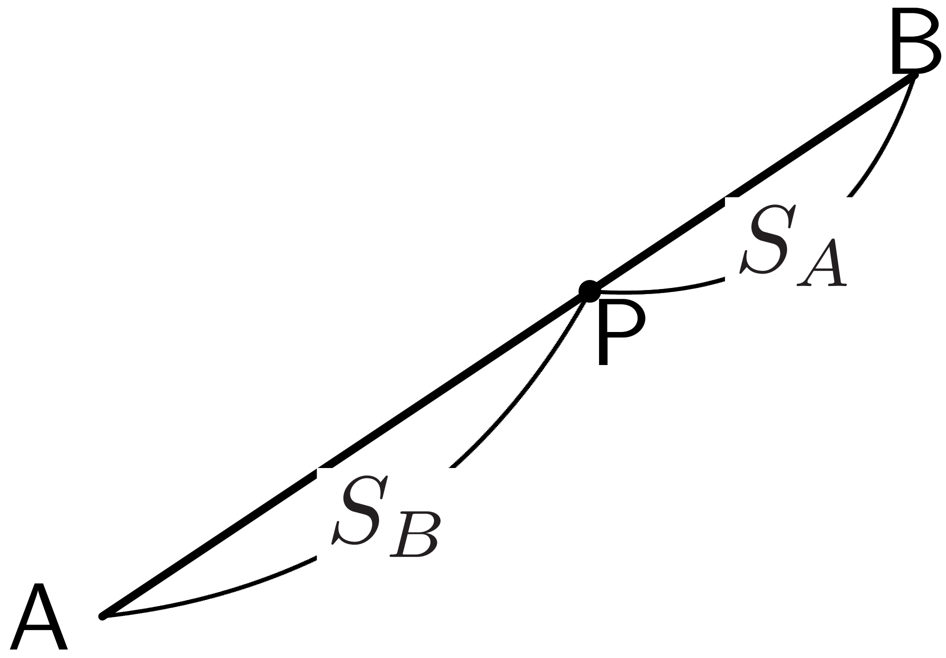


$$\overrightarrow{\mathsf{OP}} = \frac{S_A\overrightarrow{\mathsf{OA}} + S_B\overrightarrow{\mathsf{OB}}}{S_A + S_B}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{O\,P}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{O\,A}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{O\,B}}$$

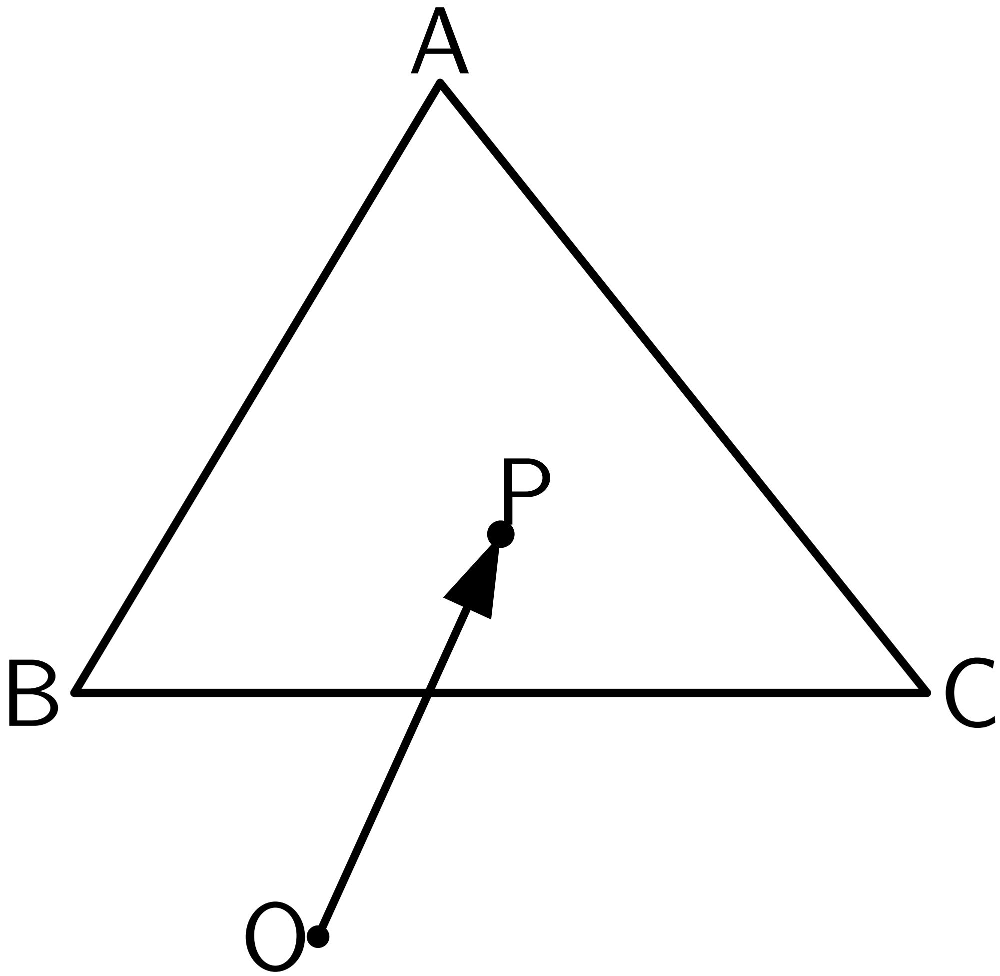
$$(\alpha + \beta = 1, \quad \alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0)$$



$$\overrightarrow{\mathrm{O\,P}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{O\,A}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{O\,B}}$$

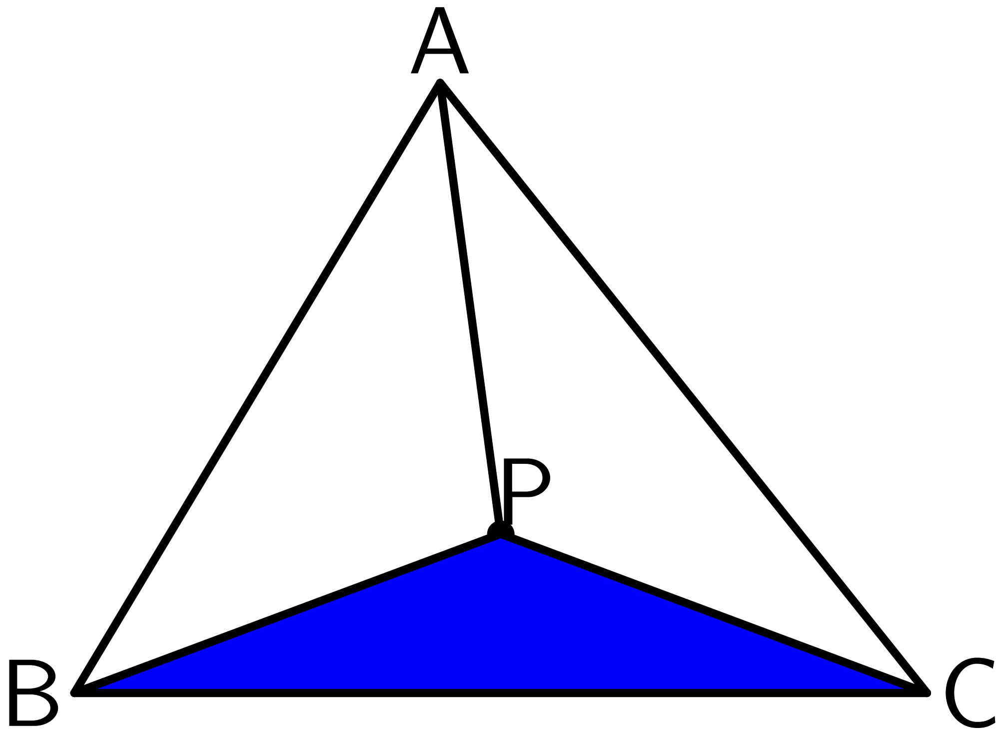
$$(\alpha + \beta = 1, \quad \alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0)$$

(α, β) **：Ｐの線分ＡＢにおける重心座標**

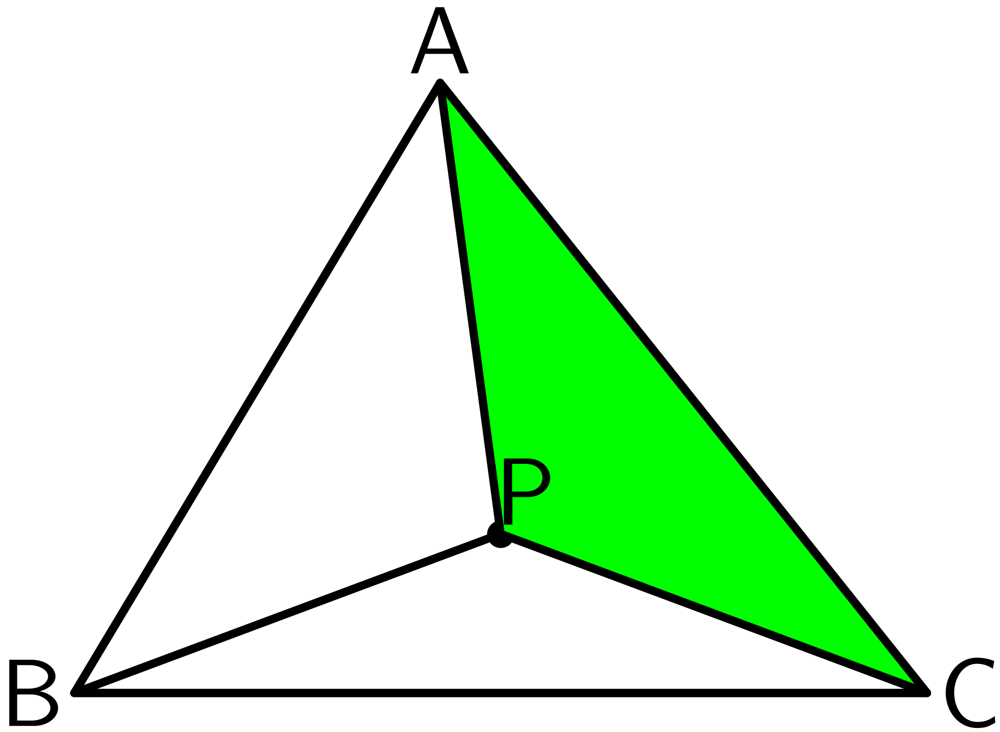


$$\overrightarrow{\mathrm{O\,P}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{O\,A}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{O\,B}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{O\,C}}$$

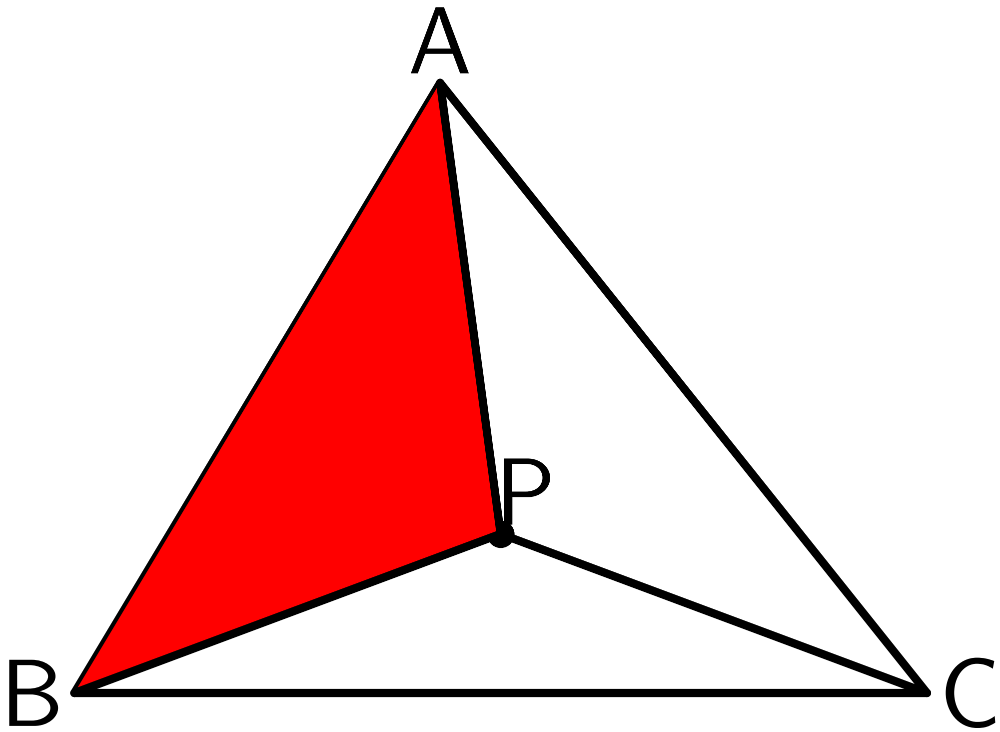
$$(\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0, \quad \gamma \geqq 0)$$



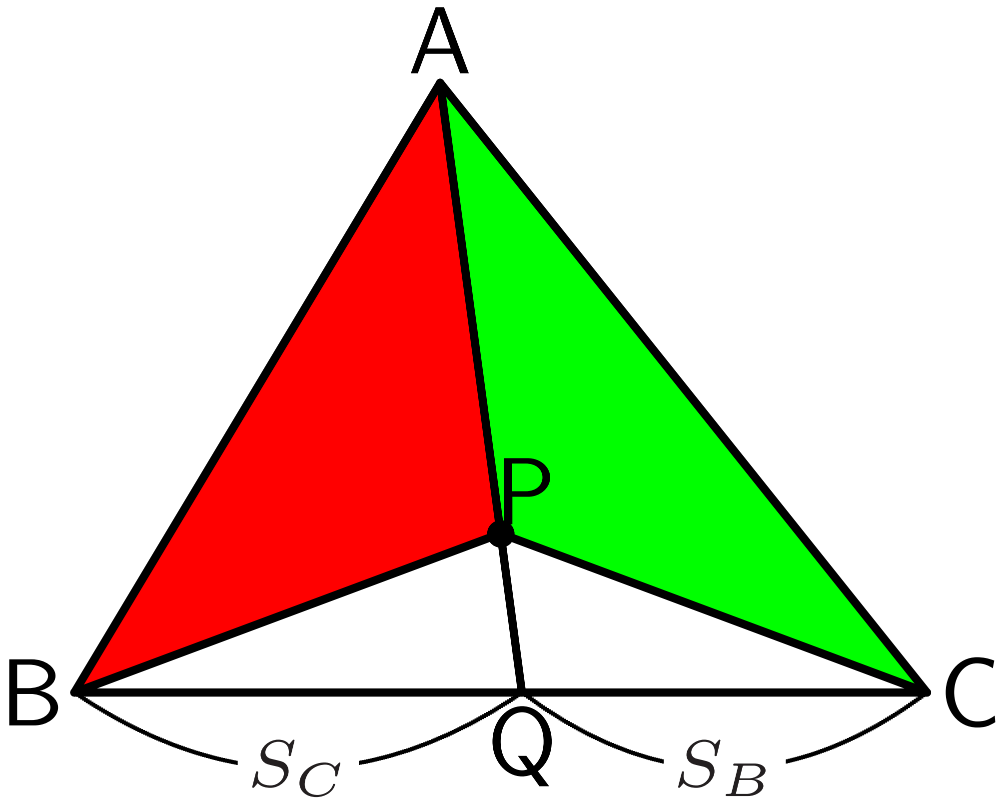
$$S_A = \triangle\mathrm{PBC}$$



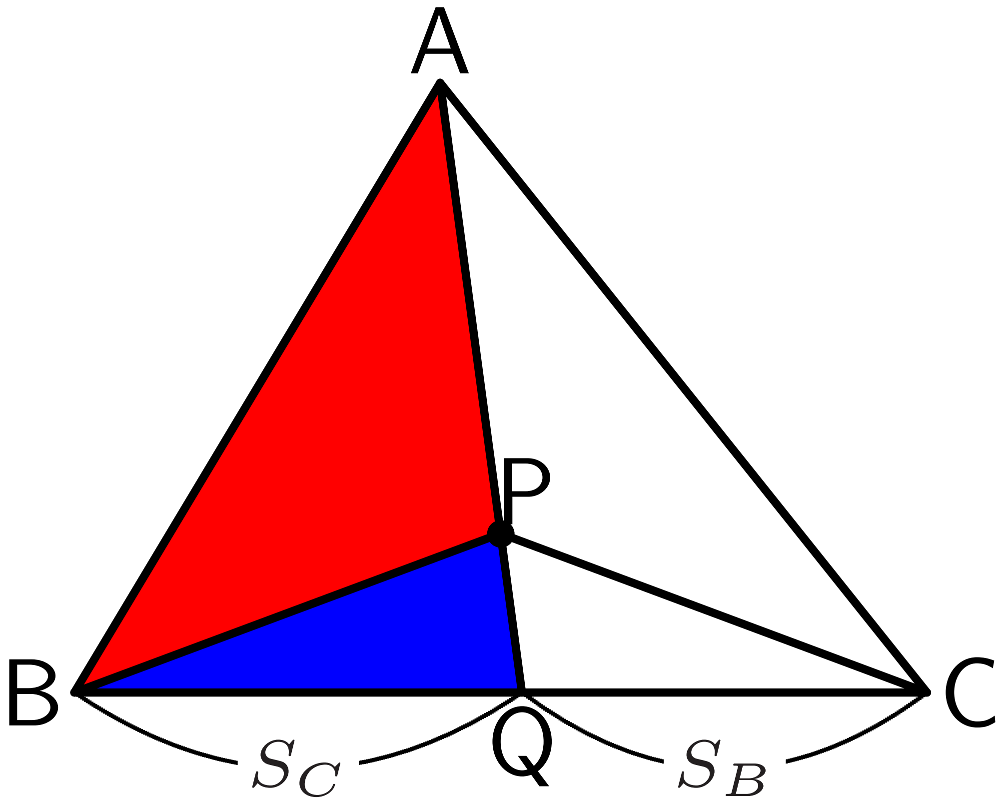
$$S_B = \triangle \mathrm{PCA}$$



$$S_C = \triangle \mathrm{PAB}$$

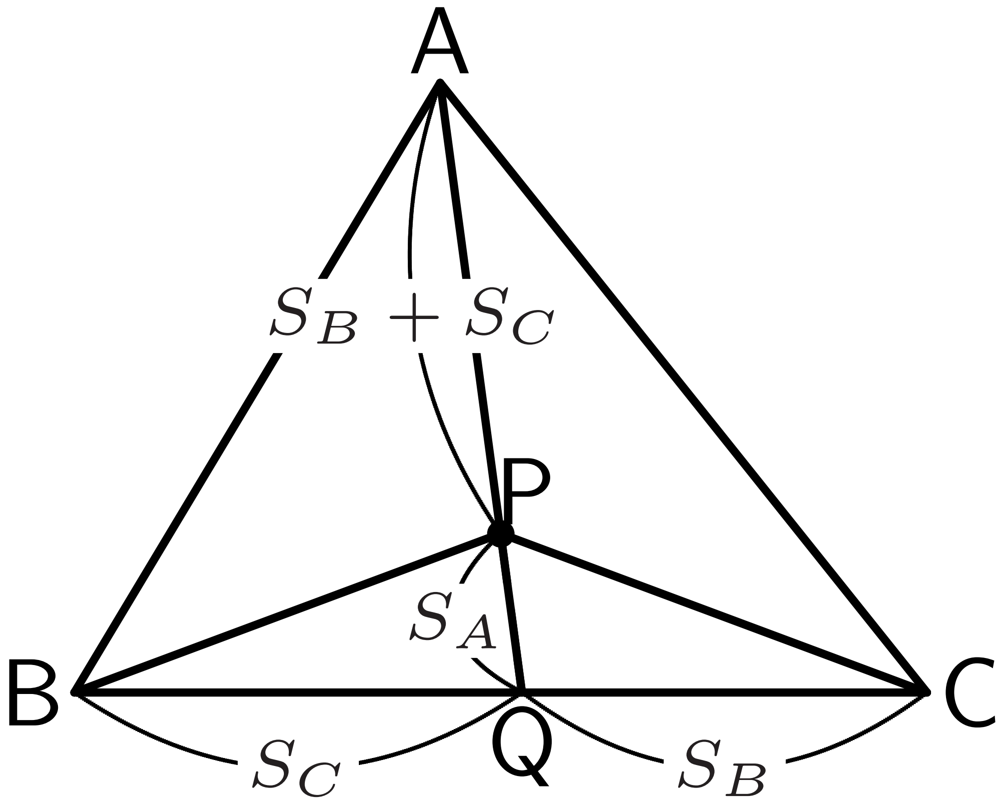


$$\mathrm{BQ} : \mathrm{CQ} = S_C : S_B$$

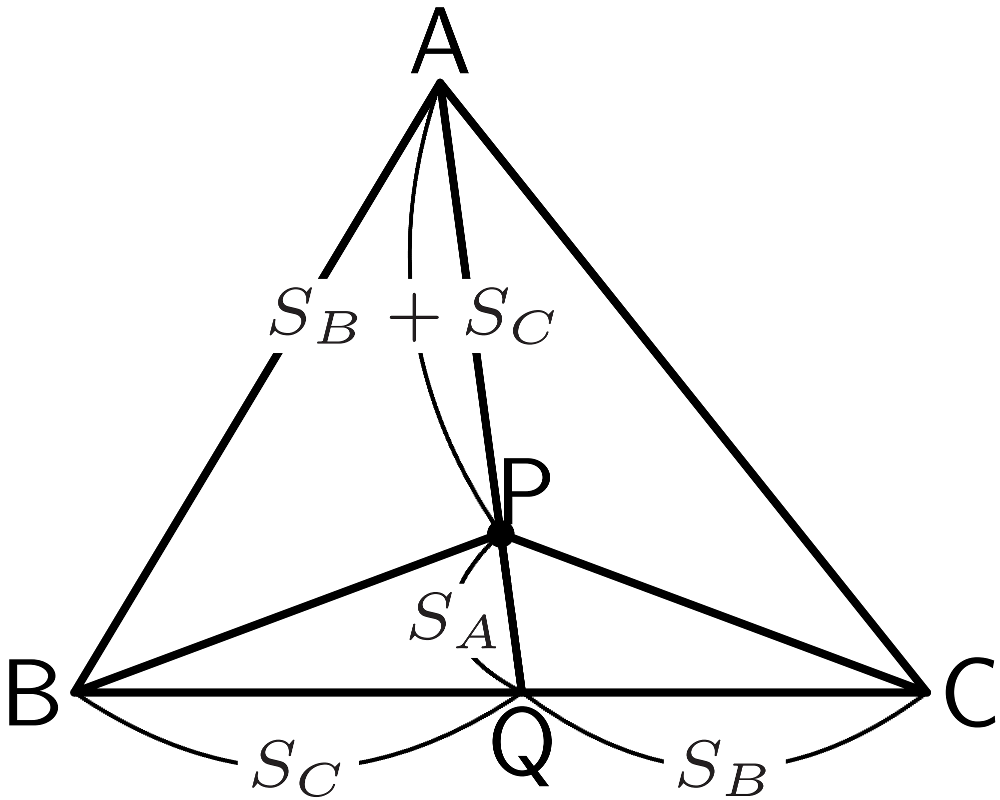


$$\triangle \mathrm{PBQ} = \frac{S_C}{S_B + S_C} S_A$$

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PQ} = S_C : \tfrac{S_C}{S_B+S_C} S_A = (S_B + S_C) : S_A$$



$$\overrightarrow{\mathrm{O\,Q}} = \frac{S_B}{S_B + S_C}\overrightarrow{\mathrm{O\,B}} + \frac{S_C}{S_B + S_C}\overrightarrow{\mathrm{O\,C}}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{O\,Q}} = \frac{S_B}{S_B + S_C}\overrightarrow{\mathrm{O\,B}} + \frac{S_C}{S_B + S_C}\overrightarrow{\mathrm{O\,C}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O\,P}} = \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C}\overrightarrow{\mathrm{O\,A}} + \frac{S_B + S_C}{S_A + S_B + S_C}\overrightarrow{\mathrm{O\,Q}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O\,P}} = \frac{S_A\overrightarrow{\mathrm{O\,A}} + S_B\overrightarrow{\mathrm{O\,B}} + S_C\overrightarrow{\mathrm{O\,C}}}{S_A + S_B + S_C}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O\,P}} = \frac{S_A\overrightarrow{\mathrm{O\,A}} + S_B\overrightarrow{\mathrm{O\,B}} + S_C\overrightarrow{\mathrm{O\,C}}}{S_A + S_B + S_C}$$

$$\alpha = \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C}, \quad \beta = \frac{S_B}{S_A + S_B + S_C},$$

$$\gamma = \frac{S_C}{S_A + S_B + S_C}$$

(1) 重心の重心座標

(1) 重心の重心座標

Pが重心の場合、

$S_A = S_B = S_C$ **であるから、**

(1) 重心の重心座標

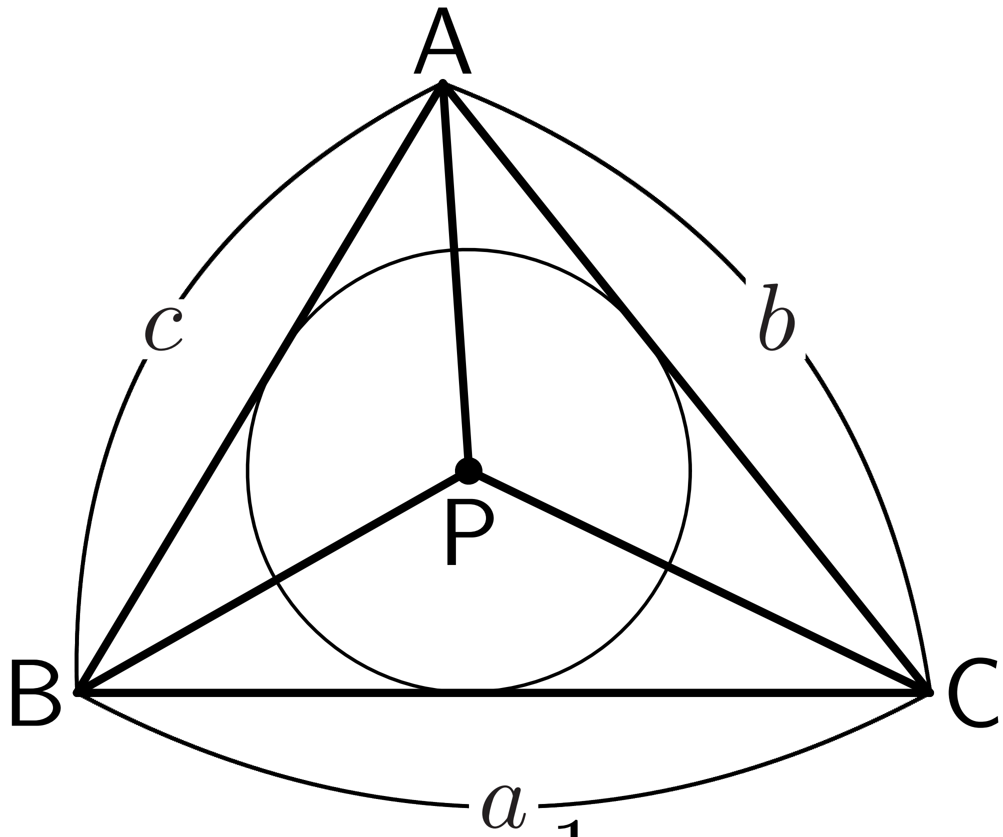
Pが重心の場合、

$S_A = S_B = S_C$ **であるから、**

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$$

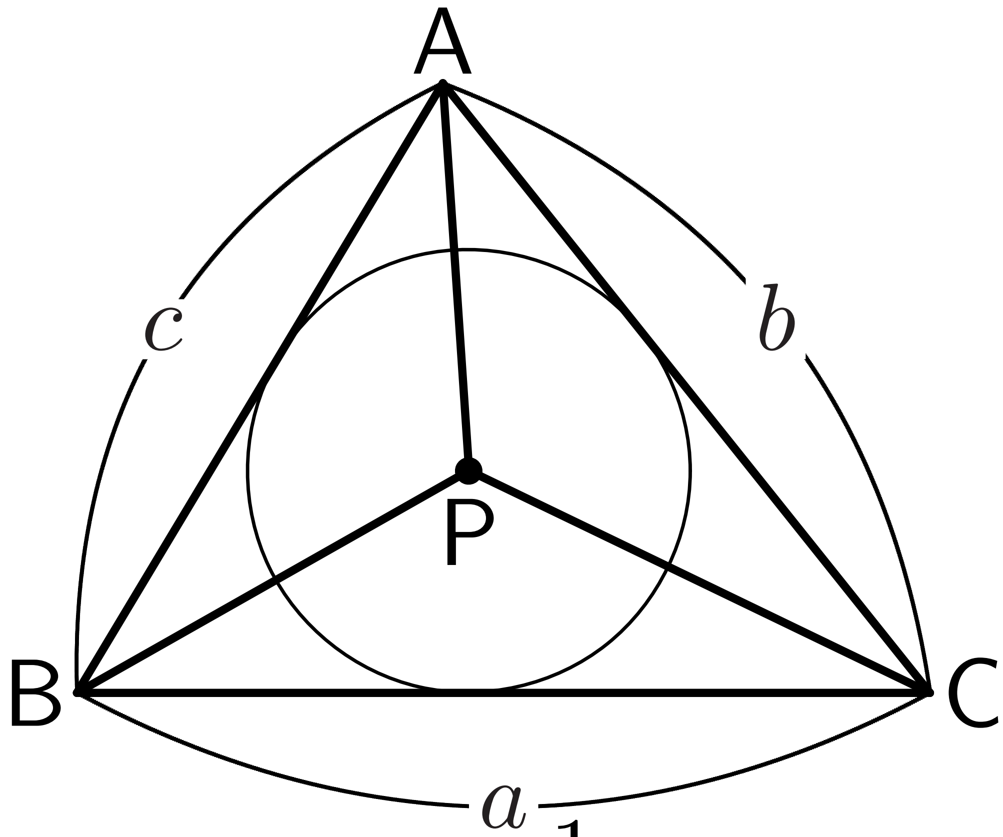
(2) 内心の重心座標

(2) 内心の重心座標



$$S_A = \frac{1}{2}\,ar, \quad S_B = \frac{1}{2}\,br, \quad S_C = \frac{1}{2}\,cr$$

(2) 内心の重心座標

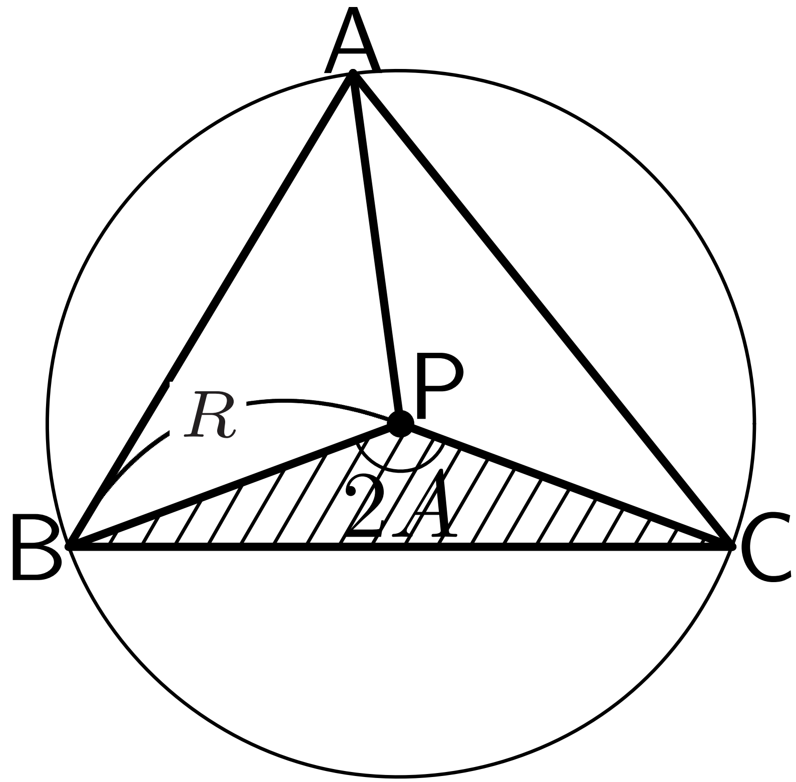


$$S_A = \frac{1}{2}\,ar, \quad S_B = \frac{1}{2}\,br, \quad S_C = \frac{1}{2}\,cr$$

$$\alpha = \frac{a}{a+b+c}, \quad \beta = \frac{b}{a+b+c}, \quad \gamma = \frac{c}{a+b+c}$$

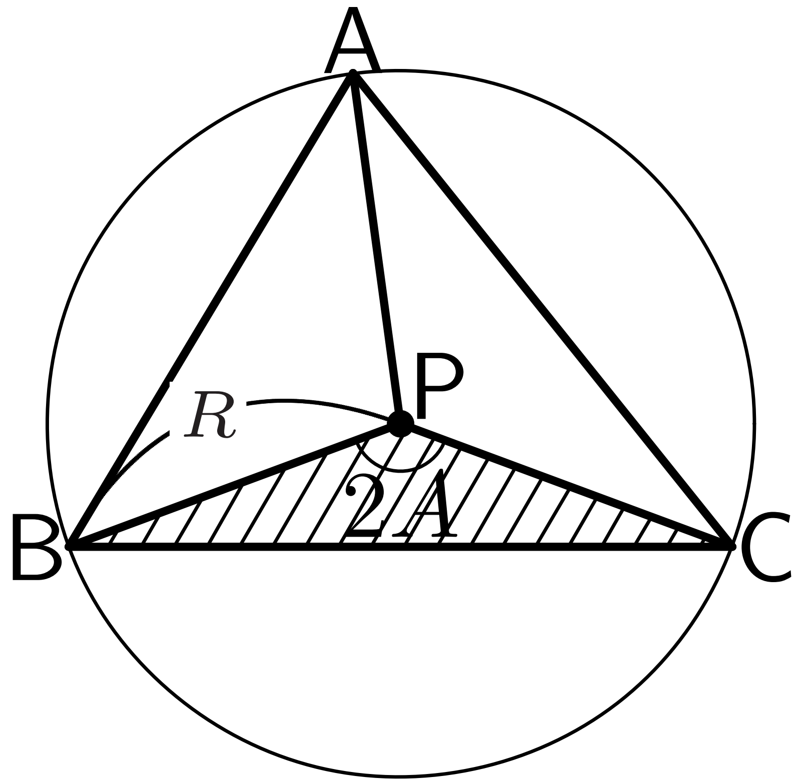
(3) 外心の重心座標

(3) 外心の重心座標



$$S_A = \frac{1}{2}\,R^2 \sin 2A,\ \ S_B = \frac{1}{2}\,R^2 \sin 2B,\ \ S_C = \frac{1}{2}\,R^2 \sin 2C$$

(3) 外心の重心座標

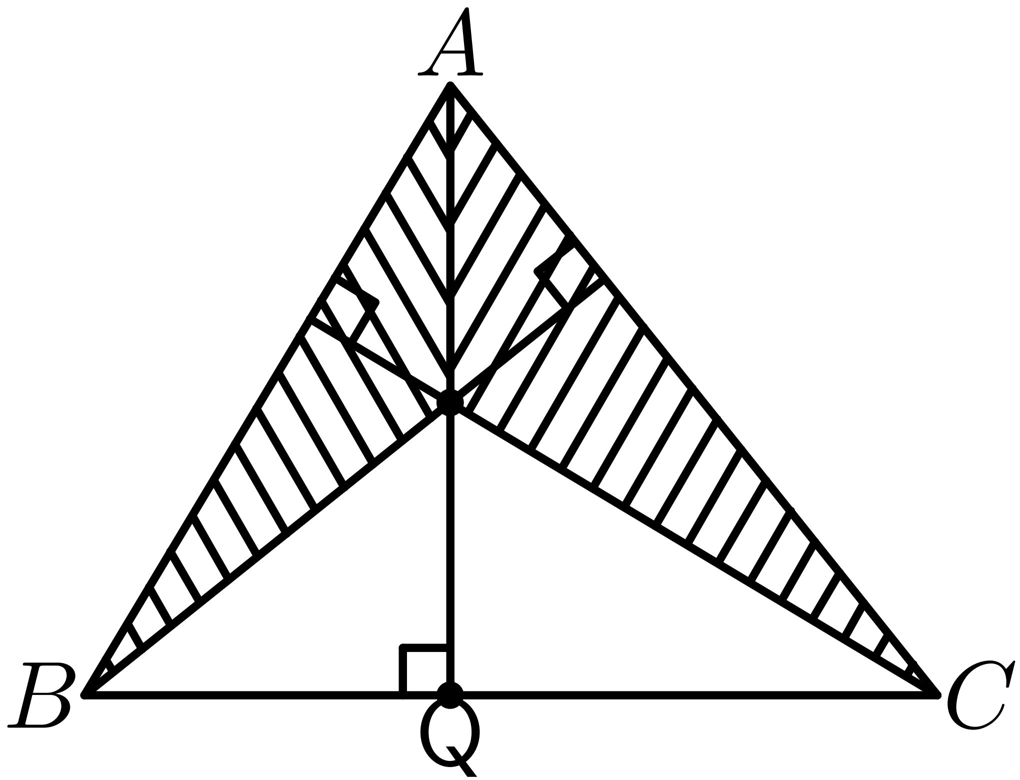


$$\alpha = \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \ \beta = \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C},$$

$$\gamma = \frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

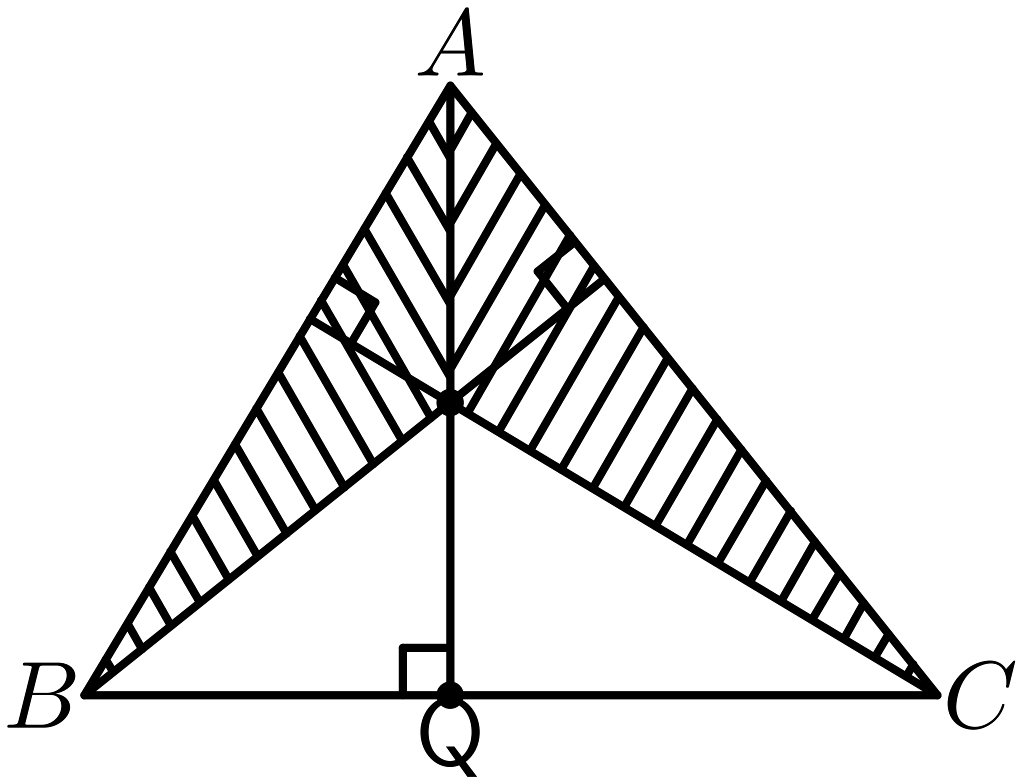
(4) 垂心の重心座標

(4) 垂心の重心座標



$$S_A : S_B : S_C = \tan A : \tan B : \tan C$$

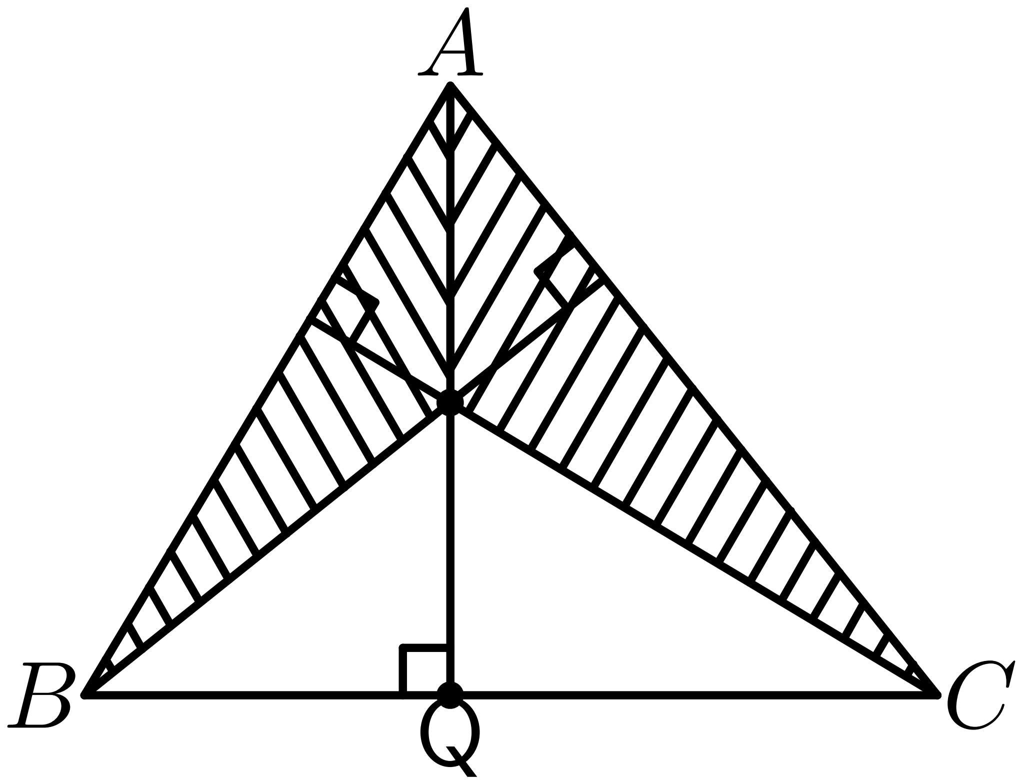
(4) 垂心の重心座標



$$S_A : S_B : S_C = \tan A : \tan B : \tan C$$

$$\tan B : \tan C = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{BQ}} : \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}} = \mathrm{CQ} : \mathrm{BQ} = S_B : S_C$$

(4) 垂心の重心座標



$$\alpha = \frac{\tan A}{\tan A + \tan B + \tan C}, \quad \beta = \frac{\tan B}{\tan A + \tan B + \tan C},$$

$$\gamma = \frac{\tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}$$

2. 単体複体

次は同値：

- ３点 A_0，A_1，A_2 は一直線上にない

次は同値：

- ３点 $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2$ は一直線上にない
- $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}$ は一次独立

次は同値：

- ３点 A_0，A_1，A_2 は一直線上にない
- $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}$ は一次独立
- $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_0}$ は一次独立
- $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1}$ は一次独立

$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A_0A_n}}$ が一次独立であるとき、

$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ が一般の位置にある

という。

N 次元ユークリッド空間の $n+1$ 個の点 A_0, A_1, . . . , A_n が一般の位置にあるとき、それらを含む最小の凸集合を

A_0, A_1, . . . , A_n を頂点とする n 単体

といい、$\left|A_0, A_1, \cdots, A_n\right|$ と表す。

また、n を n 単体の次元という。

n 単体 $\left|A_0, A_1, \cdots, A_n\right|$ の点Ｐに対しても、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha_0\overrightarrow{\mathrm{OA_0}} + \alpha_1\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathrm{OA_n}}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1, \quad \alpha_i \geqq 0)$$

となる $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ が存在する。

これをＰの重心座標という。

n 単体 $\left|\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_\mathrm{n}\right|$ の頂点 $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \ldots,\ \mathrm{A}_n$ から $q+1$ 個の点を選べば、選んだ $q+1$ 個の点も一般の位置にあり、この $q+1$ 個の点を頂点とする q 単体が定まる。

これを q 面または面という。

例えば、２単体 $\left|A_0, A_1, A_2\right|$ では、

例えば、２単体 $\left|A_0, A_1, A_2\right|$ では、

0 面は３頂点 $\left|A_0\right|$, $\left|A_1\right|$, $\left|A_2\right|$

例えば、２単体 $|A_0, A_1, A_2|$ では、

0 面は３頂点 $|A_0|$, $|A_1|$, $|A_2|$

1 面は３つの辺 $|A_0, A_1|$, $|A_1, A_2|$, $|A_2, A_0|$

例えば、２単体 $\left|A_0, A_1, A_2\right|$ では、

0 面は３頂点 $\left|A_0\right|, \left|A_1\right|, \left|A_2\right|$

1 面は３つの辺 $\left|A_0, A_1\right|, \left|A_1, A_2\right|, \left|A_2, A_0\right|$

2 面は $\left|A_0, A_1, A_2\right|$ 自身

定義：N 次元ユークリッド空間の中の有限個の単体からなる集合 K が次の二つの条件を満たすとき、単体複体または単体的複体という。

定義：N 次元ユークリッド空間の中の有限個の単体からなる集合 K が次の二つの条件を満たすとき、単体複体または単体的複体という。

(1) **S を K に属する単体とするとき、S の面はまた K に属する。**

定義：N **次元ユークリッド空間の中の有限個の単体からなる集合** K **が次の二つの条件を満たすとき、単体複体または単体的複体という。**

(1) S **を** K **に属する単体とするとき、**S **の面はまた** K **に属する。**

(2) S, S' **を** K **に属する二つの単体とし,** $S \cap S'$ **が空でないとき、それは** S **の面であると同時に** S' **の面でもある。**

K に属する 0 単体を K の頂点という。

K に属する 0 単体を K の頂点という。

K に属する単体の次元の最大次元を単体複体 K の次元といい、$\dim K$ とかく。

例１．S を n 単体とするとき、

$$K(S) = \{\ S' \mid S' \text{は } S \text{ の面}\ \}$$

は単体複体である。

例１． S **を** n **単体とするとき、**

$$K(S) = \{\ S' \mid S' \text{は } S \text{ の面}\ \}$$

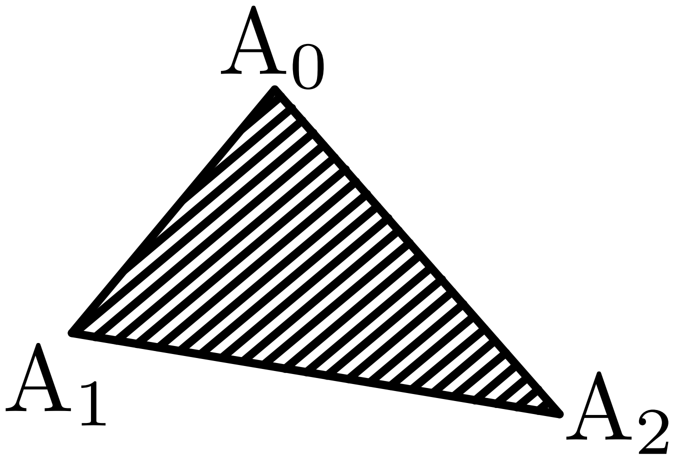
は単体複体である。

$K(S)$ **に含まれる単体の中で最高次元の単体は** S **自身であるので、**

$$\dim K(S) = n\ .$$

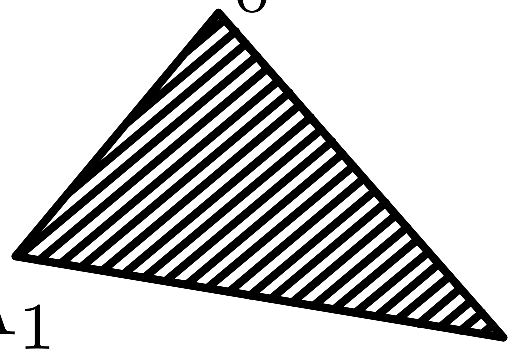
例１．（続き）

$$S = \left| \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \right|$$



例１．（続き）

$$S = \left| \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \right|$$

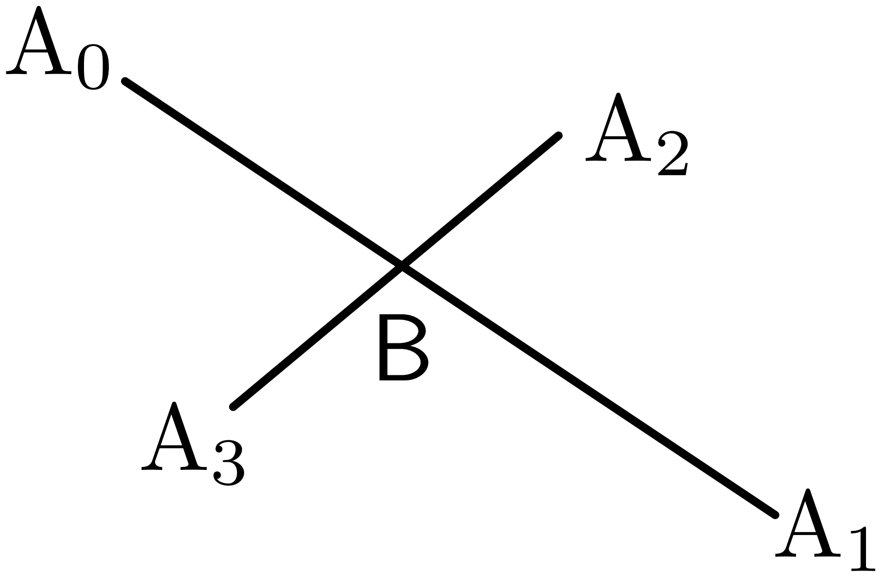


$$K(S) = \{ \left| \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \right|, \left| \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1 \right|,$$

$$\left| \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \right|, \left| \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_0 \right|, \left| \mathrm{A}_0 \right|, \left| \mathrm{A}_1 \right|, \left| \mathrm{A}_2 \right| \}$$

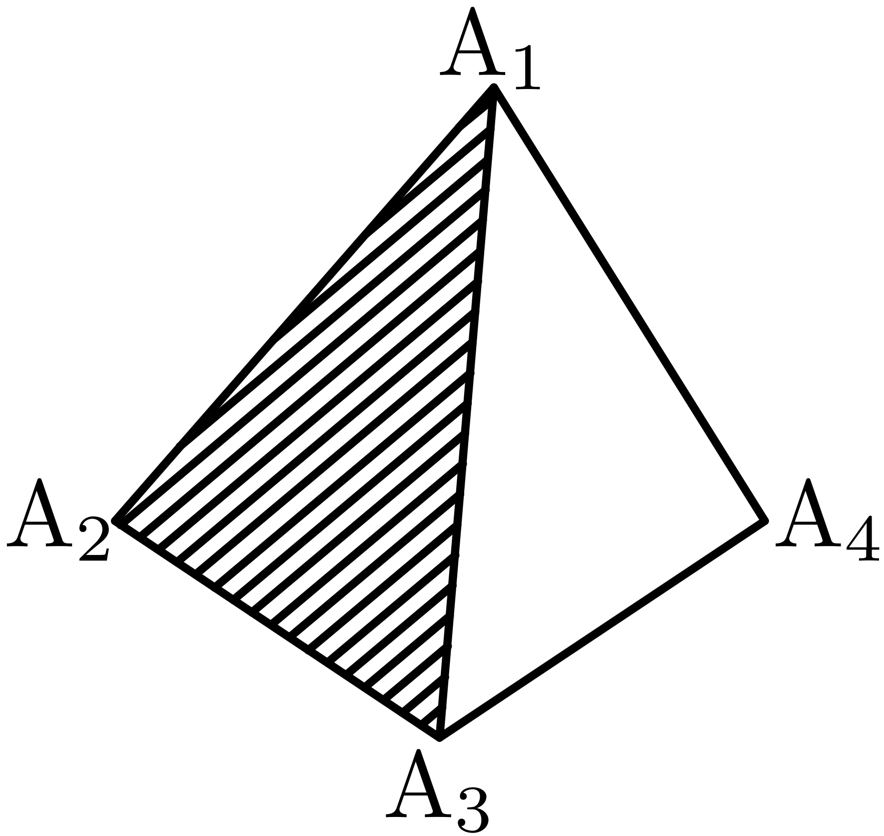
例 2. 条件 (1) を満たし、条件 (2) を満たさない例

$$K = \{|\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1|, |\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3|, |\mathrm{A}_0|, |\mathrm{A}_1|, |\mathrm{A}_2|, |\mathrm{A}_3|\}$$



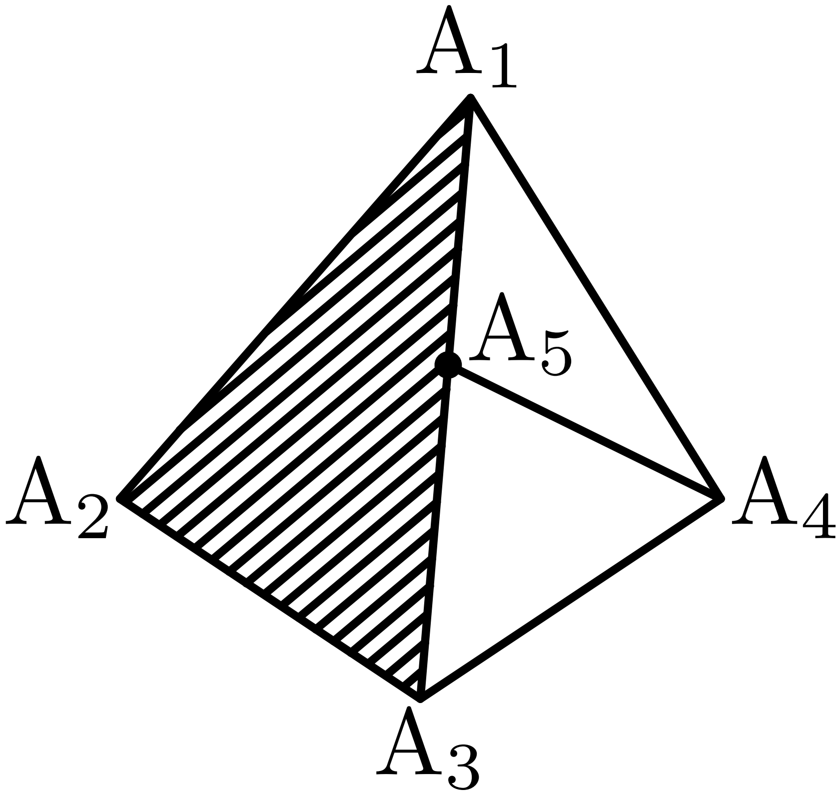
例３．単体複体の例。

$$K = \{|\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3|, |\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2|, |\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3|, |\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_1|, \\ |\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4|, |\mathrm{A}_4, \mathrm{A}_1|, |\mathrm{A}_1|, |\mathrm{A}_2|, |\mathrm{A}_3|, |\mathrm{A}_4|\}$$

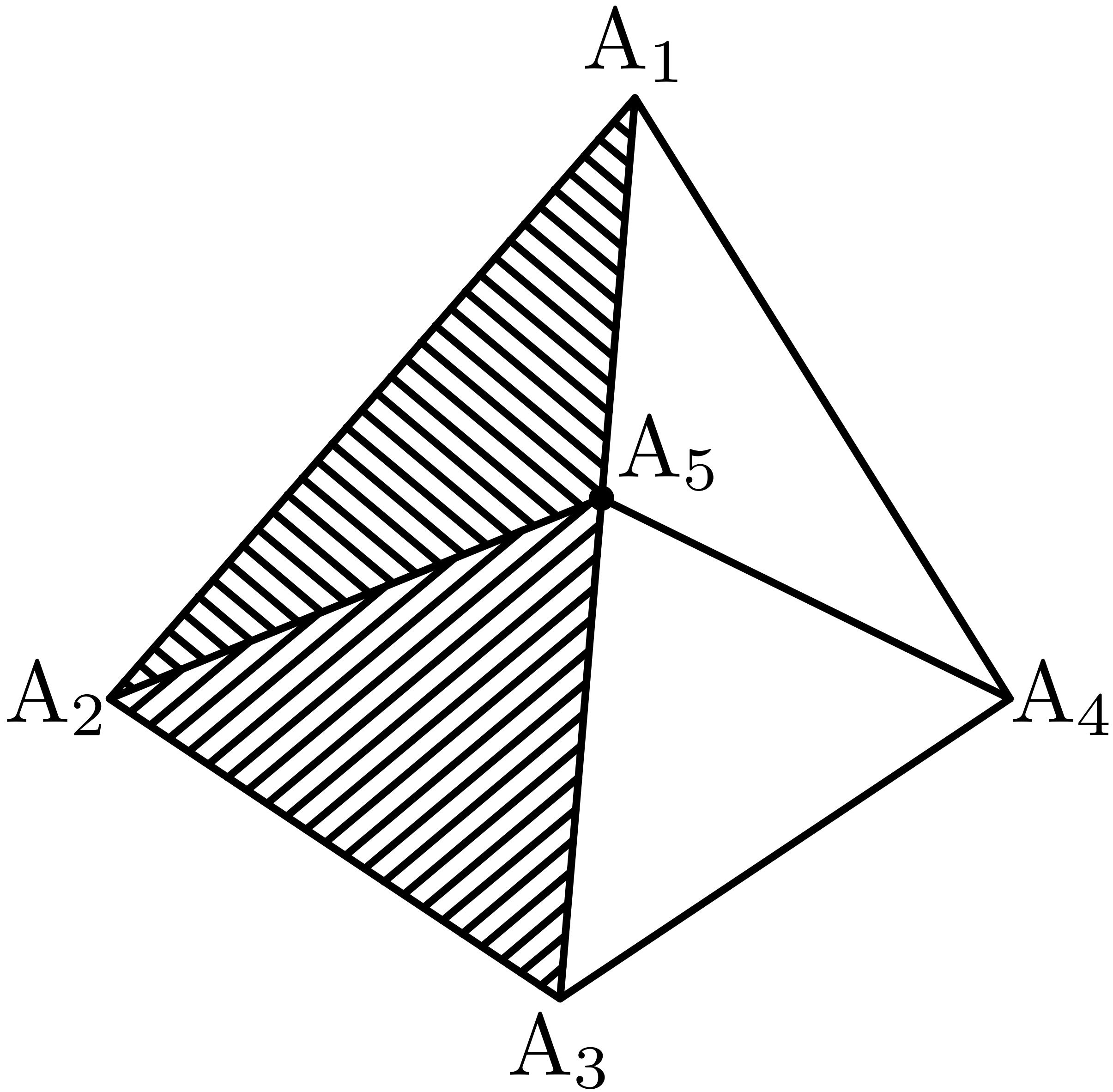


例４．条件（２）を満たさない例

$$\{|A_1, A_2, A_3|, |A_1, A_2|, |A_2, A_3|, |A_3, A_1|, |A_3, A_4|,$$
$$|A_4, A_1|, |A_4, A_5|, |A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|, |A_5|\}$$



例５. 単体複体の例



例６．S が n 単体ならば

$$K(\partial S) = K(S) - \{S\}$$

は単体 S の境界を表す単体複体である。

例えば $S = \left|\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\right|$ に対して、

$$\begin{aligned} K(\partial S) = \{ &\left|\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1\right|, \left|\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\right|, \left|\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_0\right|, \\ &\left|\mathrm{A}_0\right|, \left|\mathrm{A}_1\right|, \left|\mathrm{A}_2\right|\} \end{aligned}$$

は１次元単体複体である。

定義　単体複体 K に属する全ての単体の和集合を K の多面体または実現といい $\left|K\right|$ と表す。与えられた図形 X に対し $X \cong |K|$ (位相同型) となる K とこの位相同型写像の対を X の単体分割 または三角形分割という。

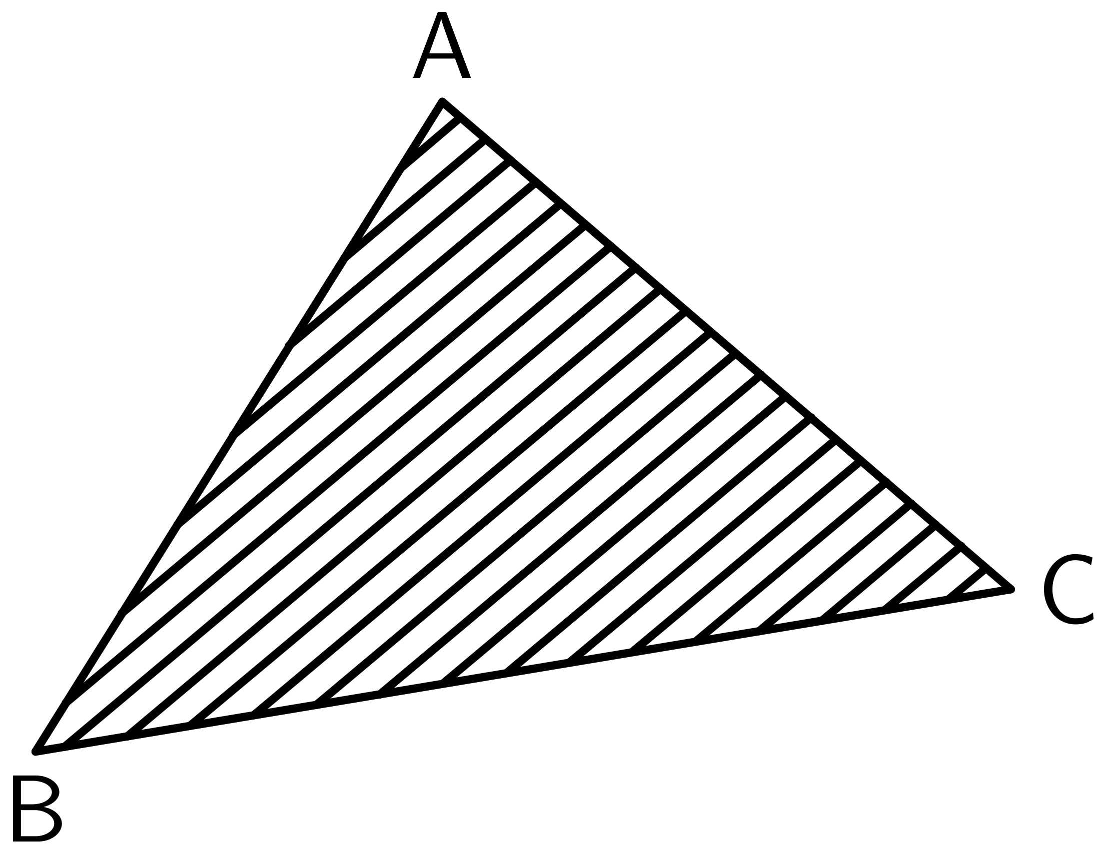
定義　単体複体 K のオイラー数 $\chi(K)$ を

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q (K \text{ の } q \text{ 単体の数})$$

で定める。

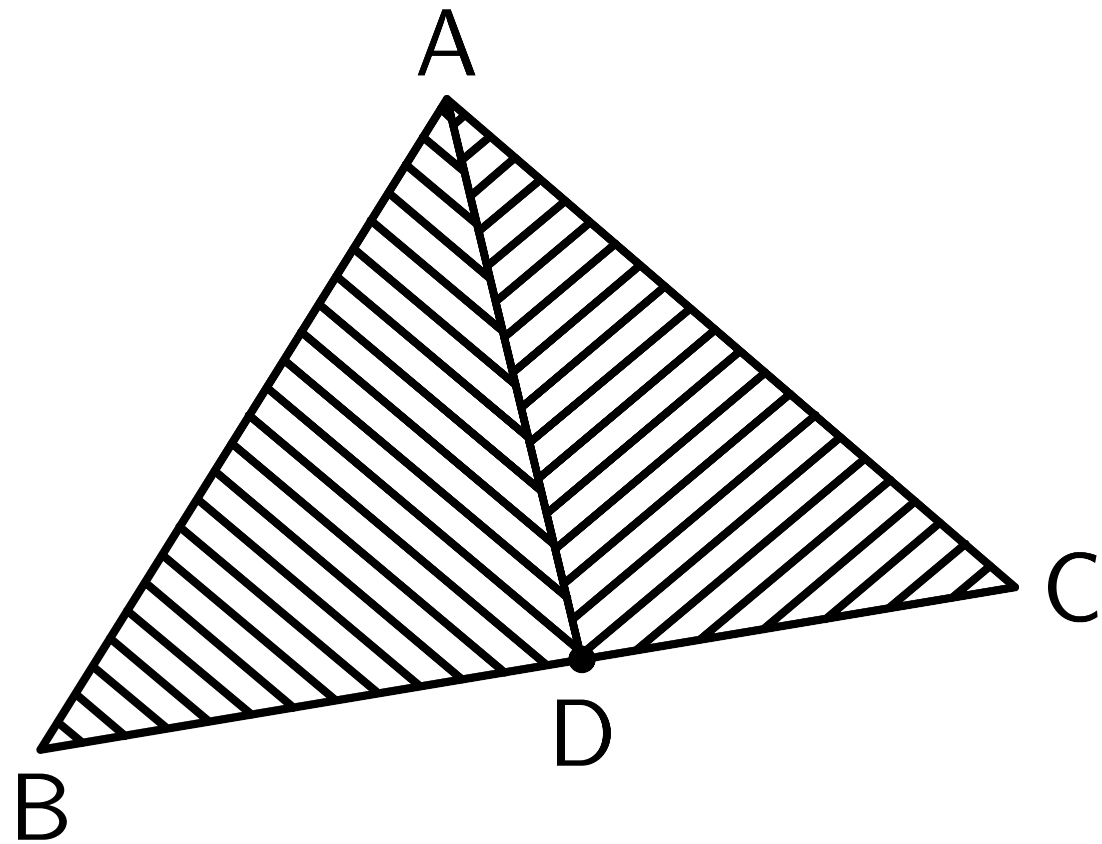
例 (1)

$$\chi(K(S)) = 3-3+1 = 1, \quad \chi(K(\partial S)) = 3-3 = 0.$$



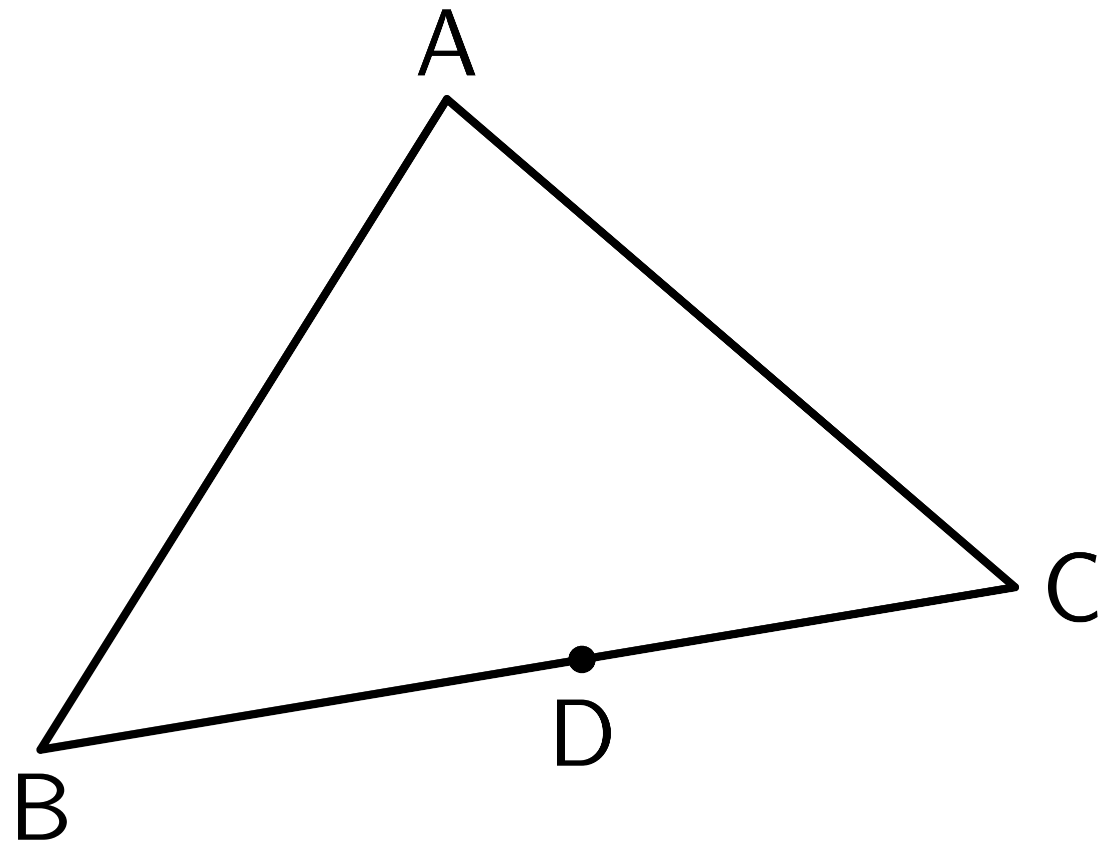
例 (2)

$$\chi(K') = 4 - 5 + 2 = 1.$$



例 (3)

$$\chi(K'') = 4 - 4 = 0.$$



命題

S を n 単体とすると、

$$\chi(K(S)) = 1,$$

$$\chi(K(\partial S)) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & n\,\text{が偶数のとき}, \\ 2 & n\,\text{が奇数のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。

証明

等式

$$(1+(-1))^{n+1}=0$$

の左辺に二項定理を適用して、等式

$${}_{n+1}\mathrm{C}_1 - {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots + (-1)^n {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = 1$$

が得られる。従って

$$\chi(K(S)) = {}_{n+1}\mathrm{C}_1 - {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots + (-1)^n {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = 1$$

$$\chi(K(\partial S)) = {}_{n+1}\mathrm{C}_1 - {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + \cdots$$
$$+(-1)^{n-1} {}_{n+1}\mathrm{C}_n = 1-(-1)^n$$

定義　ある点 B と q 単体 $S = \left|A_0, \cdots, A_q\right|$ の頂点 A_0, . . . , A_q の計 $q+2$ 個の点が一般の位置にあるとき、

$$B * S := \left|B, A_0, \cdots, A_q\right|$$

を点 B と単体 S のジョイン (join) という。

単体複体 K に対し、次を仮定：

- $\mathrm{B} * S$ **が存在（**$\forall S \in K$**）**
- $(\mathrm{B} * S) \cap (\mathrm{B} * S') = \mathrm{B} * (S \cap S') \quad (\forall S, S' \in K)$

単体複体 K に対し、次を仮定：

- $\mathrm{B} * S$ **が存在（**$\forall S \in K$**）**
- $(\mathrm{B} * S) \cap (\mathrm{B} * S') = \mathrm{B} * (S \cap S') \quad (\forall S, S' \in K)$

このとき、

$$\mathrm{B} * K := \{ \left|\mathrm{B}\right|,\ S,\ \mathrm{B} * S \mid S \in K \}$$

は単体複体である。

次元は $\dim K + 1$ **である。これを** K **の錐 (cone) という。**

定理　$\chi(\mathrm{B} * K) = 1$.

証明　$\mathrm{B} * K$ **において**

０単体の個数＝１＋ $(K$ **の０単体の個数**$)$

１単体の個数＝ $(K$ **の１単体の個数**$)$ **＋** $(K$ **の０単体の個数**$)$

２単体の個数＝ $(K$ **の２単体の個数**$)$ **＋** $(K$ **の１単体の個数**$)$

$$\vdots$$

n単体の個数＝ $(K$ **のn単体の個数**$)$ **＋** $(K$ **の** $(n-1)$ **単体の個数**$)$

$(n+1)$ **単体の個数＝** $(K$ **のn単体の個数**$)$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\chi(\mathrm{B} * K) = 1 &+ (K \text{ の } 0 \text{ 単体の個数}) \\
&- (K \text{ の } 0 \text{ 単体の個数}) - (K \text{ の } 1 \text{ 単体の個数}) \\
&+ (K \text{ の } 1 \text{ 単体の個数}) + (K \text{ の } 2 \text{ 単体の個数}) \\
&- \qquad \cdots \\
&\ \vdots \\
&\pm (K \text{ の } (n-1) \text{ 単体の個数}) \pm (K \text{ の } n \text{ 単体の個数}) \\
&\mp (K \text{ の } n \text{ 単体の個数}) \\
= 1
\end{aligned}
$$

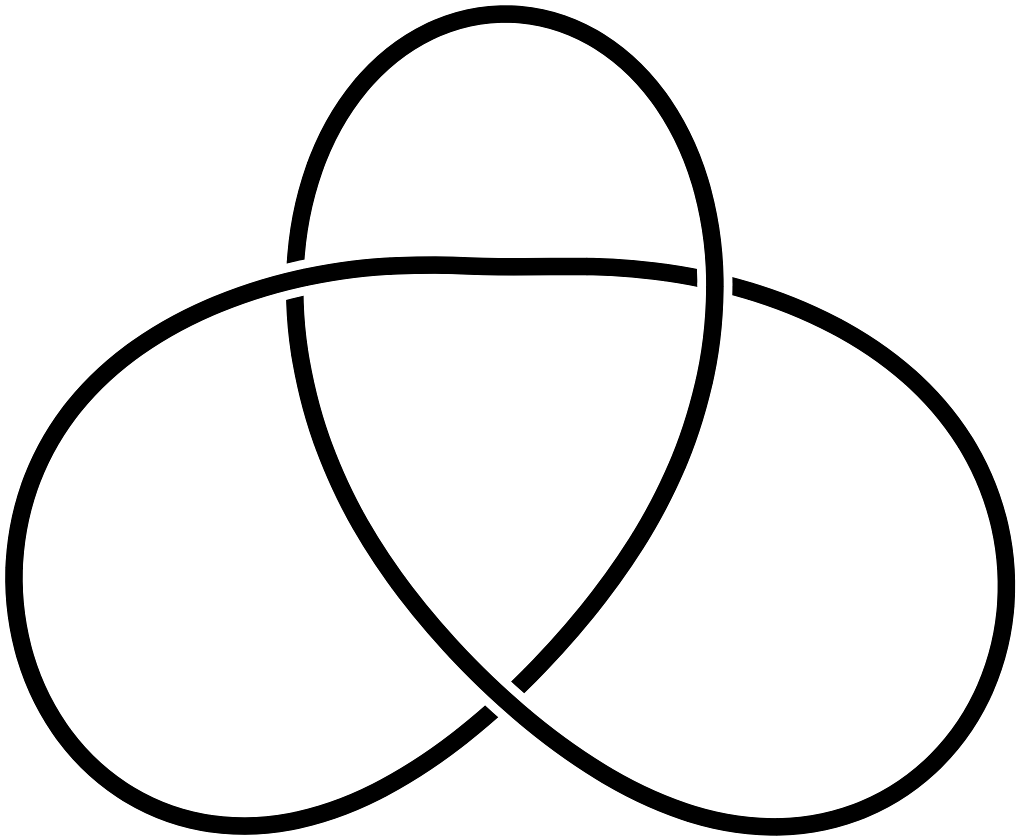
3. 結び目の補空間

結び目とは・・・

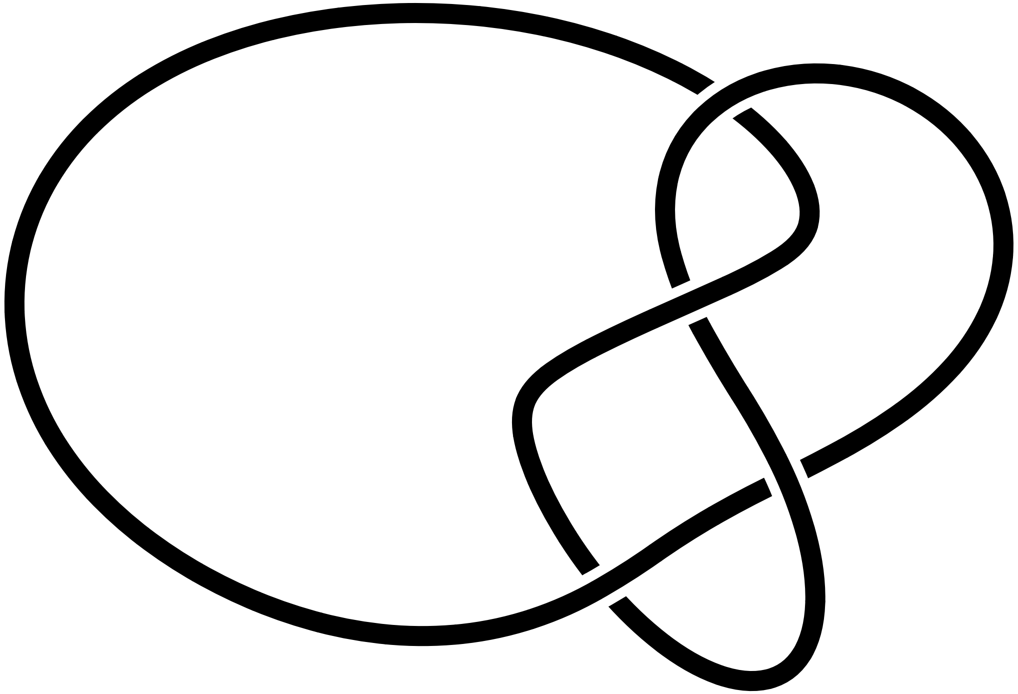
結び目とは・・・

三次元球面 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$

の単一閉曲線 K のこと



三葉結び目



８の字結び目

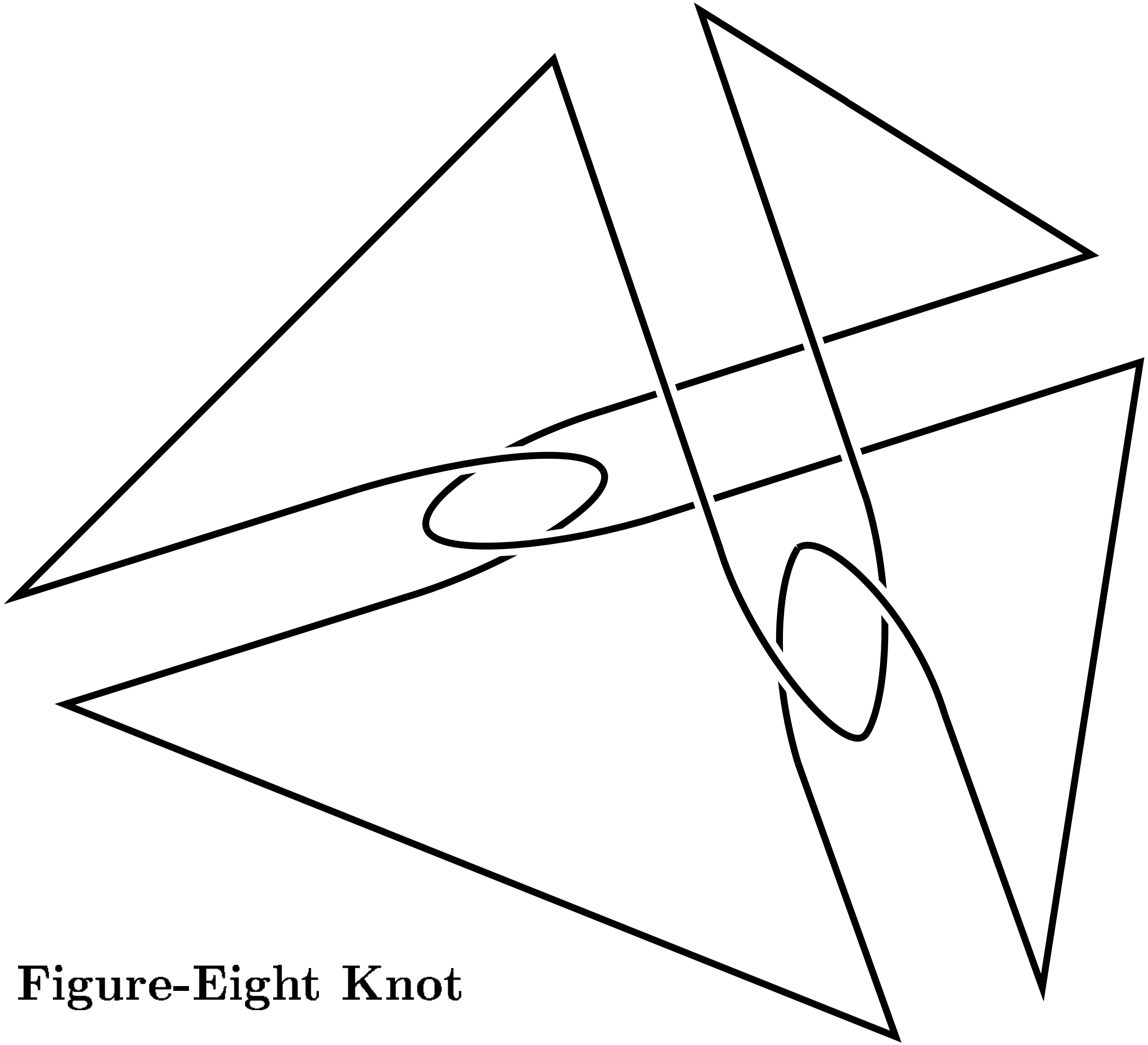


Figure-Eight Knot

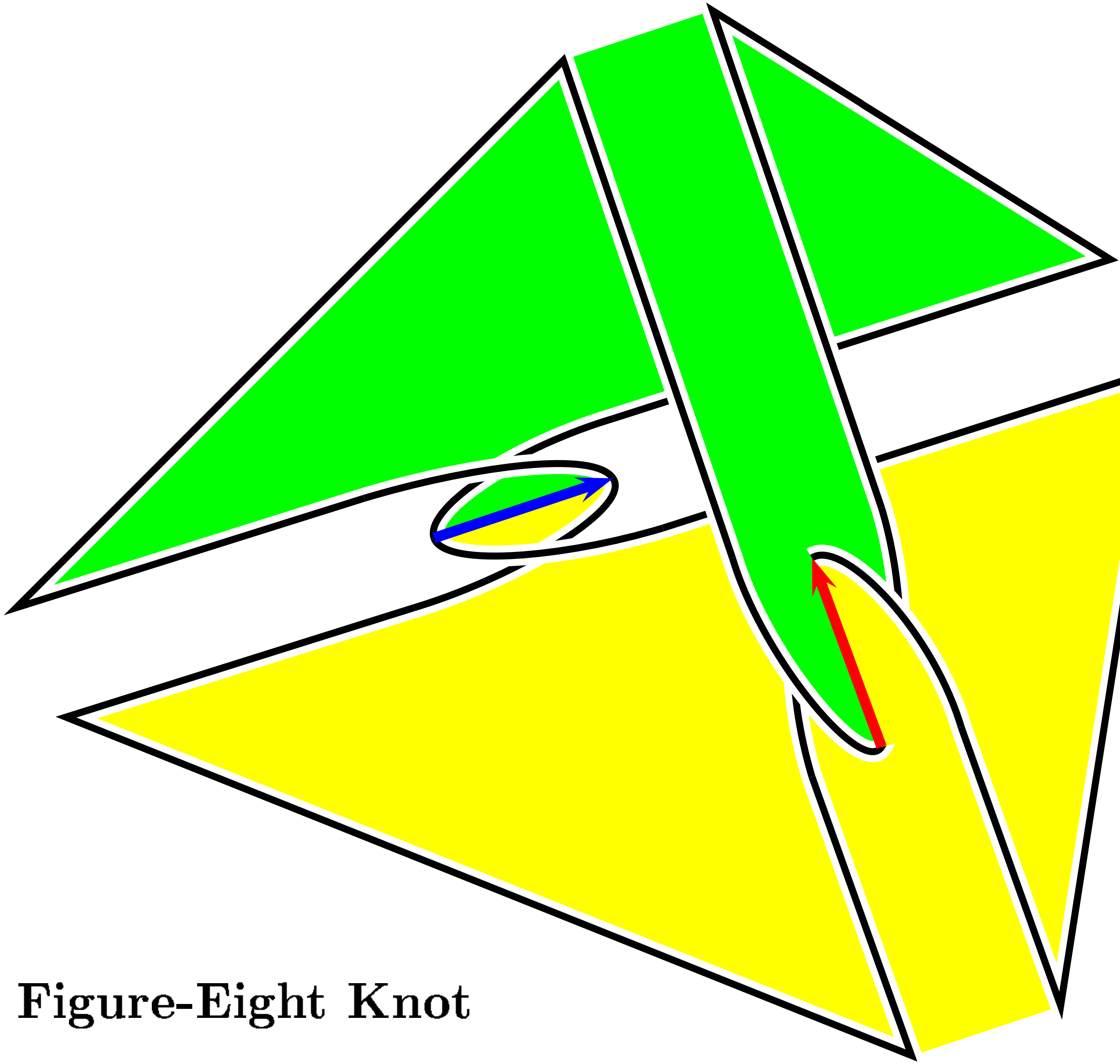


Figure-Eight Knot

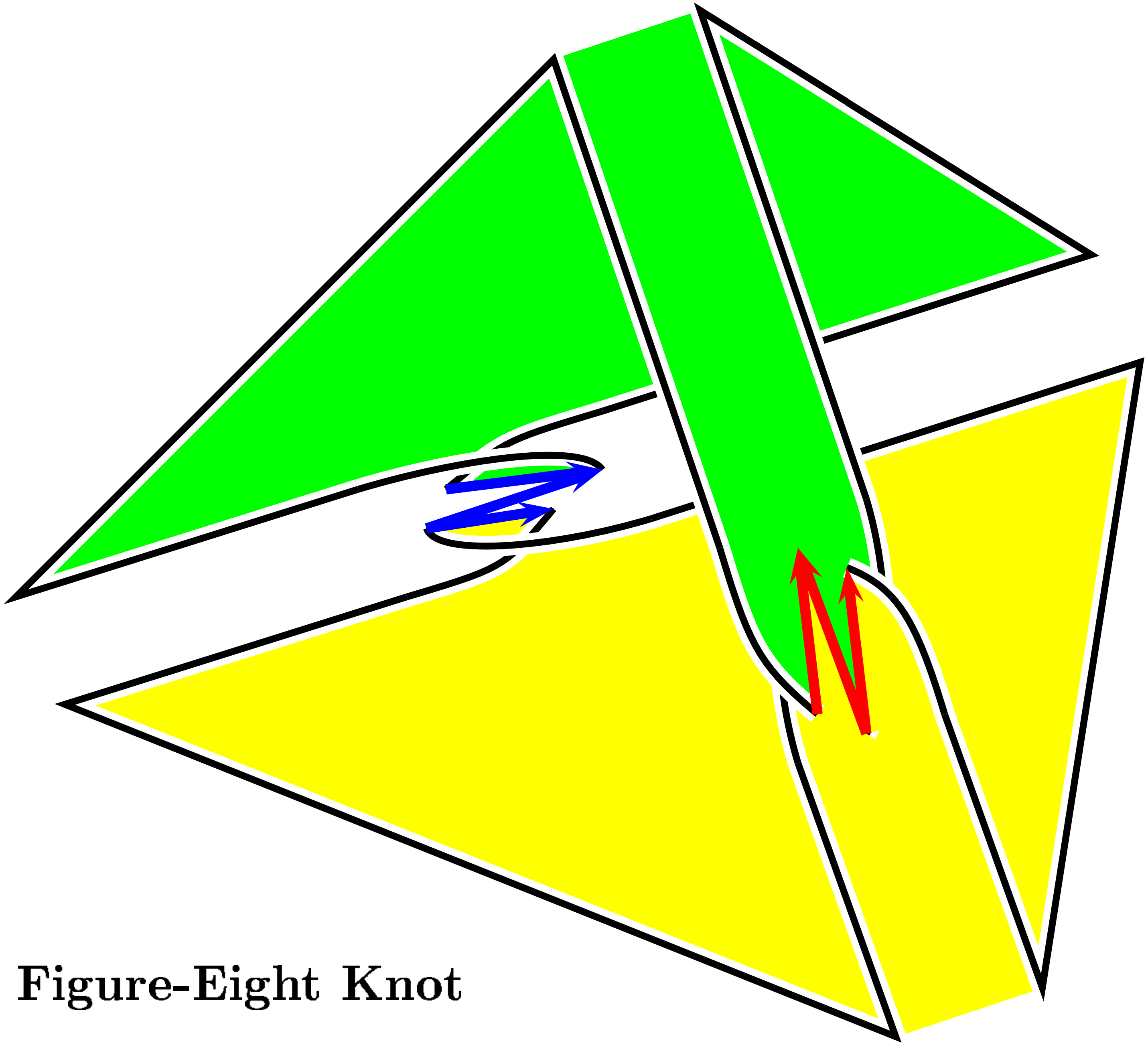


Figure-Eight Knot

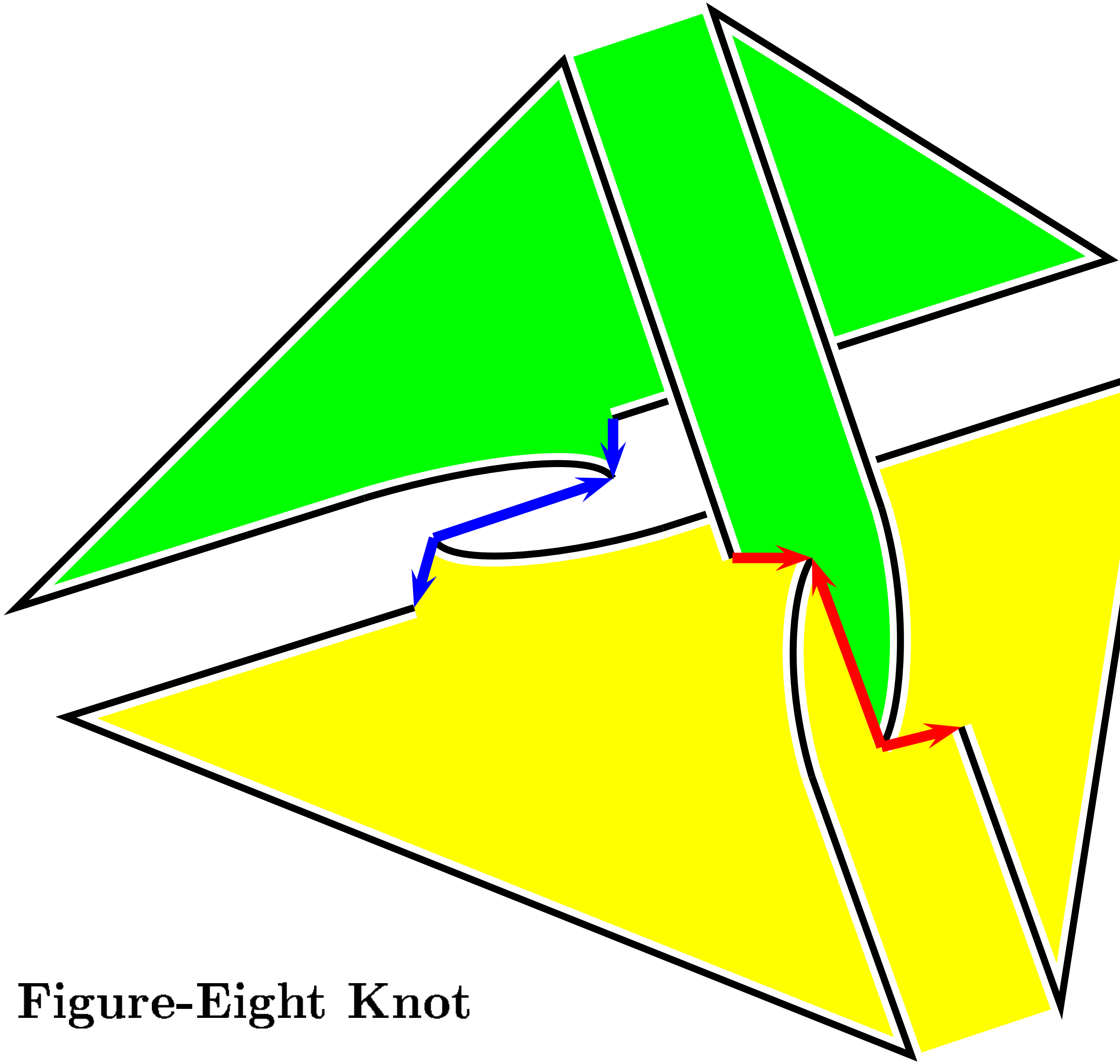
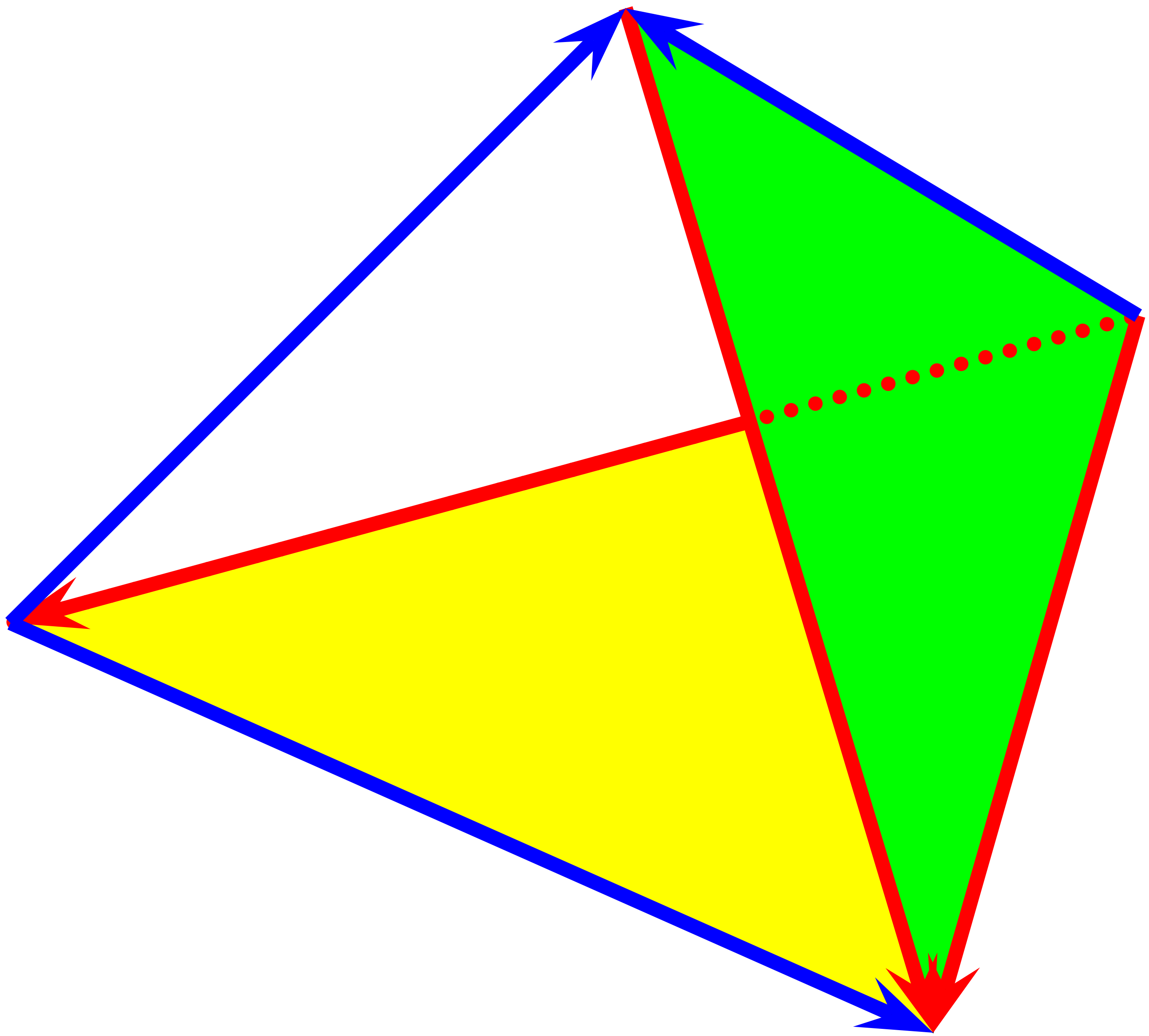


Figure-Eight Knot



外側を観察するには、膜を裏返す必要がある。
このとき青い矢印の向きが変わる。

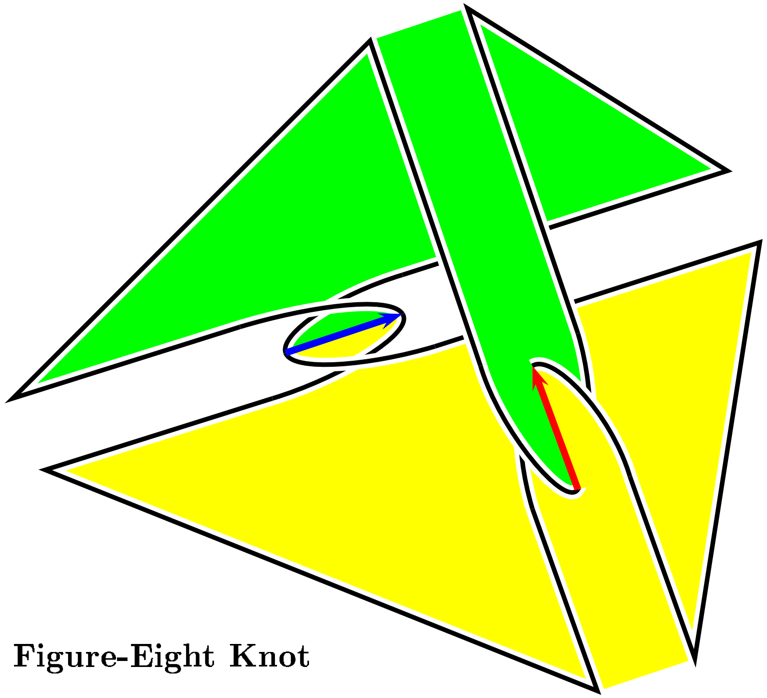


Figure-Eight Knot

$\Longrightarrow$

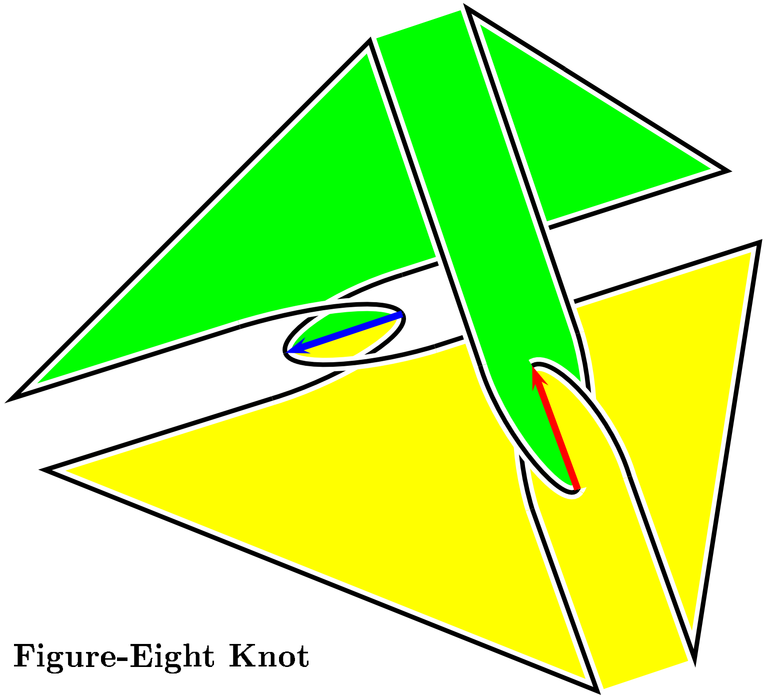
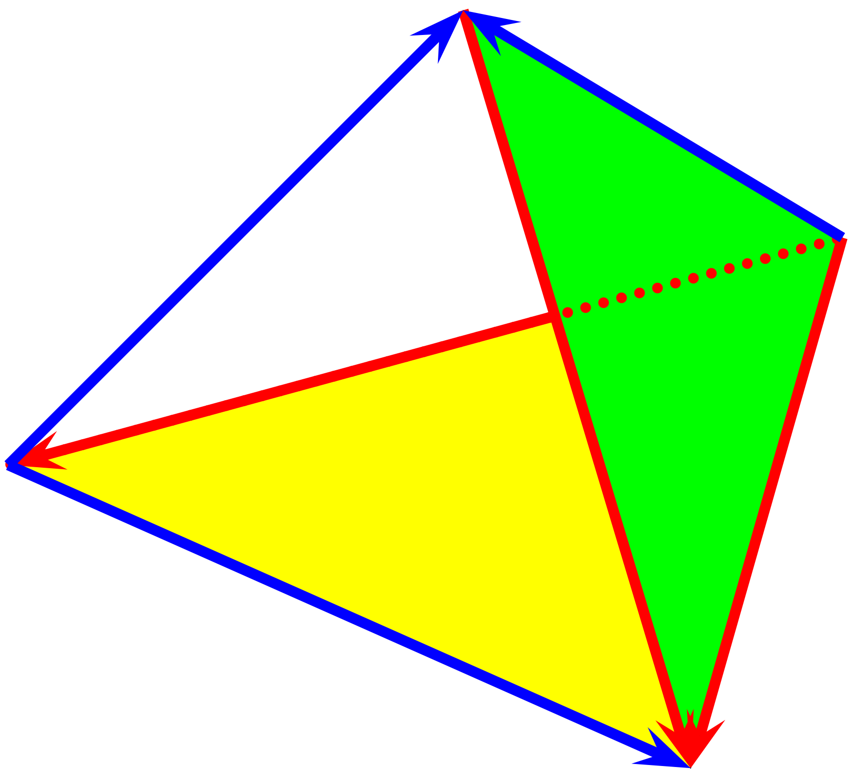
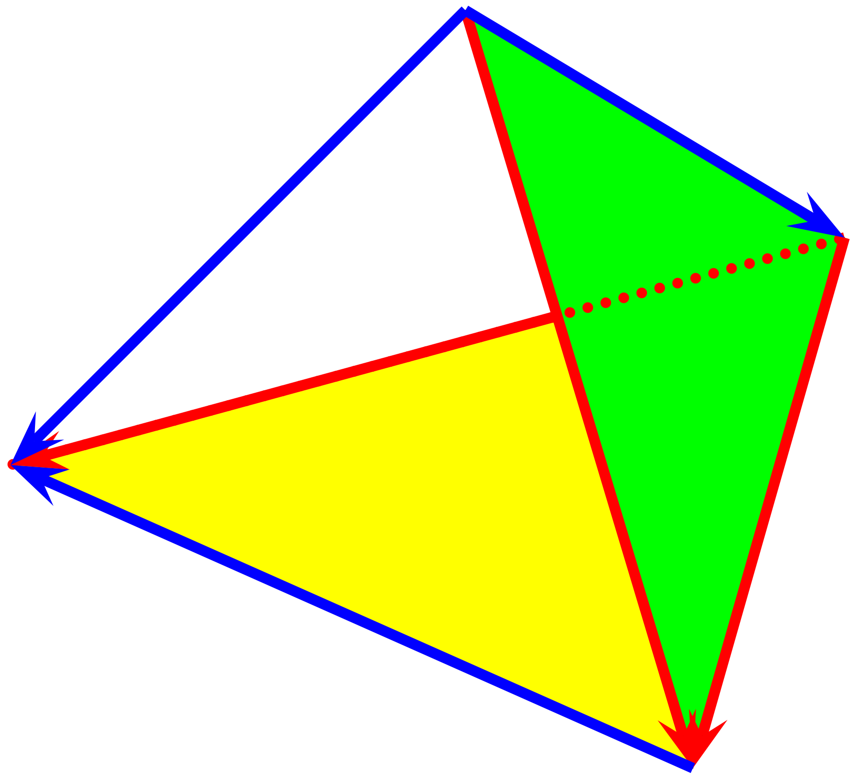


Figure-Eight Knot

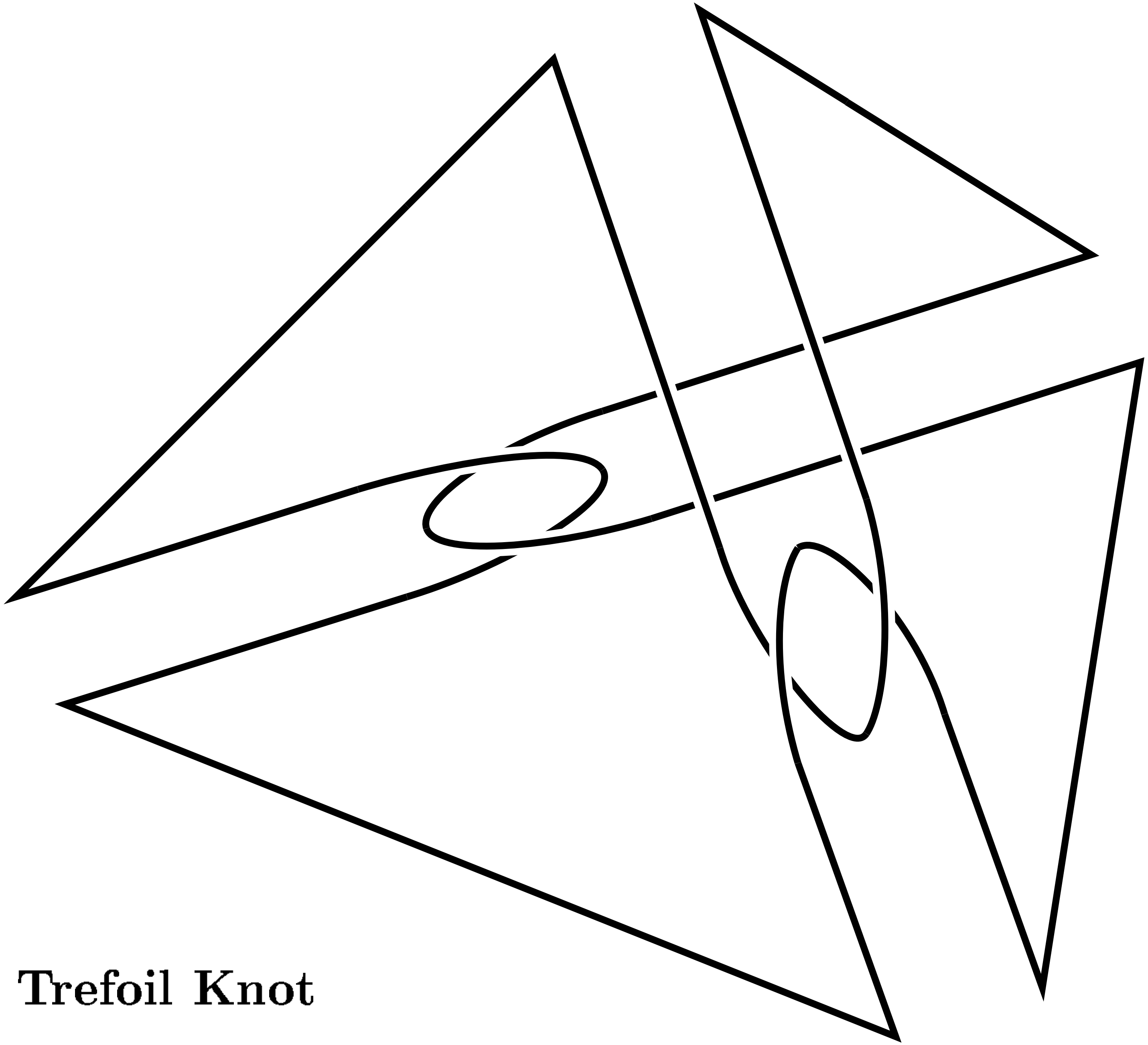
８の字結び目の補空間の分割：



内側



外側



Trefoil Knot

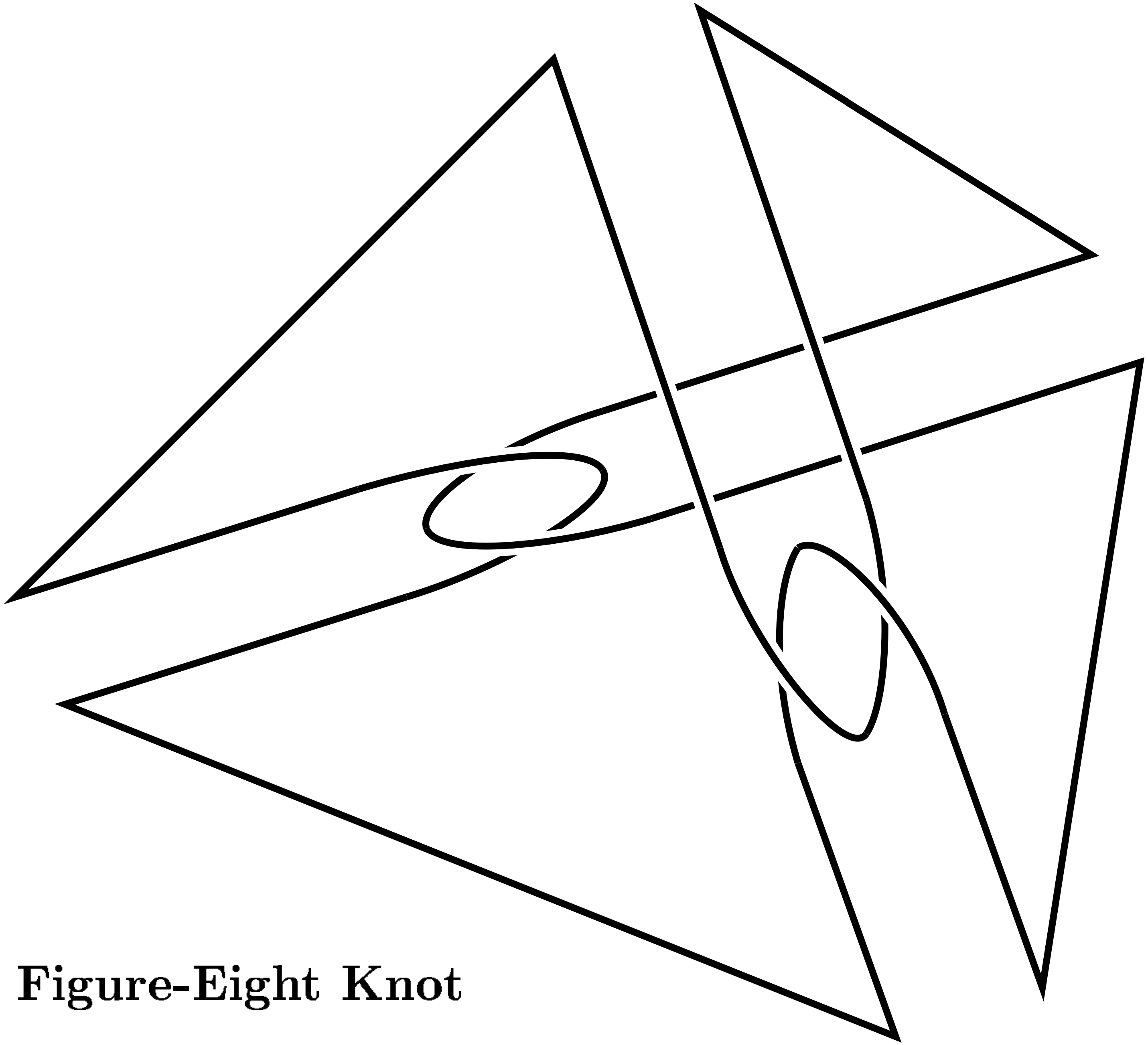
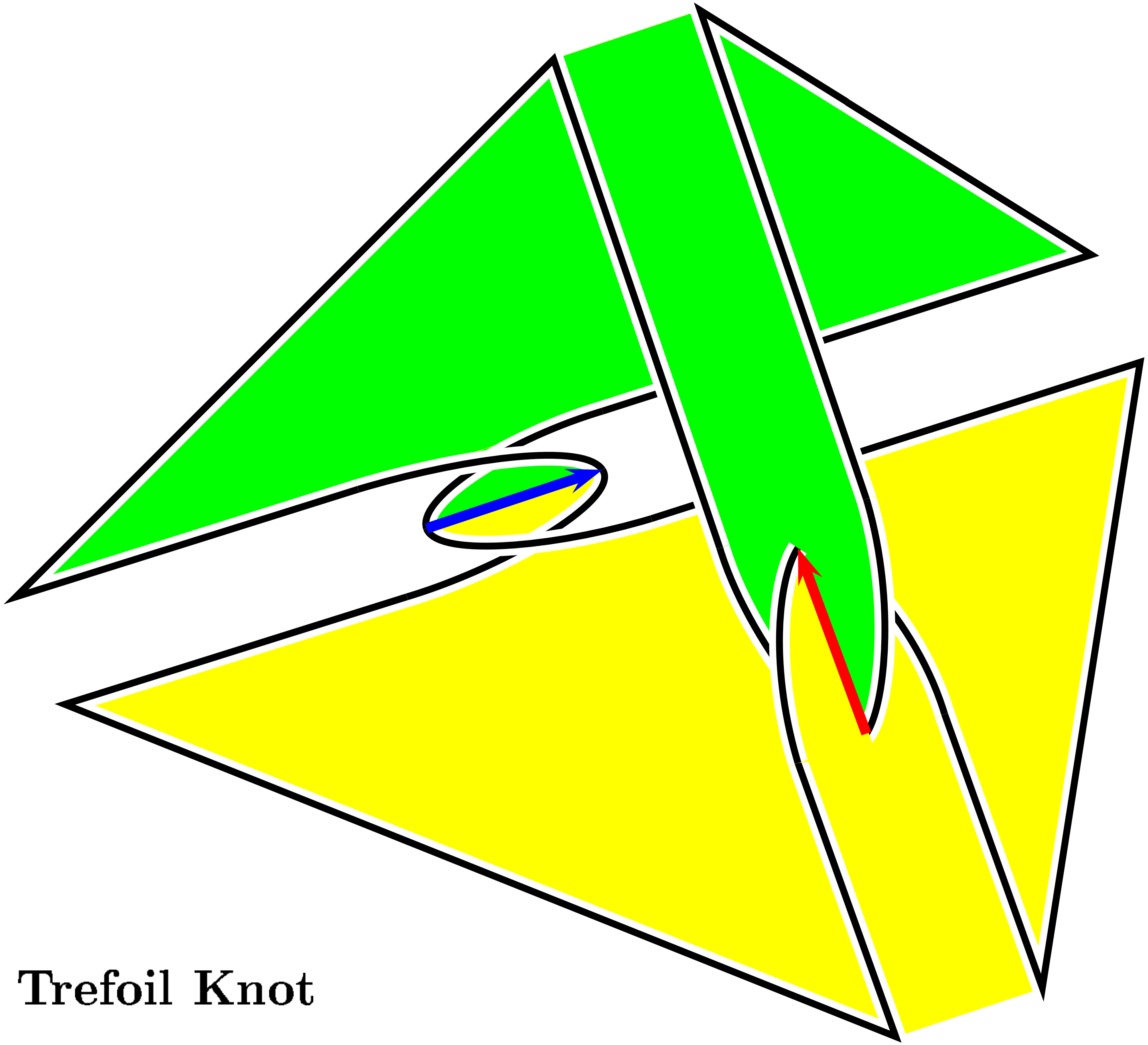
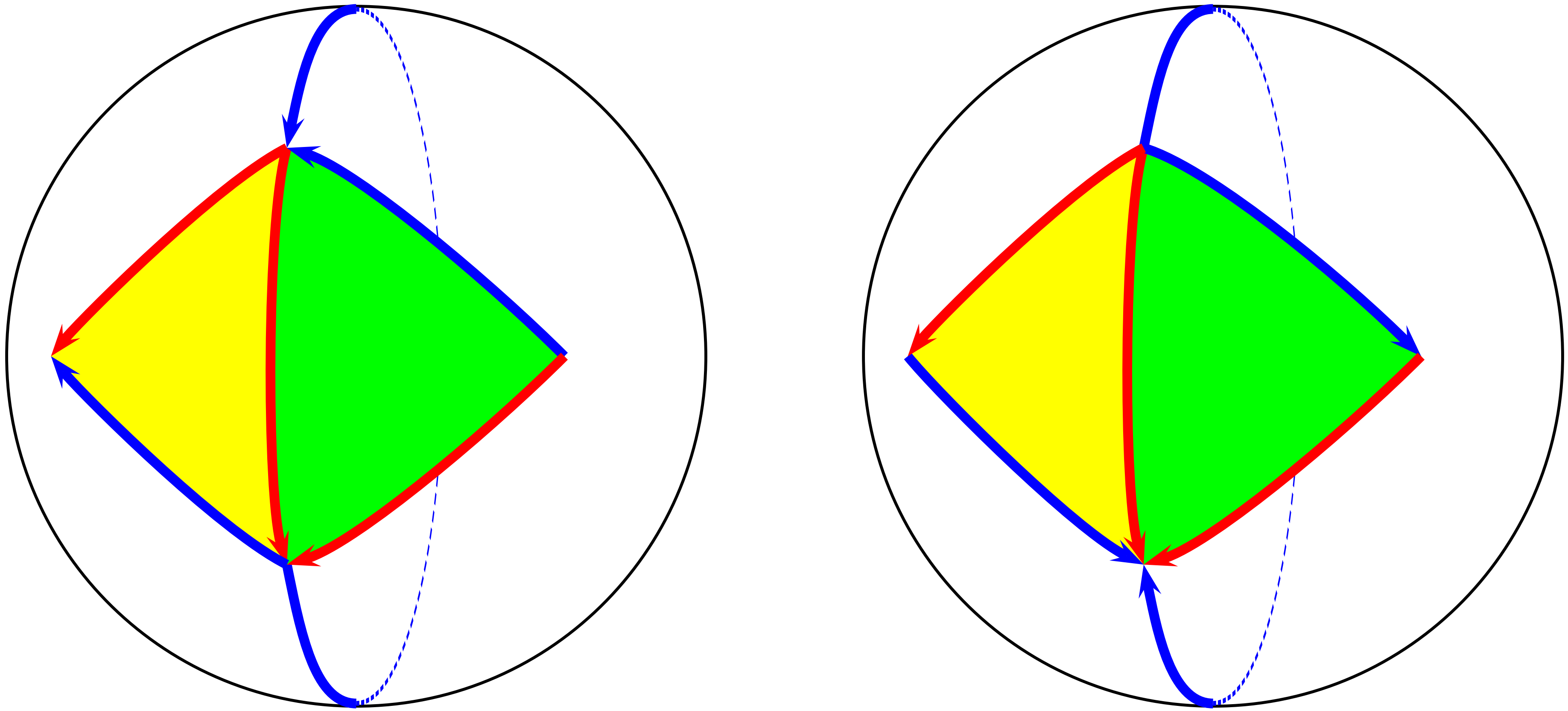


Figure-Eight Knot



Trefoil Knot

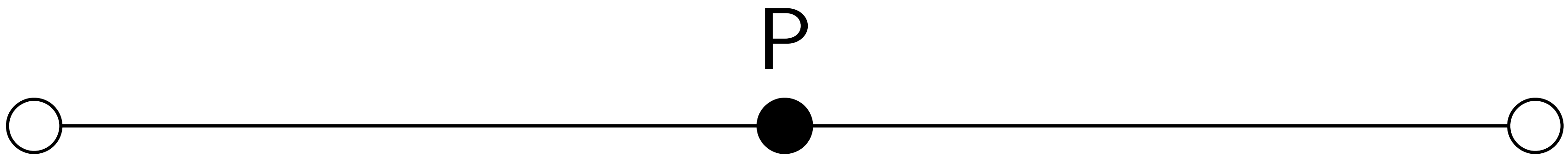
三葉結び目の補空間は次のふたつの理想３胞体に分割できることがわかった：



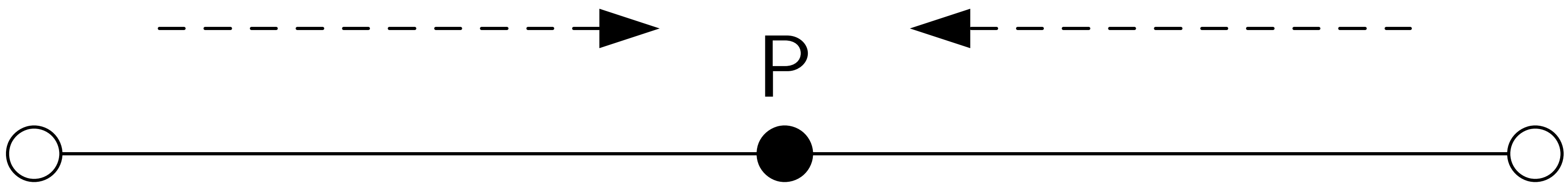
８の字結び目の補空間の理想
３単体への分割から

“よい双対脊柱”を構成する

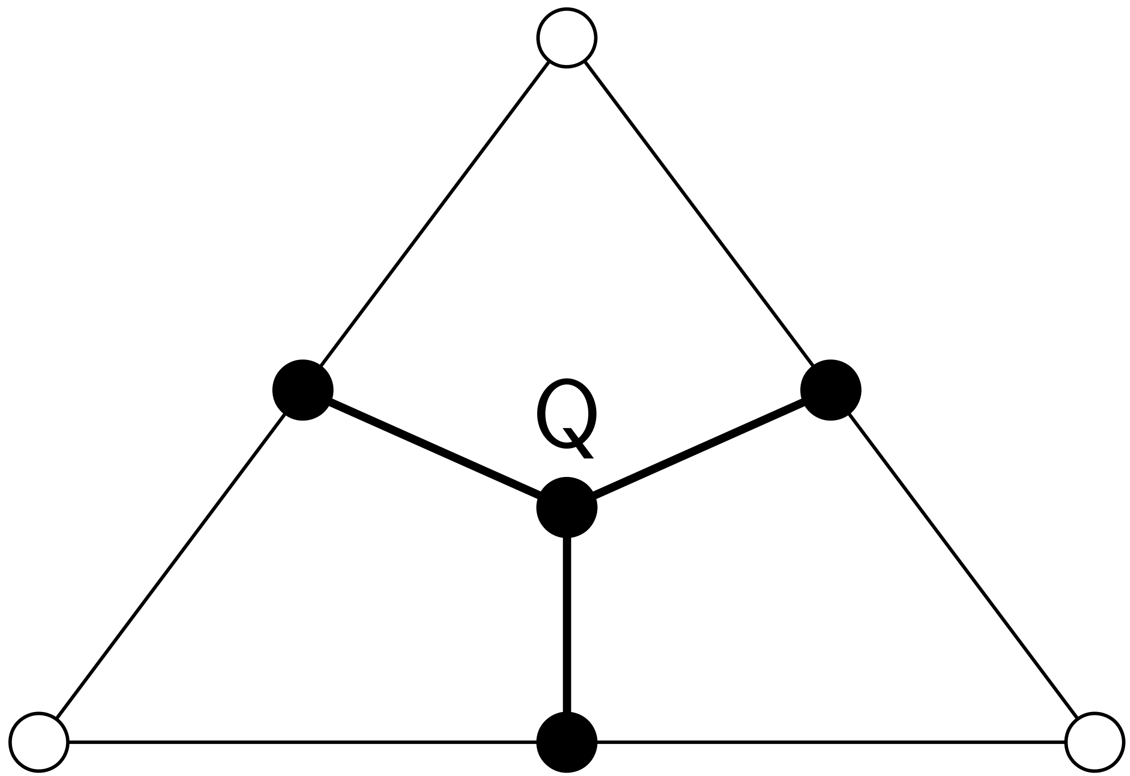
理想１単体の双対脊柱



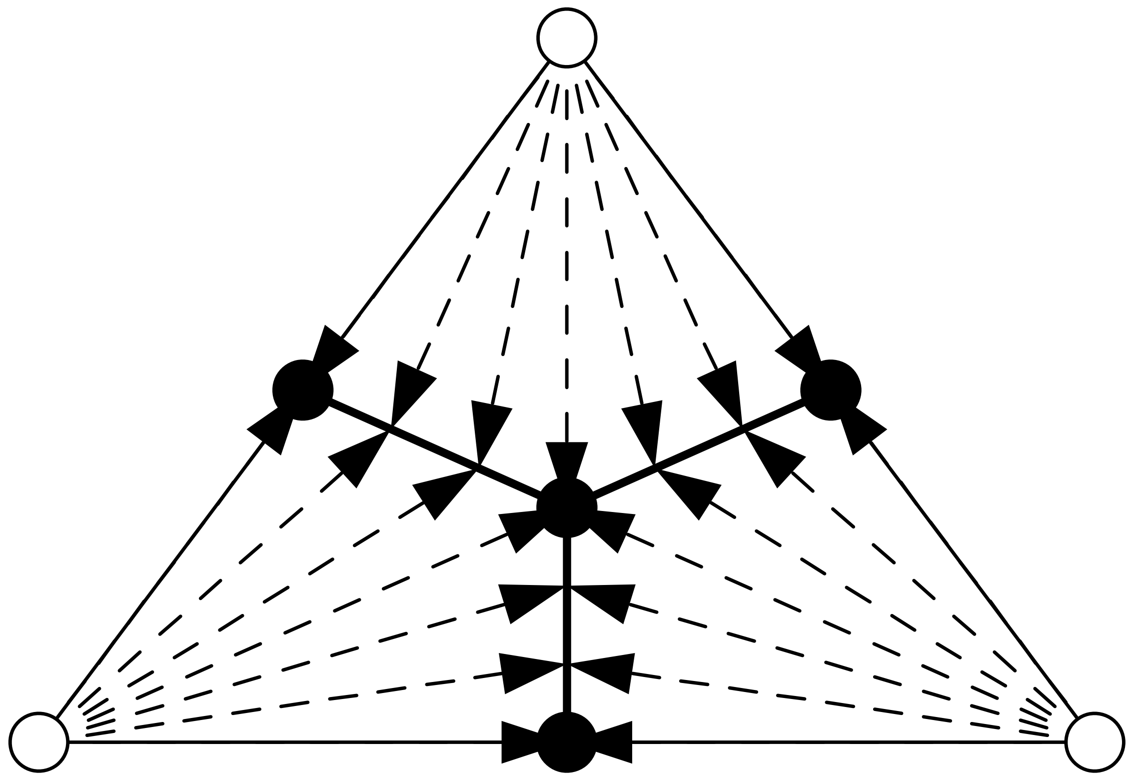
理想１単体の双対脊柱



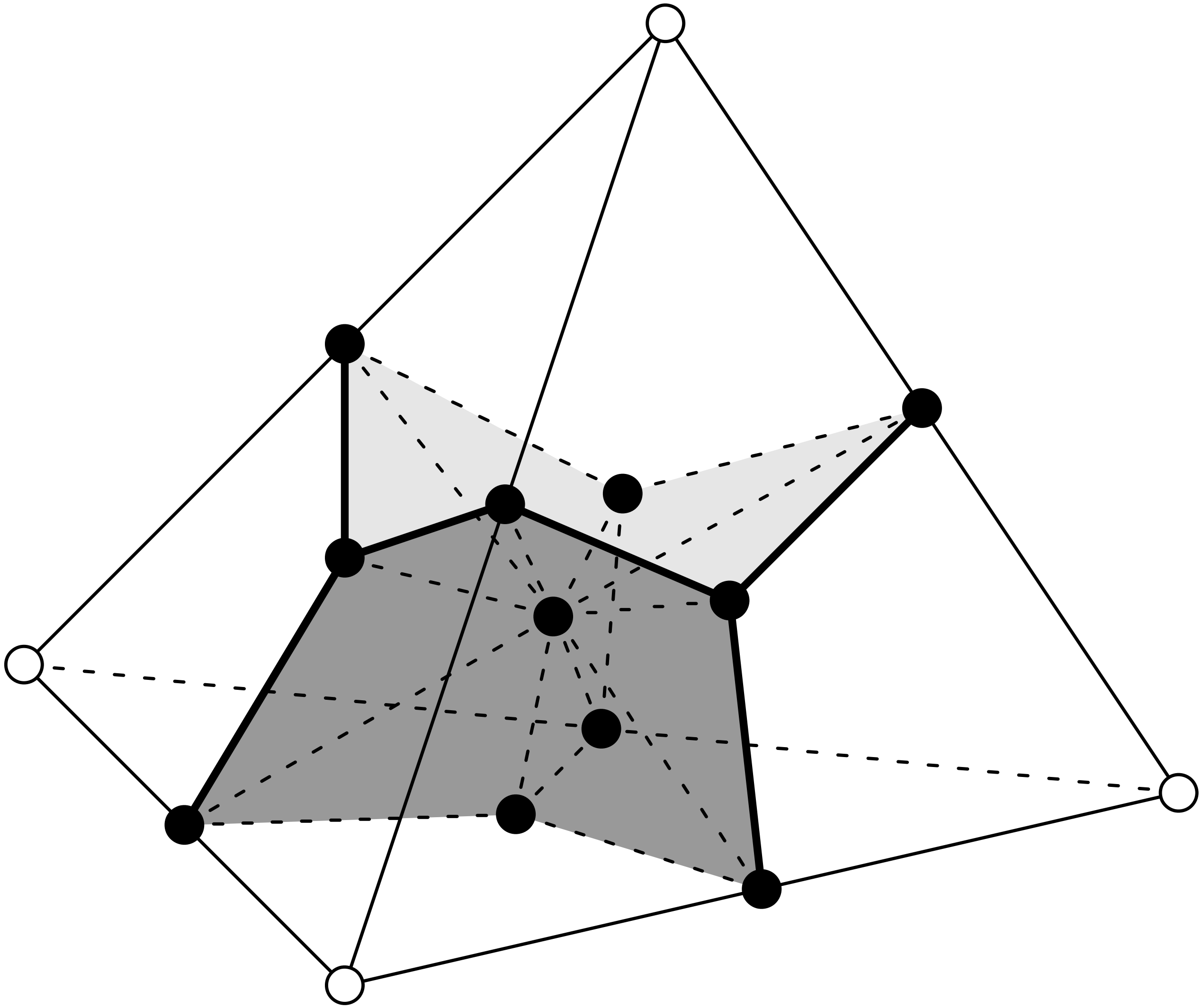
理想２単体の双対脊柱



理想２単体の双対脊柱

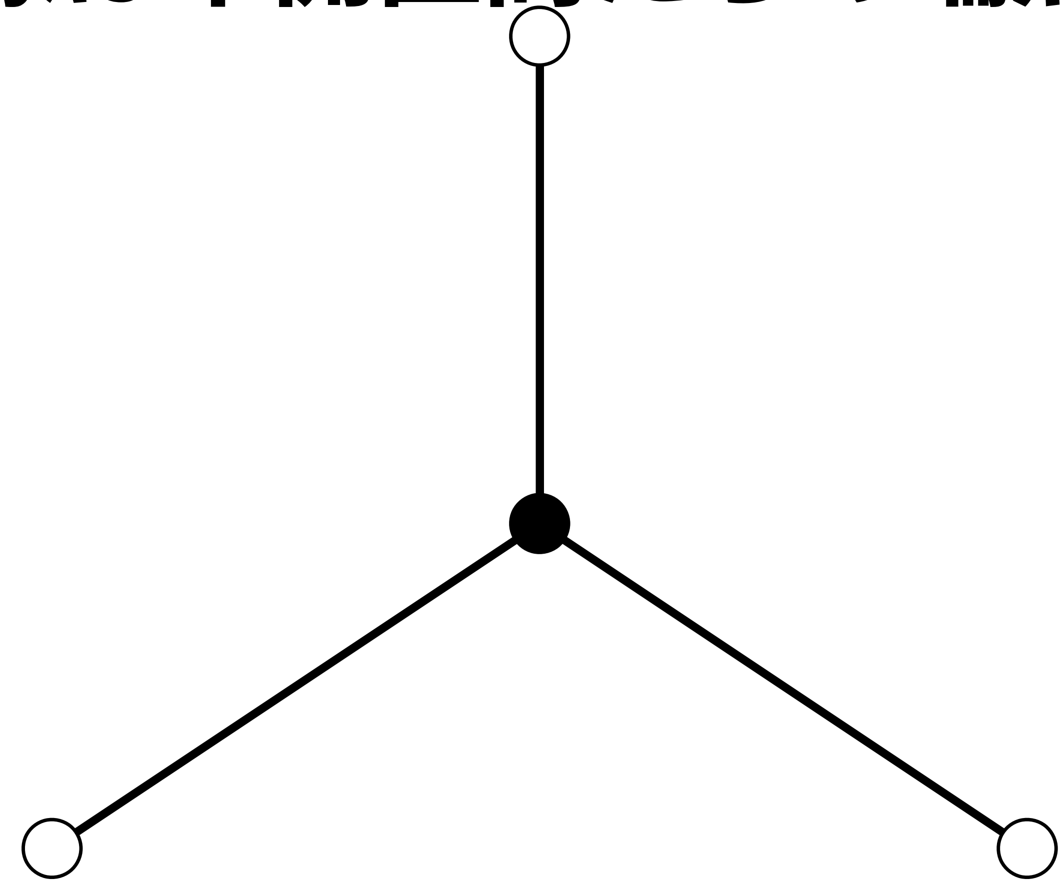


理想３単体の双対脊柱



三葉結び目の理想３胞体への分割の場合もほとんど同様

$\mathrm{S}^3 - K$ を双対脊柱 X へつぶす写像による各点の逆像は半開区間たちの端点での和：



“ よい ” 脊柱と呼ぶ。

一般の結び目 K に対し、$\mathbf{S}^3$ における K の管状近傍を $N(K)$ とし、四次元の図形 $M(K)$ を次のように定める：

$$M(K) = \partial((\mathbf{S}^3 - \mathrm{int} N(K)) \times \mathbf{D}^2)$$

一般の結び目 K に対し、$\mathbf{S}^3$ における K の管状近傍を $N(K)$ とし、四次元の図形 $M(K)$ を次のように定める：

$$M(K) = \partial((\mathbf{S}^3 - \mathrm{int} N(K)) \times \mathbf{D}^2)$$

$\mathbf{S}^3 - K$ のよい脊柱の存在

$\Longrightarrow M(K)$ の手術障害類理論の成立