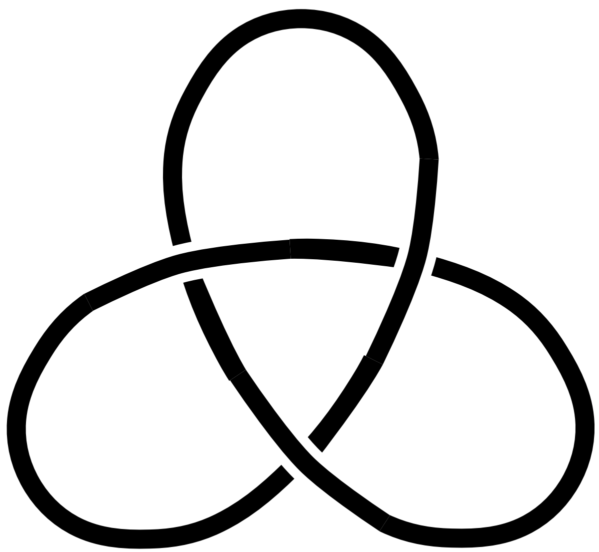
結び目と帯

幾何学ゼミ

1. 絡み目と絡み数

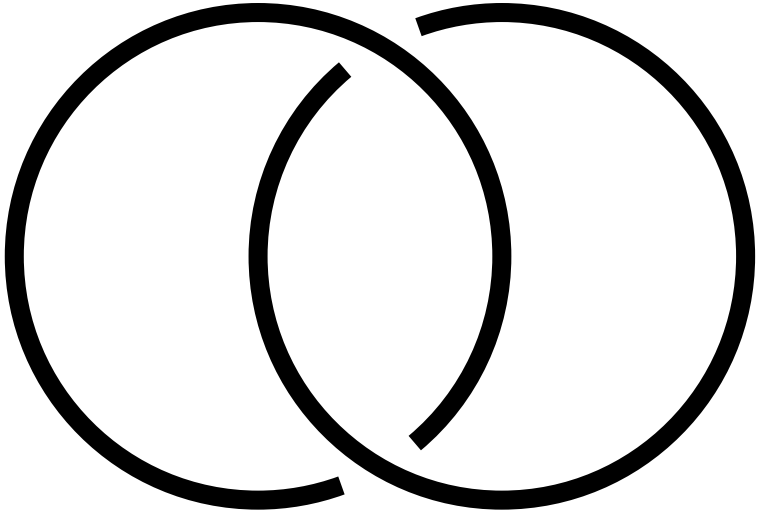
空間 $\mathbb{R}^3$ 内の多辺形を**結び目**という。

空間 $\mathbb{R}^3$ 内の多辺形を**結び目**という。



絡み目:

$$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\mu$$



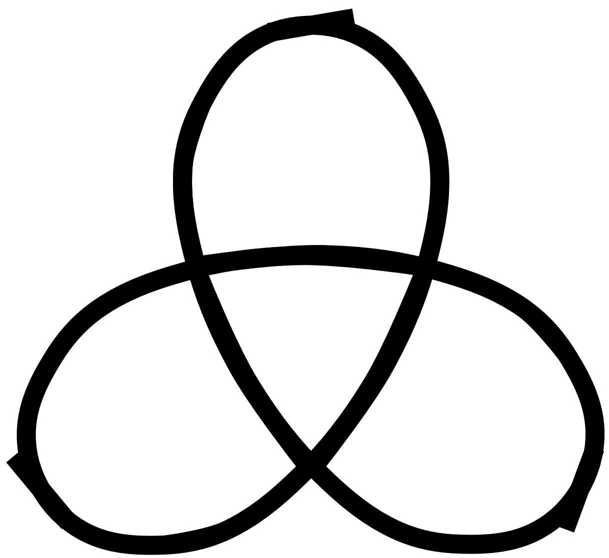
K_i : L の**成分**

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

p で $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ を射影

$\Rightarrow p(L) = \mathbb{R}^2$ 上の μ 個の閉折線

点 $q \in p(L)$ について、$p^{-1}(q) \cap L$ の点の個数を、点 q の**次数**という。



次の 2 つの条件をを満たす絡み目 L は、$(p$ に関して$)$ **正則の位置にある**という：

次の 2 つの条件をを満たす絡み目 L は、(p に関して) **正則の位置にある**という：

(1)　$p(L)$ の多重点は、高々有限個の 2 重点のみである。

次の 2 つの条件をを満たす絡み目 L は、(p に関して) **正則の位置にある**という：

(1) $p(L)$ の多重点は、高々有限個の 2 重点のみである。

(2) 多辺形 L の頂点の像は、$p(L)$ の 2 重点にはならない。

$L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ を正則の位置にある絡み目とする。

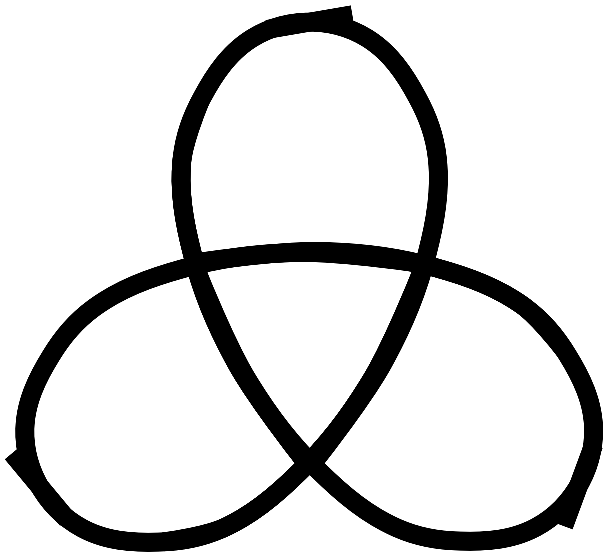
$L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ を正則の位置にある絡み目とする。

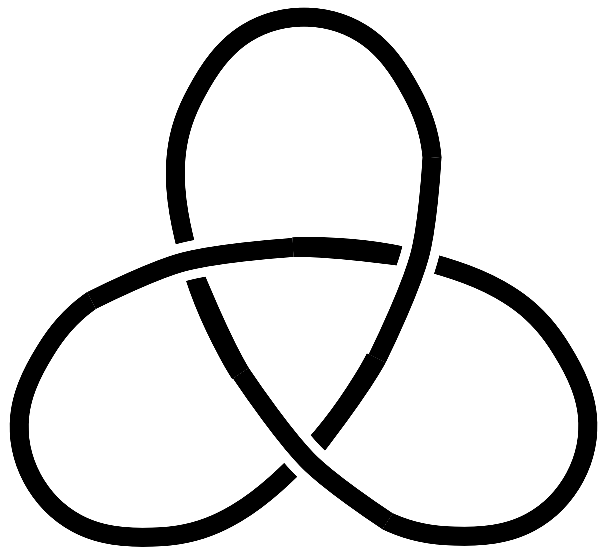
(1)p による L の像 $p(L) = \hat{L}$ を、L の正則射影像という。

射影像 $\hat{L}$ は、平面上の μ 個の閉折線で、高々有限個の 2 重点を持ち、その頂点は 2 重点ではないような図形である。

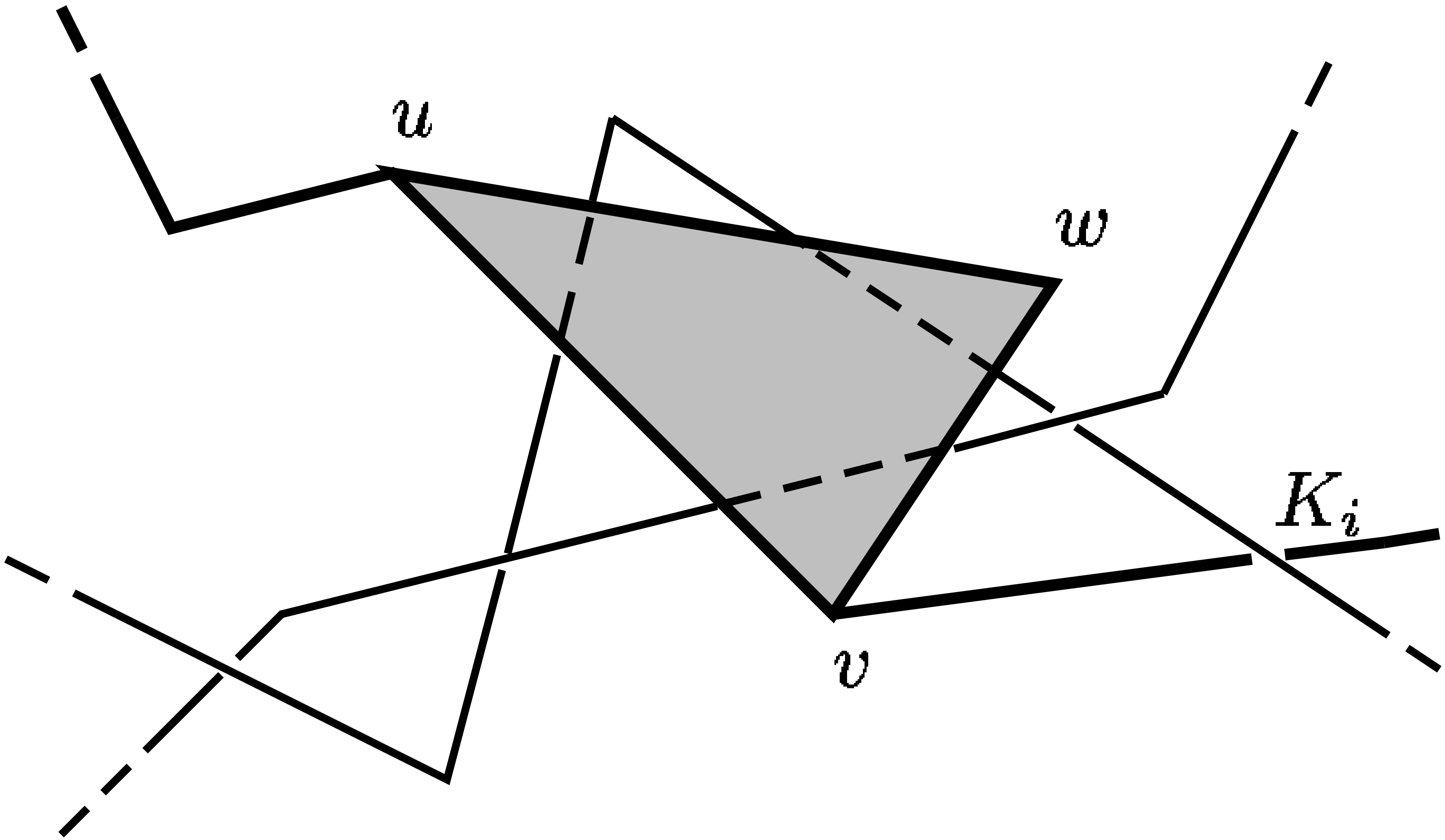
$L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ を正則の位置にある絡み目とする。

(2) **正則表示**:

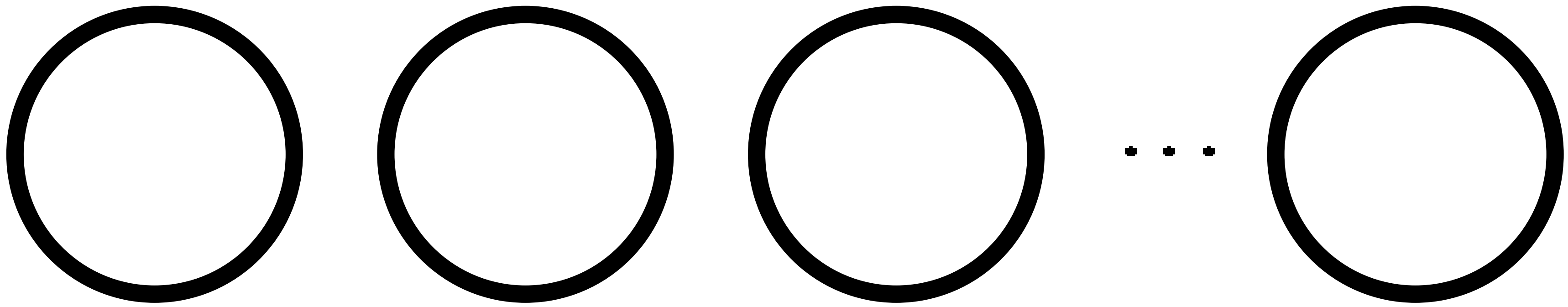




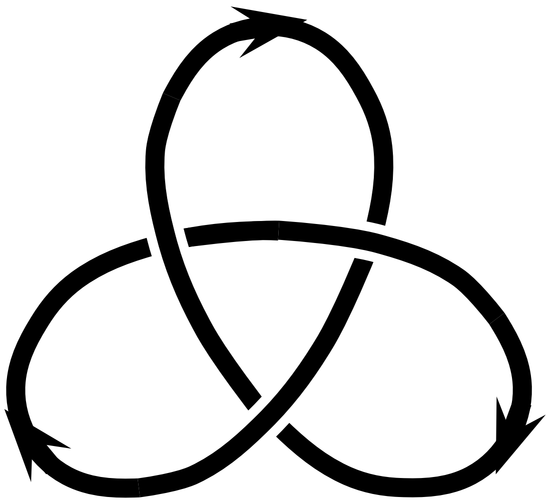
△ 移動の繰り返し $\Rightarrow L \cong L'$ (同型)

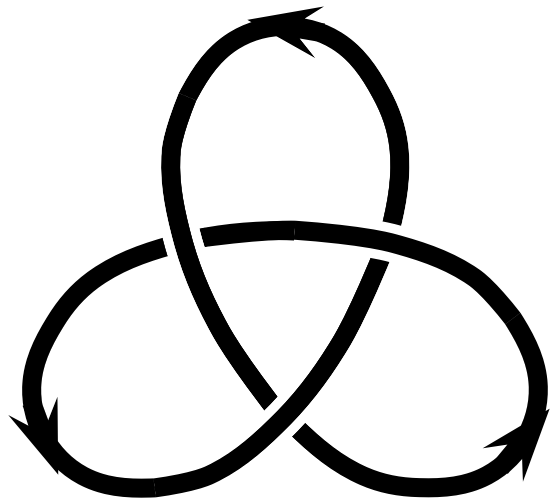


平凡な絡み目 O



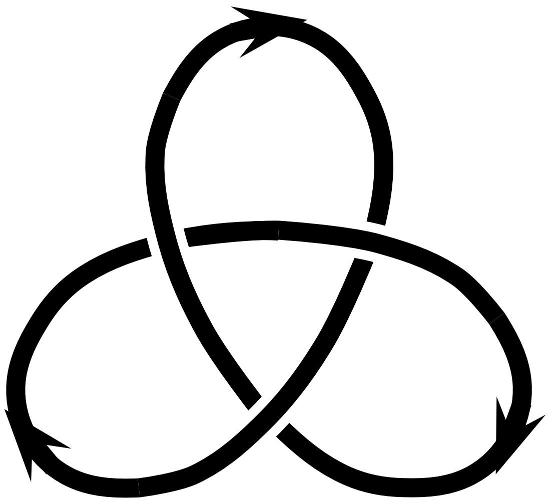
結び目、絡み目の向き:

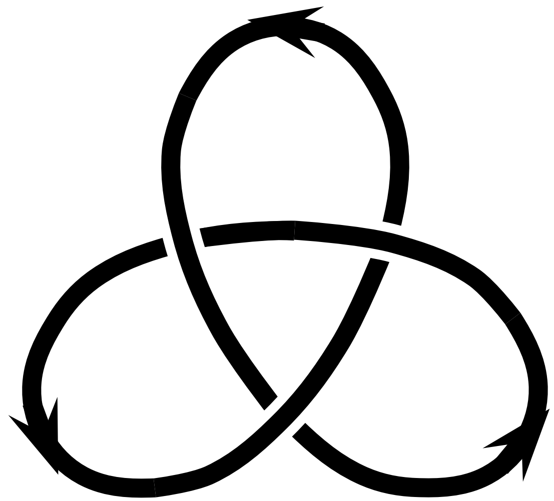




向きを指定したものを有向結び目、有向絡み目という。

結び目、絡み目の**向き**:

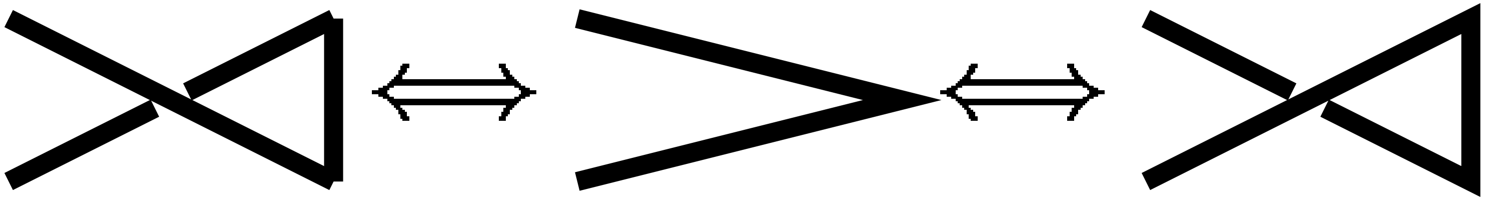




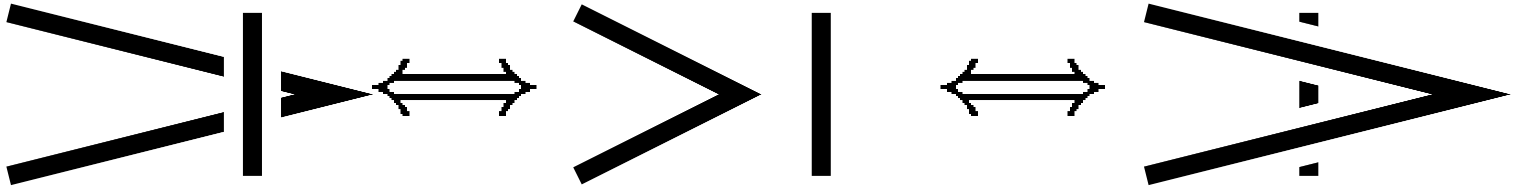
向きを指定したものを**有向結び目**、**有向絡み目**という。

向きもこめて同型のとき、**有向同型**という:$L \approx L'$

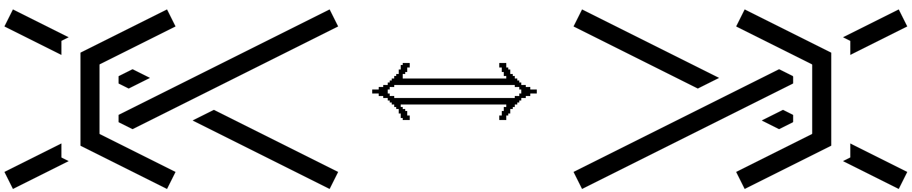
同型 $\Rightarrow$ ライデマイスター移動による変形



ライデマイスター移動 I



ライデマイスター移動 II



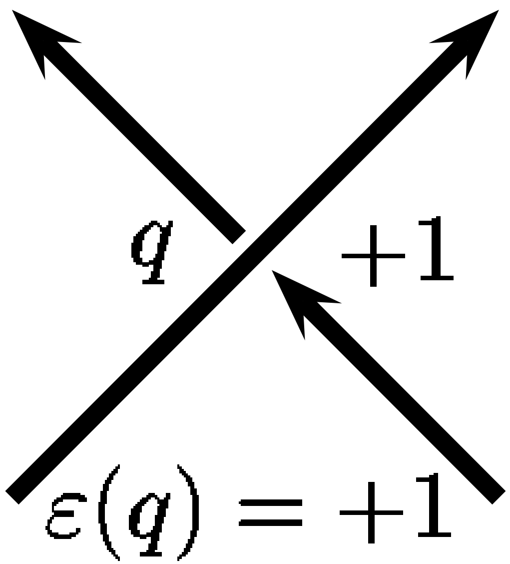
ライデマイスター移動 III

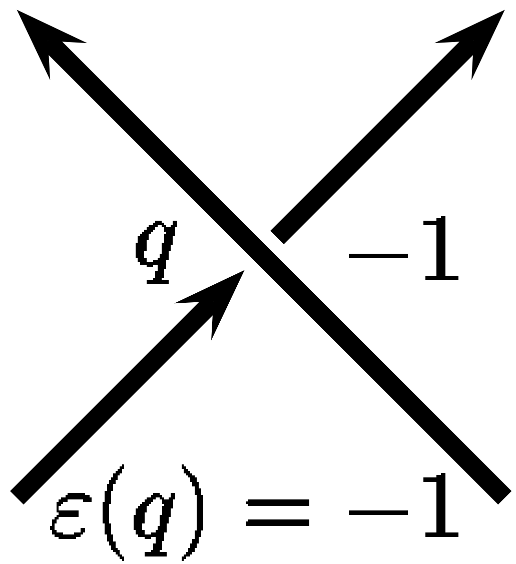
有向絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ の絡み数: $lk(K_1, K_2)$

$\tilde{L} = \tilde{K_1} \cup \tilde{K_2}$:正則射影

$\tilde{K_1}$ と $\tilde{K_2}$ の各交差点 q

$\Rightarrow \varepsilon(q) = \pm 1$ を定める。





$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_q \varepsilon(q)\right) = lk(K_2, K_1)$$

を、K_1 と K_2 の絡み数という。

$L = K_1 \cup K_2,\ L' = K_1' \cup K_2'$ を 2 成分の有向絡み目とする。

$$L \approx L' \Longrightarrow lk(K_1, K_2) = lk(K_1', K_2').$$

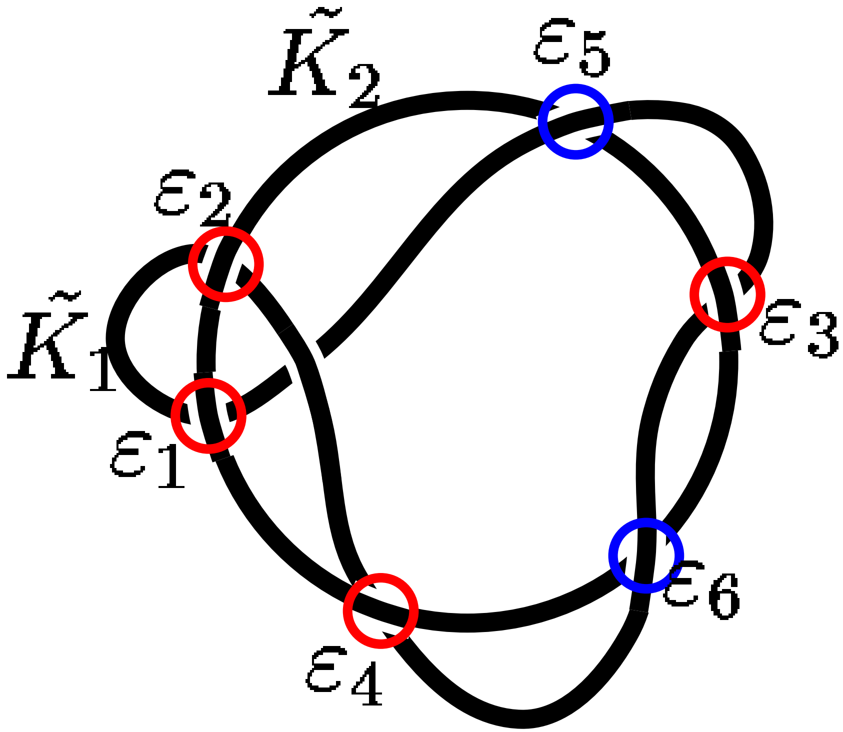
$L = K_1 \cup K_2$:有向絡み目

$\tilde{L} = \tilde{K_1} \cup \tilde{K_2}$:正則射影

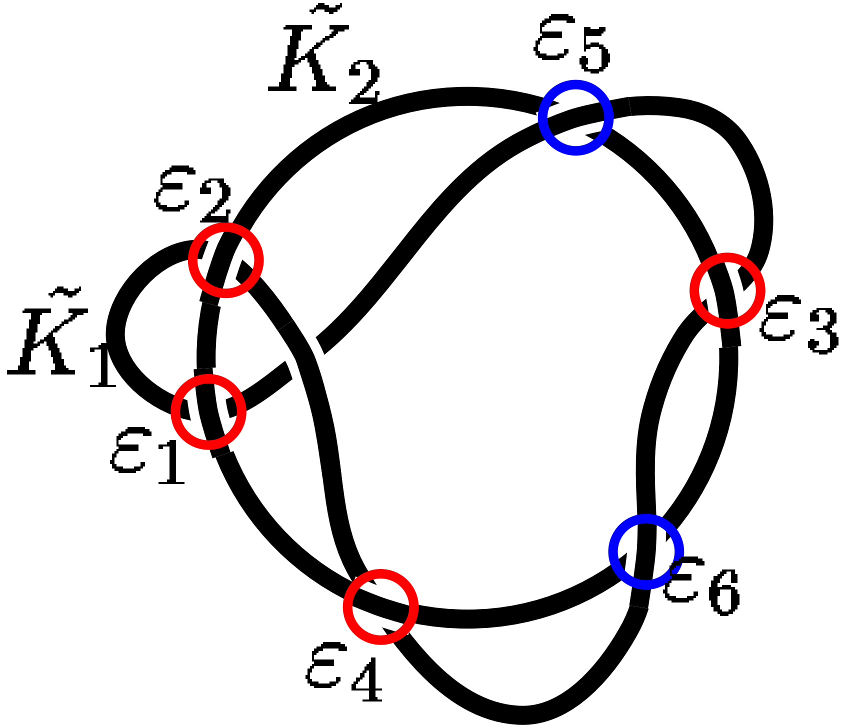
$S = \{\tilde{K_1}$ のほうが $\tilde{K_2}$ の下になる交差点 $\} = \{q_1, \cdots, q_u\}$ とする。各 q_i での交差の符号を ε_i とおく。

このとき、次式が成り立つ：

$$lk(K_1, K_2) = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_u$$

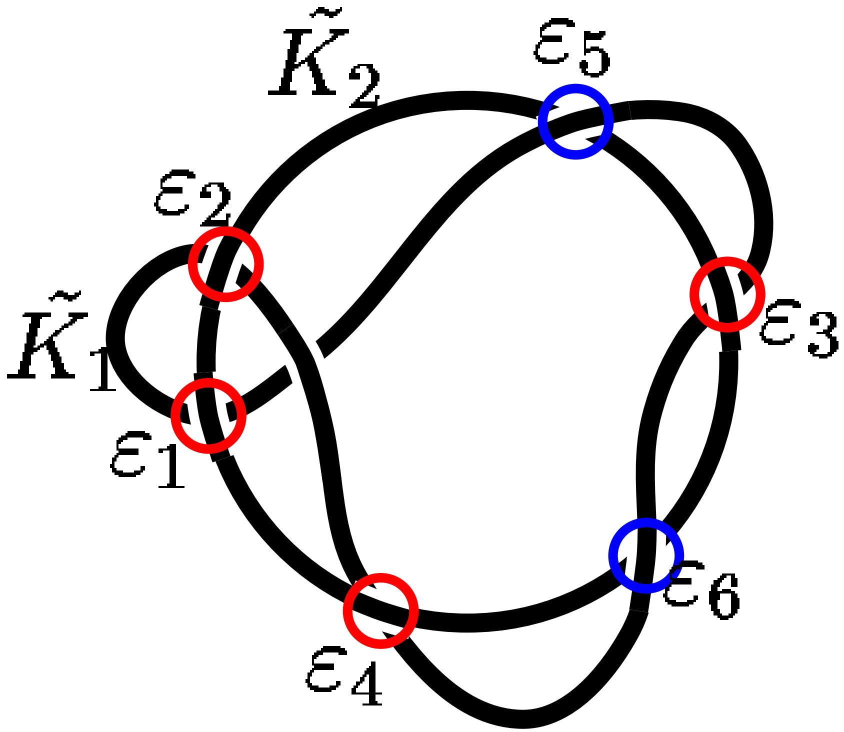


$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$$



$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6$$



K_1': ○ **を交差交換** $\rightarrow lk(K_1', K_2) = 0$

$$\frac{1}{2}(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6) = 0$$

2　ザイフェルト曲面

定義. F：空間 $\mathbb{R}^3$ 内のコンパクトで向き付け可能な境界付曲面、L：絡み目とする。

F が L の**ザイフェルト曲面**であるとは、

定義. F：空間 $\mathbb{R}^3$ 内のコンパクトで向き付け可能な境界付曲面、L：絡み目とする。

F が L の**ザイフェルト曲面**であるとは、

$$\partial F = L$$

となるときをいう。

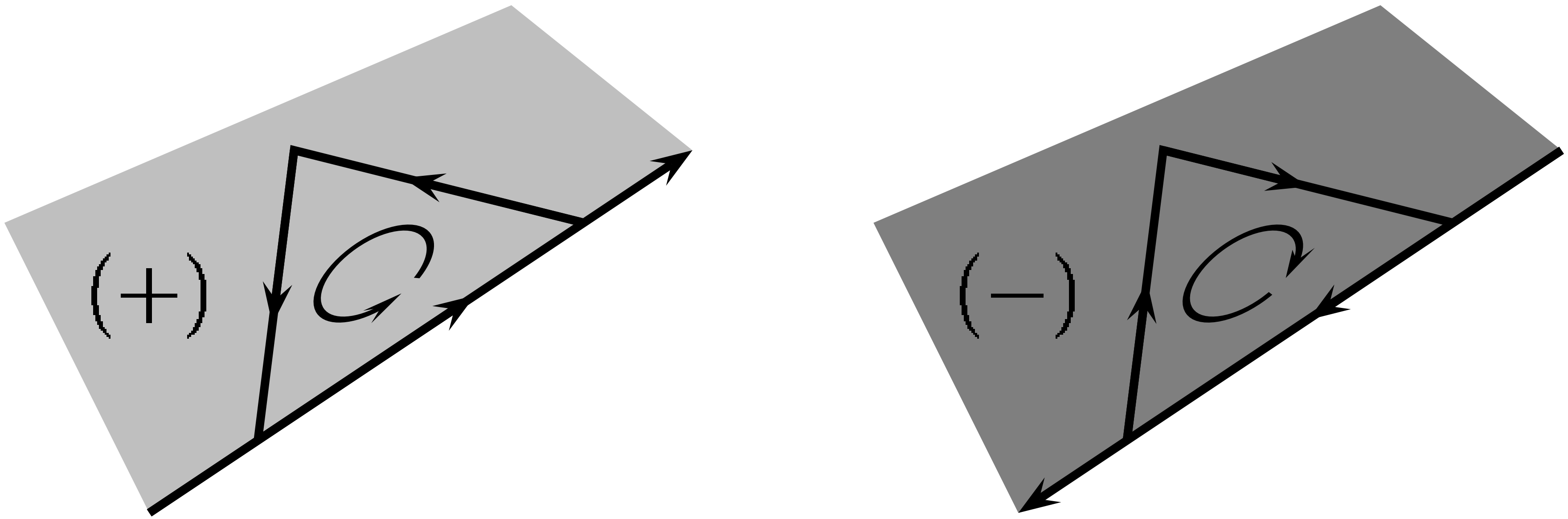
定義. F：空間 $\mathbb{R}^3$ 内の、コンパクトで向き付けられた境界付曲面、L：有向絡み目とする。
F が L の**有向ザイフェルト曲面**であるとは、

定義. F：空間 $\mathbb{R}^3$ 内の、コンパクトで向き付けられた境界付曲面、L：有向絡み目とする。
F が L の**有向ザイフェルト曲面**であるとは、

$$\partial F = L$$

つまり、F の向きから誘導される ∂F の向きが L の向きと一致するときをいう。

L に向きがついている場合、曲面の向き (表 $=+$ 側、裏 $=-$ 側) の指定は、下図のように定める。



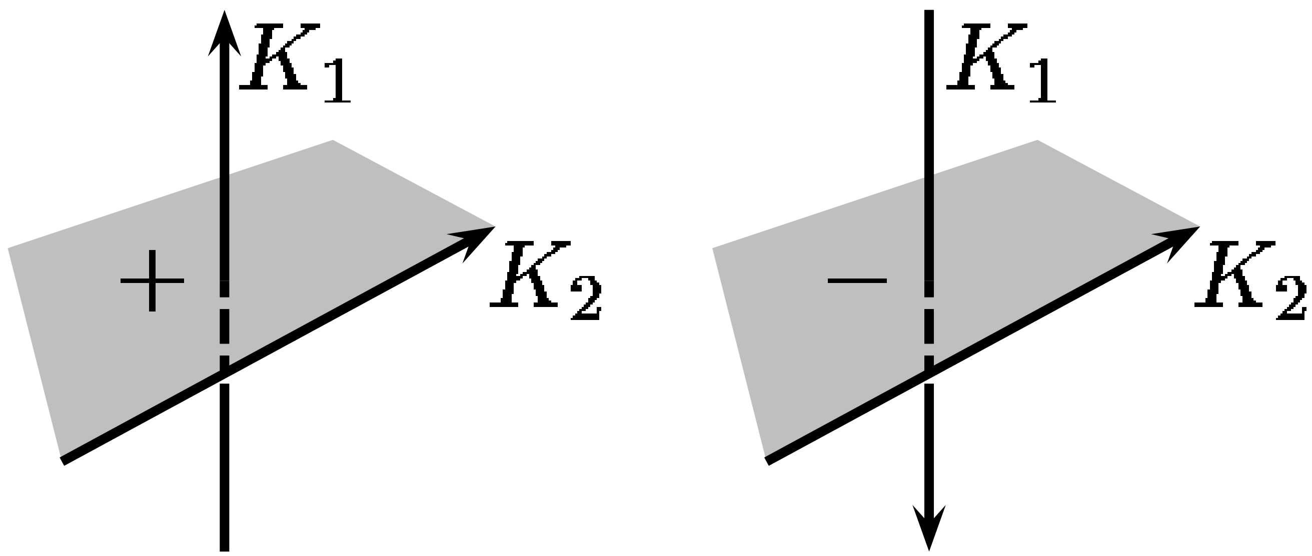
定理 (Seifert). **任意の (有向) 絡み目 L に対し、その (有向) ザイフェルト曲面 F が存在する。**

定義. $K_1 \cup K_2$：2 成分の有向絡み目

F：K_2 の有向ザイフェルト曲面

$\Longrightarrow$ K_1 と F の交点数

$int(K_1, F) =$($+$ の交点の個数)$-$($-$ の交点の個数)



命題. $lk(K_1, K_2) = int(K_1, F)$

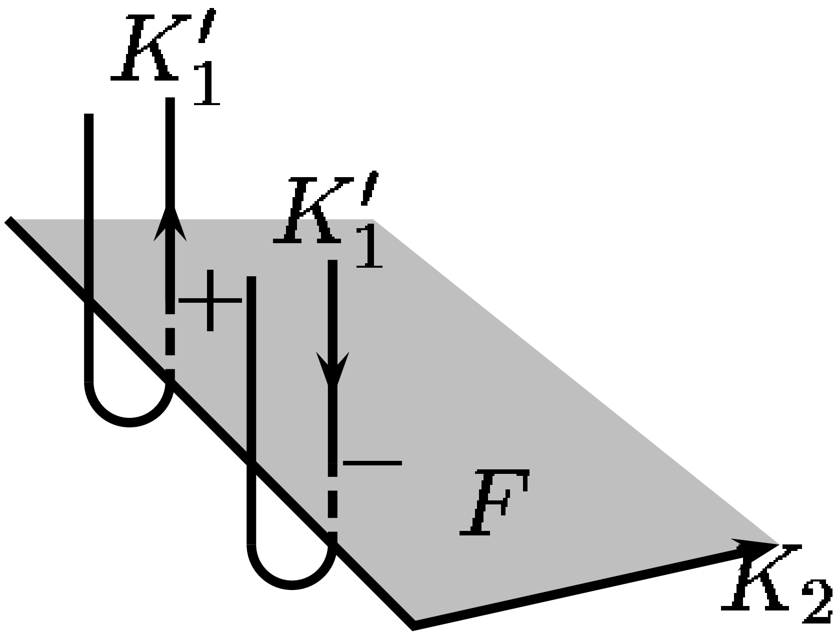
命題. $lk(K_1, K_2) = int(K_1, F)$

証明. $\tilde{K_1} \cup \tilde{K_2}$：$K_1 \cup K_2$ の正則表示を考え、$S = \{\ \tilde{K_1}$ の方が $\tilde{K_2}$ より下の交差点 $\}$ とする。

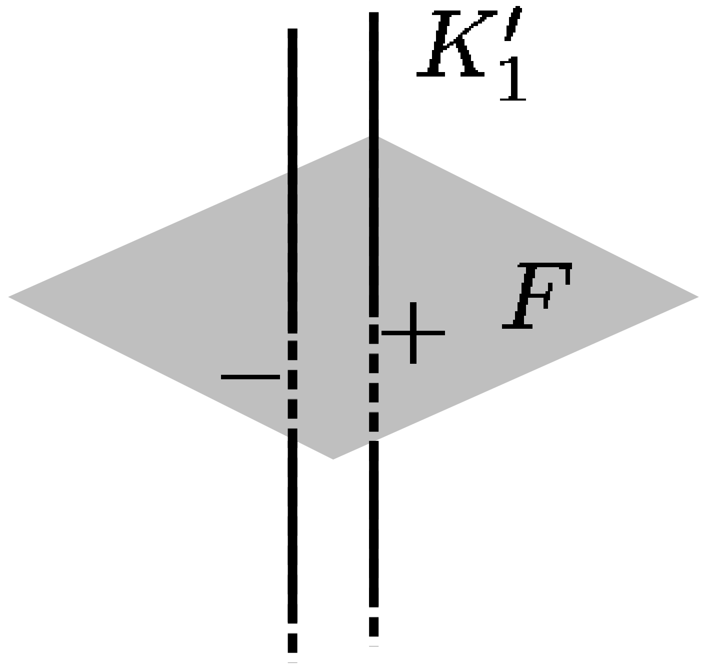
復習　$lk(K_1, K_2) = \sum_{q \in S} \varepsilon(q)$

まず、K_1 をそのまま引き上げようとしてみると、S の点のまわりで K_1 が K_2 にひっかかり、持ち上がらない。ここで、その変形した K_1 を K_1' とする。

(1)S の各点に対応して K_1' と F の交点が下図 (色つき部分 $=$ 表) のように生じ、q の符号の正負に応じて対応する交点の正負が定まる。



(2)K_1' の垂れ下がった部分と (1) 以外の F との交点が、より高いところで $+$ と $-$ の対になってできる可能性がある。



以上より、$\sum_{q\in S}\varepsilon(q) = int(K_1', F)$ が得られる。

従って、$lk(K_1, K_2) = int(K_1', F)$ となる。

以上より、$\sum_{q \in S} \varepsilon(q) = int(K_1', F)$ が得られる。

従って、$lk(K_1, K_2) = int(K_1', F)$ となる。

一般に、$K_1 \cap F$ と $K_1' \cap F$ は異なるが、K_1' の K_1 への変形をうまく取り直すと、$int(K_1, F) = int(K_1', F)$ となることがわかる。

以上より、$\sum_{q\in S}\varepsilon(q) = int(K_1', F)$ が得られる。

従って、$lk(K_1, K_2) = int(K_1', F)$ となる。

一般に、$K_1 \cap F$ と $K_1' \cap F$ は異なるが、K_1' の K_1 への変形をうまく取り直すと、$int(K_1, F) = int(K_1', F)$ となることがわかる。

よって、

$$lk(K_1, K_2) = int(K_1, F)$$

が示される。 $\square$

3　帯とその絡み数

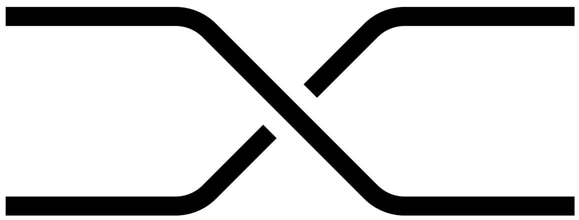
定義．中心線が結び目である帯のうち、表と裏の 2 つの面をもつものをリボンといい、そうでないものをメビウスの帯という。

ねじれ

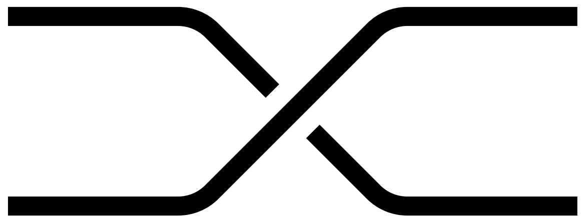
リボン – 偶数個

メビウスの帯 – 奇数個

ねじれ数：$n(X)$



$+\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2}$

ねじれ数：$n(X)$

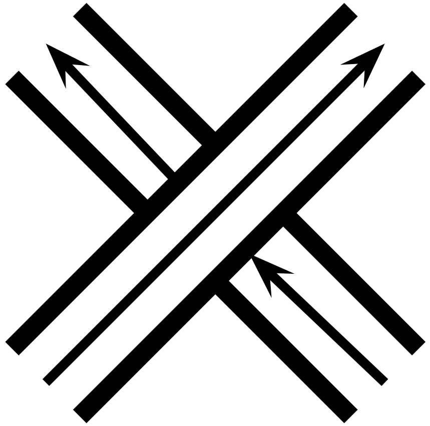
X:帯

α：$+\frac{1}{2}$ のねじれの個数

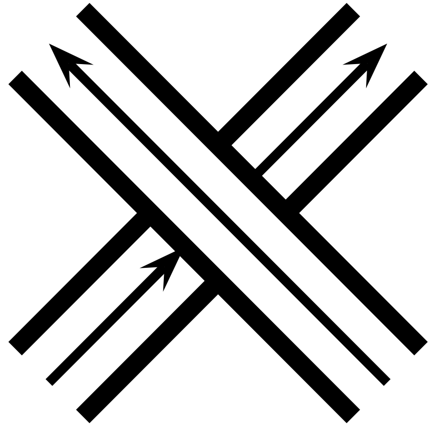
β：$-\frac{1}{2}$ のねじれの個数

$$\Longrightarrow \quad n(X) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

ライズ：$w(X)$

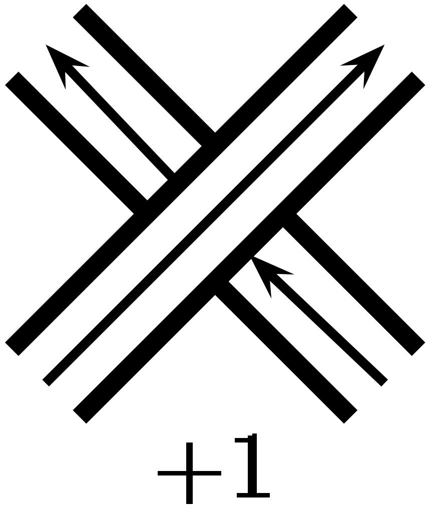


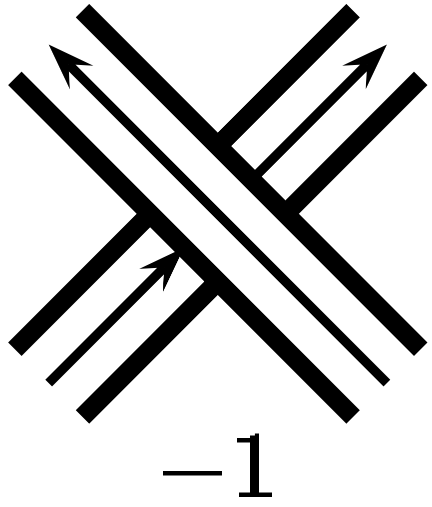
$+1$



-1

ライズ：$w(X)$





X：帯

x：$+1$ の交差の個数

y：-1 の交差の個数

$$\Longrightarrow \quad w(X) = x - y$$

絡み数：$\alpha(X)$

X ：帯

$n(X)$ ：ねじれ数

$w(X)$ ：ライズ

$$\Longrightarrow \quad \alpha(X) = n(X) + w(X)$$

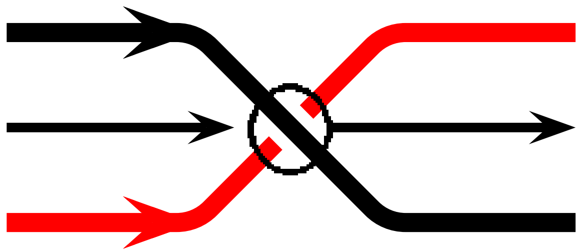
定理. X：リボン

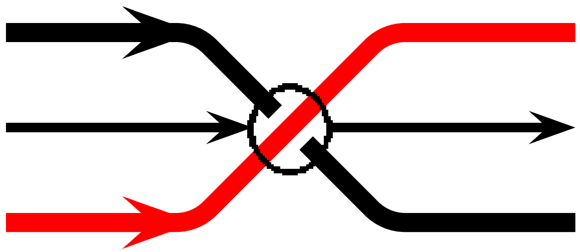
K_1,K_2：X 自身と同じ向きのふち

$$\Longrightarrow \quad \alpha(X) = lk(K_1, K_2)$$

注意. X の向きとは中心線の向きのことをいう。

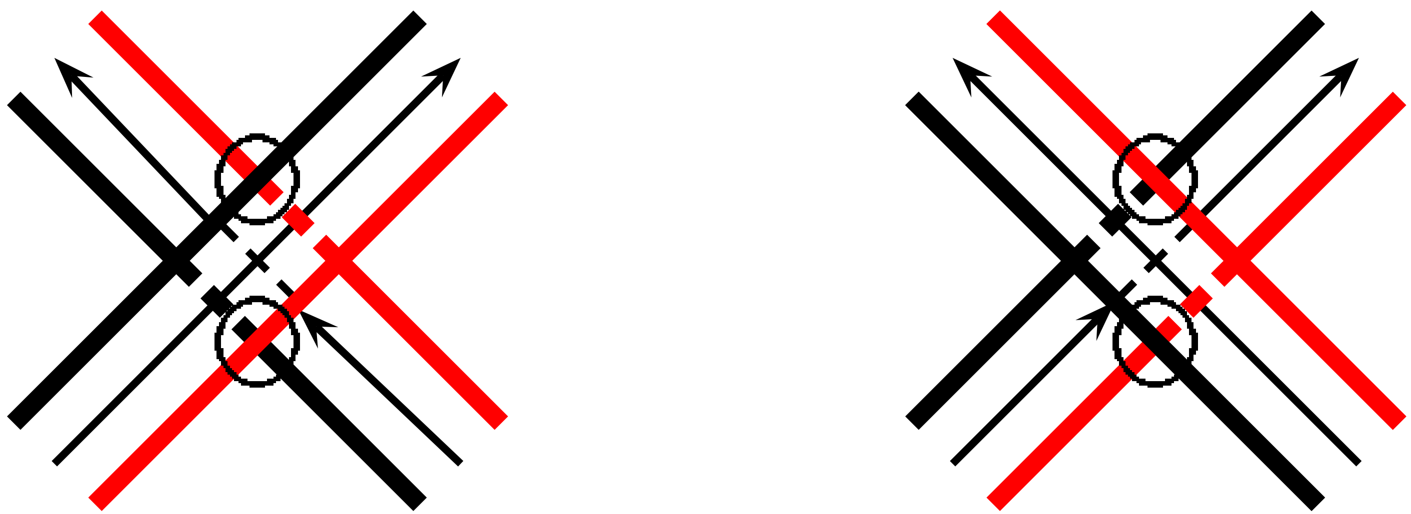
証明. ねじれ $+\frac{1}{2}$ の部分の K_1 と K_2 の絡み数は、$+\frac{1}{2}$ である (左図)。同様に、ねじれ $-\frac{1}{2}$ の部分の K_1 と K_2 の絡み数は、$-\frac{1}{2}$ である (右図)。





(X のねじれの部分でのふち同士の交差点における絡み数の和)=(X のねじれ数)

$+1$ の交差の部分の K_1 と K_2 の絡み数の和は、$\frac{1}{2}\{(+1)+(+1)\} = +1$ である (左図)。同様に、-1 の交差の部分の K_1 と K_2 の絡み数の和は、$\frac{1}{2}\{(-1)+(-1)\} = -1$ である (右図)。



(X の交差の部分でのふち同士の絡み数の和)=(X のライズ)

以上より、

$$n(X) + w(X) = lk(K_1, K_2)$$

が得られる。 $\square$

注意. X の中心線を C と書くとすると、

$$lk(K_1, K_2) = lk(C, K_1) = lk(C, K_2)$$

が成り立っている。

定理. X：メビウスの帯

C：X 自身と同じ向きの中心線

K：ふち

$$\Longrightarrow \qquad 2\alpha(X) = lk(C, K)$$

4 メビウスの帯の切断

定理. メビウスの帯 X を中心線で切って得られるリボンを Y とする。

定理. **メビウスの帯** X **を中心線で切って得られるリボンを** Y **とする。このそれぞれの帯の絡み数** $\alpha(X), \alpha(Y)$ **について、**

定理. **メビウスの帯** X **を中心線で切って得られるリボンを** Y **とする。このそれぞれの帯の絡み数** $\alpha(X), \alpha(Y)$ **について、**

$$\alpha(Y) = 4\alpha(X)$$

が成り立つ。

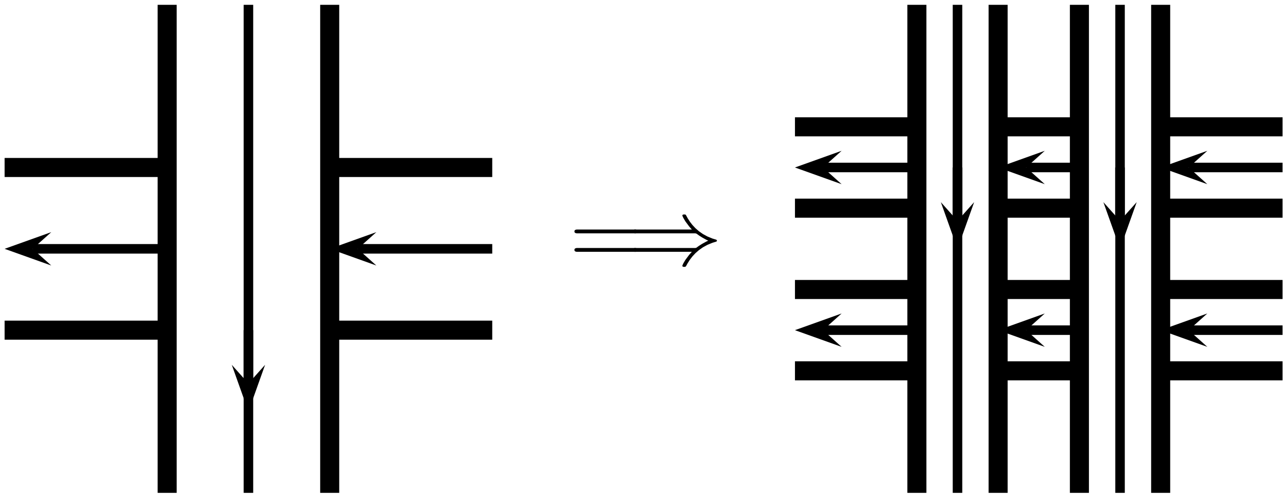
証明.

証明. $n(X)$:帯 X のねじれ数,

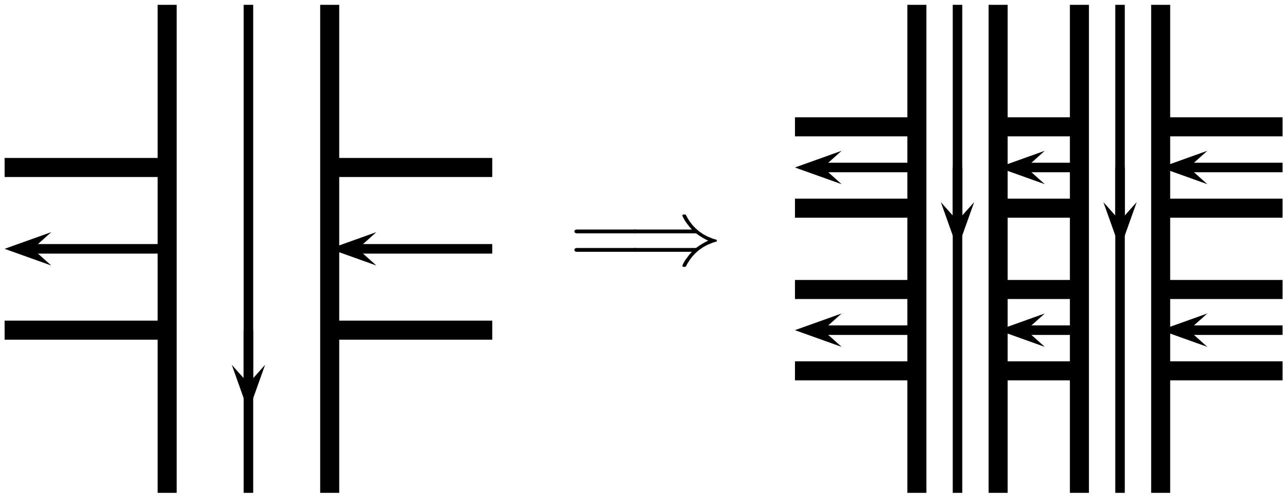
$w(X)$:帯 X のライズ

証明. 帯 X の交差の部分を半分に切る

証明. 帯 X の交差の部分を半分に切る

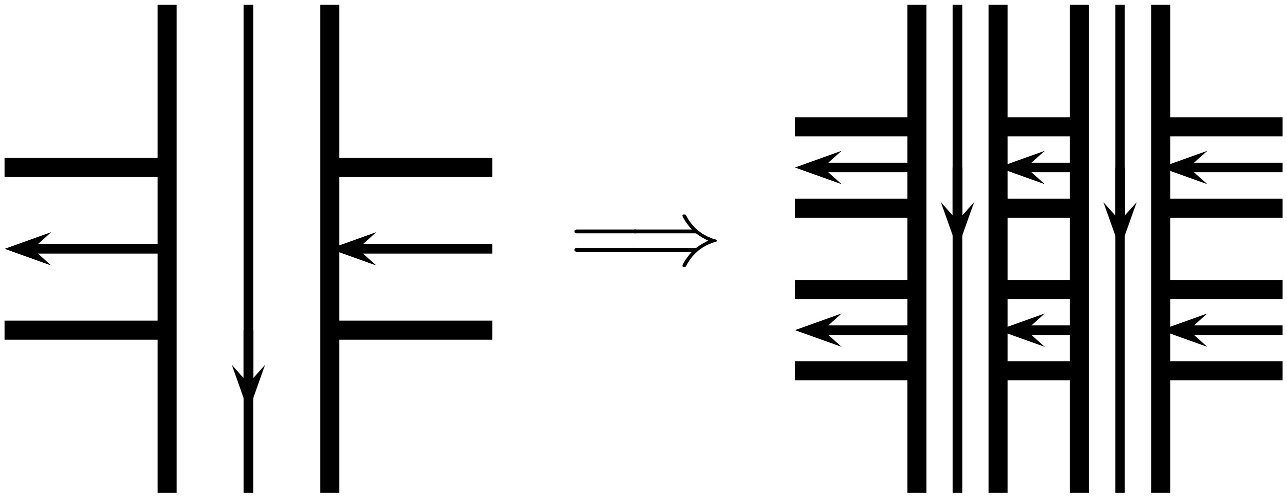


証明. 帯 X の交差の部分を半分に切る



ねじれがあらわれない

証明. 帯 X の交差の部分を半分に切る

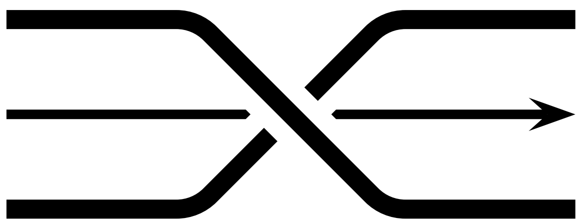


ねじれがあらわれない

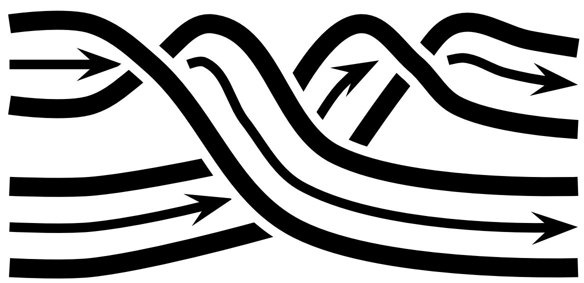
ライズの部分和は $w(X)$ の 4 倍

証明. 帯 X のねじれの部分を半分に切る

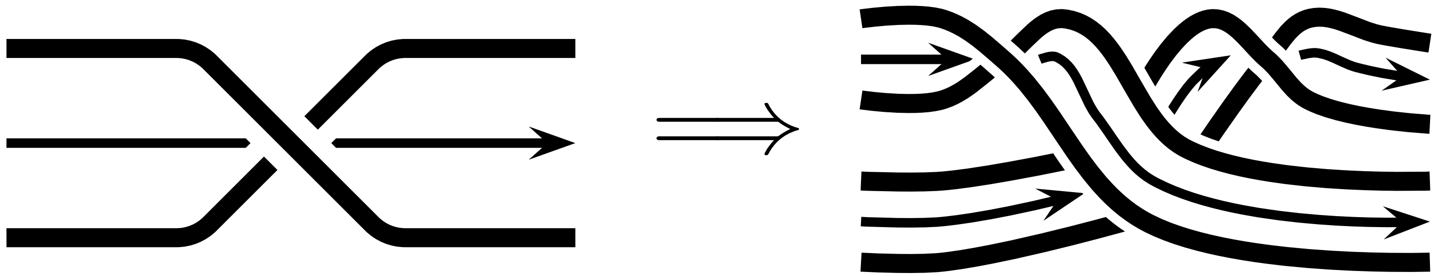
証明. 帯 X のねじれの部分を半分に切る



$\Longrightarrow$

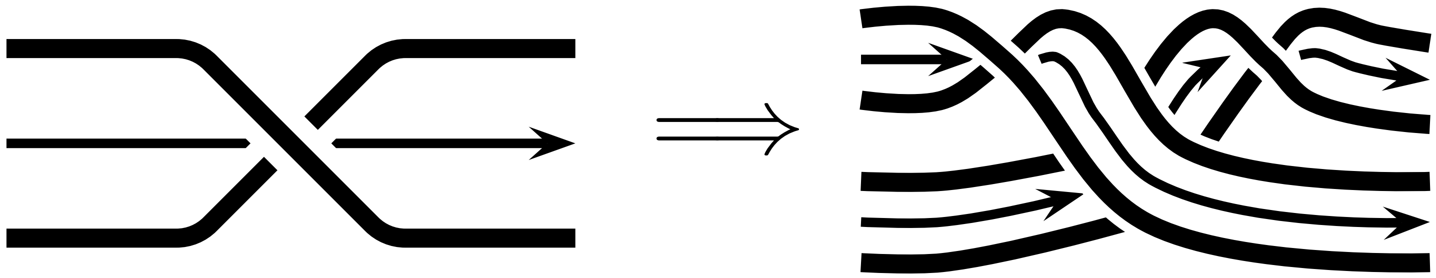


証明. 帯 X のねじれの部分を半分に切る



ねじれ数は $n(X)$ の 2 倍

証明. 帯 X のねじれの部分を半分に切る



ねじれ数は $n(X)$ の 2 倍

ライズの部分和は $n(X)$ の 2 倍

よって

よって

$$n(Y) = 2n(X) \tag{1}$$

$$w(Y) = 4w(X) + 2n(X) \tag{2}$$

よって

$$n(Y) = 2n(X) \tag{1}$$

$$w(Y) = 4w(X) + 2n(X) \tag{2}$$

$(1) + (2)$ **より、**

よって

$$n(Y) = 2n(X) \tag{1}$$

$$w(Y) = 4w(X) + 2n(X) \tag{2}$$

$(1) + (2)$ より、

$$n(Y) + w(Y) = 4(n(X) + w(X))$$

よって

$$n(Y) = 2n(X) \tag{1}$$

$$w(Y) = 4w(X) + 2n(X) \tag{2}$$

$(1) + (2)$ より、

$$n(Y) + w(Y) = 4(n(X) + w(X))$$

$\alpha(Y) = 4\alpha(X)$ が得られる。

メビウスの帯 X を中心線 C に沿って切り開いてできるリボンの中心線は X の境界 K と同じ。

メビウスの帯 X を中心線 C に沿って切り開いてできるリボンの中心線は X の境界 K と同じ。

以下で、C と K の関係について考察する。

メビウスの帯 X を中心線 C に沿って切り開いてできるリボンの中心線は X の境界 K と同じ。

以下で、C と K の関係について考察する。

次の定理は H.Schubert の定理の特別な場合である。

定理. X を空間中のメビウスの帯とする。X の中心線を C とし、X の境界を K とする。

このとき、仮に K が平凡ならば C も平凡である。

参考文献 [1] の議論を元に、定理を証明した。

定理の証明の方針

定理の証明の方針

K : **平凡**

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

定理の証明の方針

K : **平凡**

$\Longrightarrow$ K を境界とする円板の構成

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

定理の証明の方針

K : **平凡**

$\Longrightarrow$ K を境界とする円板の構成

$\Longrightarrow$ 円板の切り貼り

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

定理の証明の方針

K : **平凡**

$\Longrightarrow$ K を境界とする円板の構成

$\Longrightarrow$ 円板の切り貼り

$\Longrightarrow$ C を境界とする円板の構成

$\Longrightarrow$

定理の証明の方針

K : **平凡**

$\Longrightarrow$ K を境界とする円板の構成

$\Longrightarrow$ 円板の切り貼り

$\Longrightarrow$ C を境界とする円板の構成

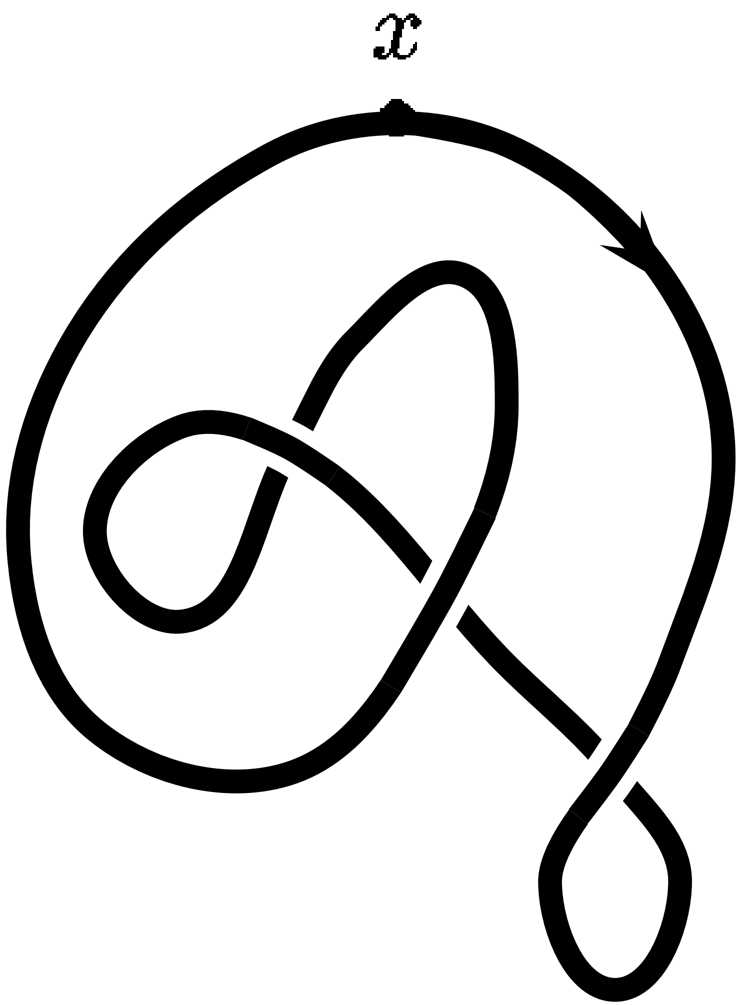
$\Longrightarrow$ C : **平凡**

5. 交差交換を許す変形

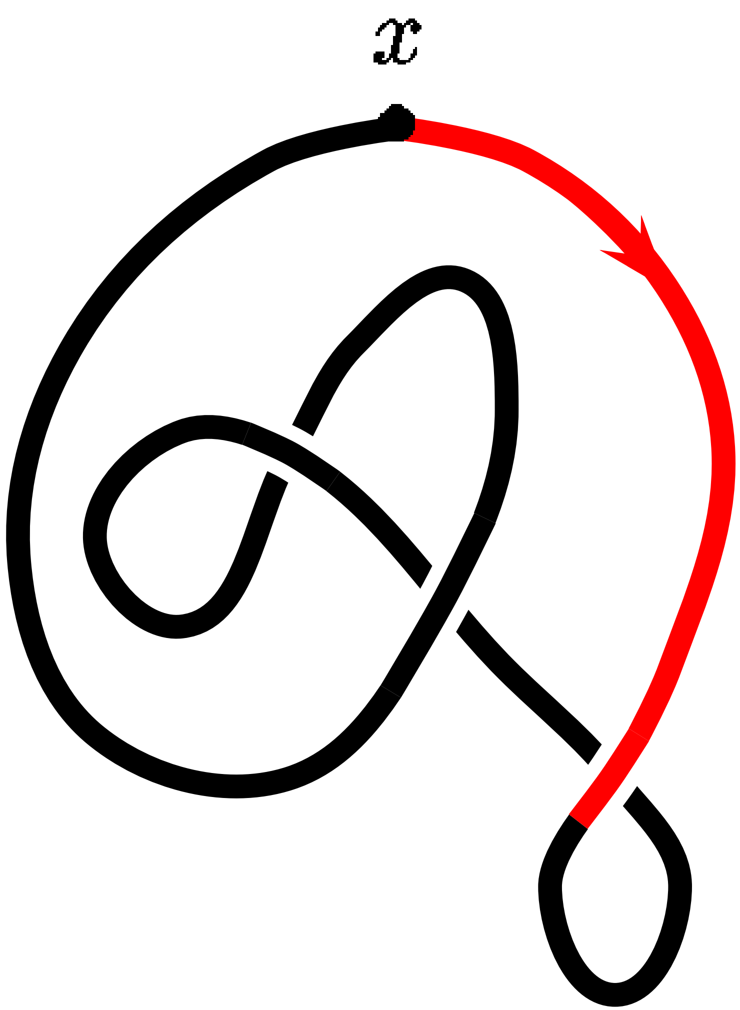
定理. K を正則の位置にある結び目とする。$\tilde{K}$ の交差点のうちのいくつかの交差点において交差交換することにより、$\tilde{K}$ は平凡な結び目となるようにできる。

証明. 正則表示 $\tilde{K}$ に 1 つの向きを定め、1 点 x を交差点以外から選ぶ。まず、x から指定した向きに従って $\tilde{K}$ を一周する。その際には、通過したところに色を付けながら進むこととし、交差点では次の規則に従うものとする：

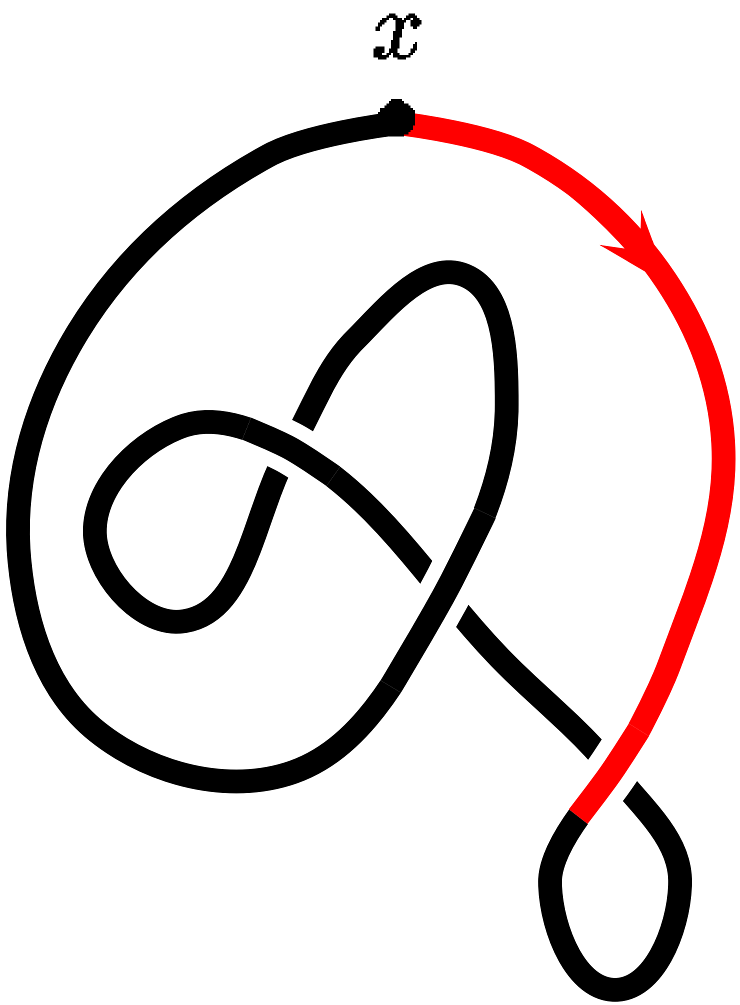
(i) 交差点で上交差点を通るときは、そのまま進む。



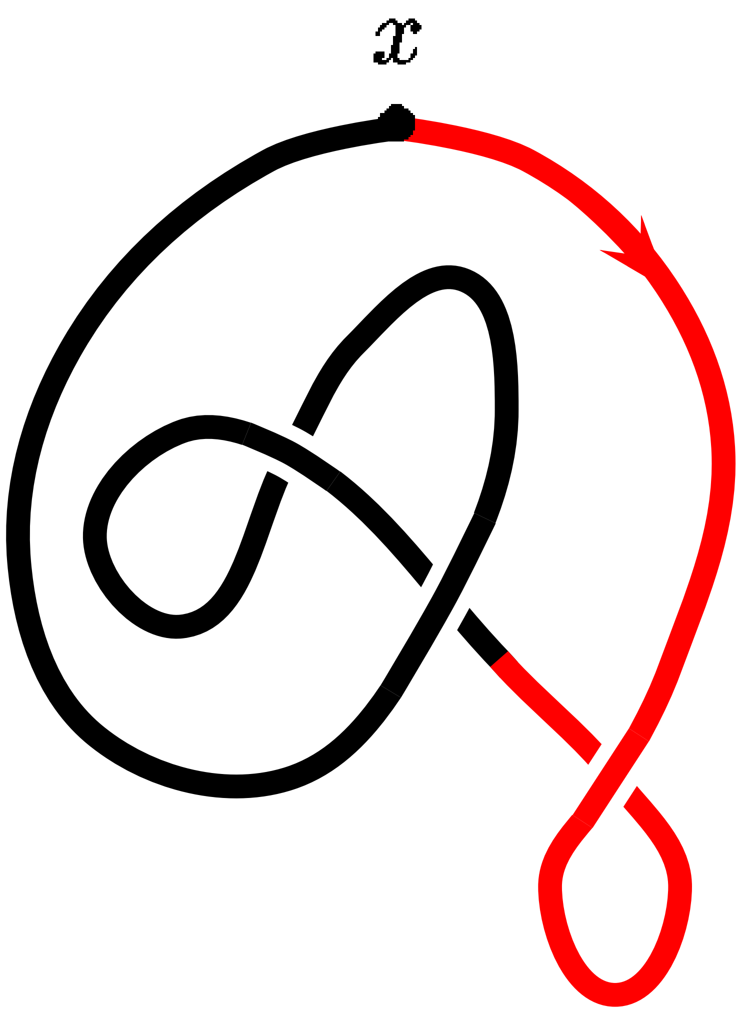
(i) 交差点で上交差点を通るときは、そのまま進む。



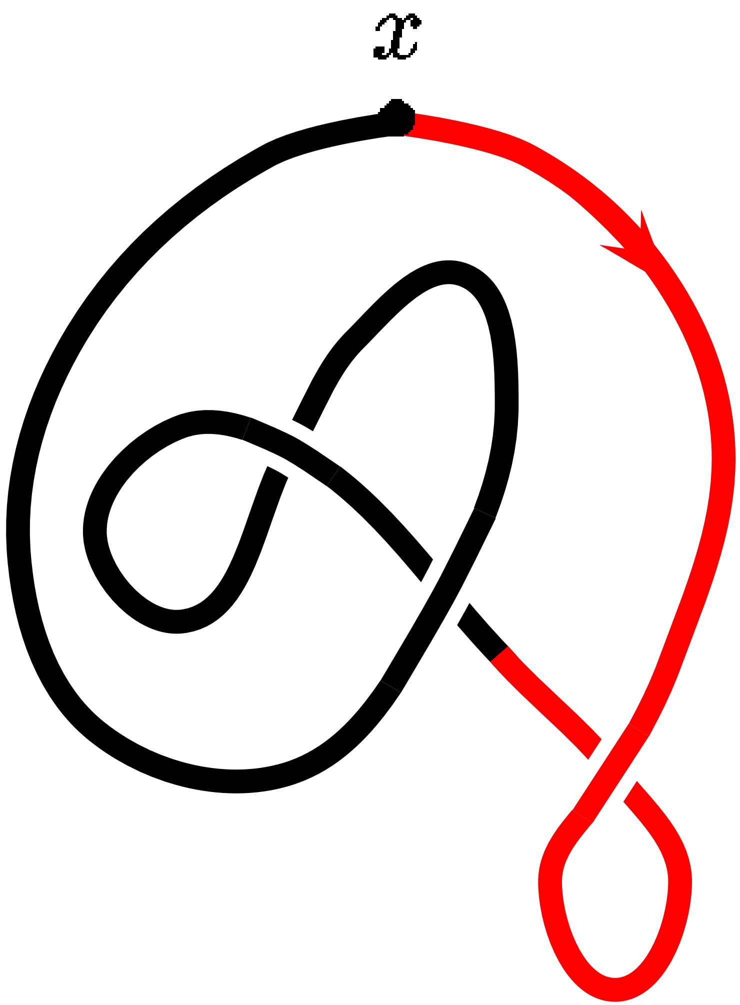
(ii) 交差点で下交差点を通るときは、その上交差点を含む辺が既に色付きならばそのまま進む。



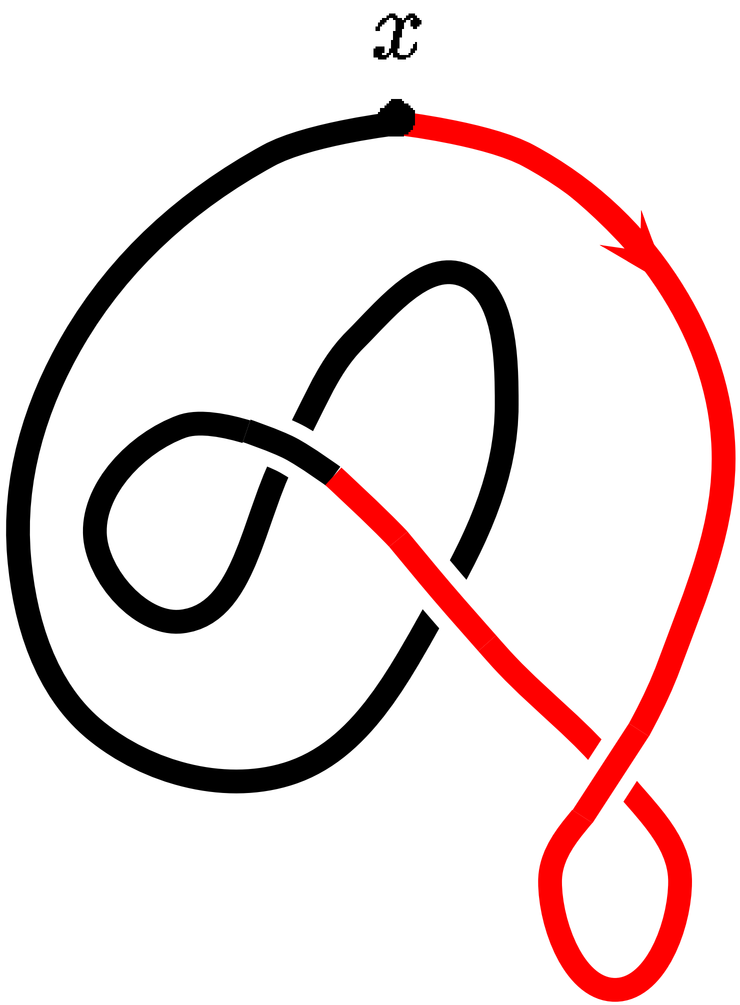
(ii) 交差点で下交差点を通るときは、その上交差点を含む辺が既に色付きならばそのまま進む。



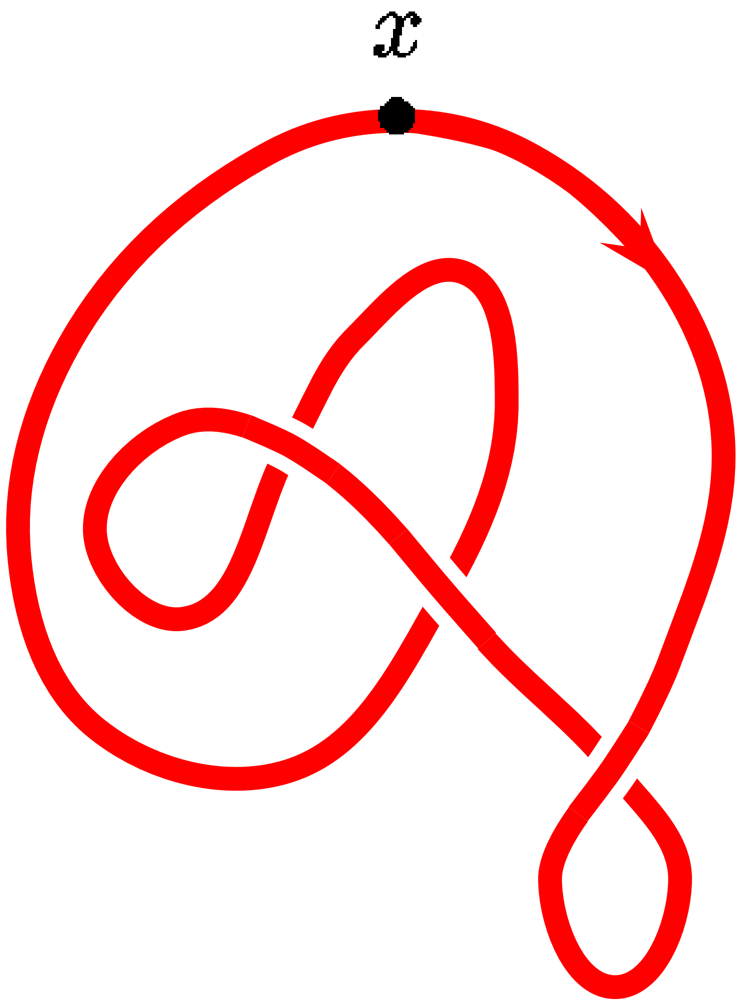
上交差点を含む辺がまだ色が付いていないならばそこで交差交換して進む。

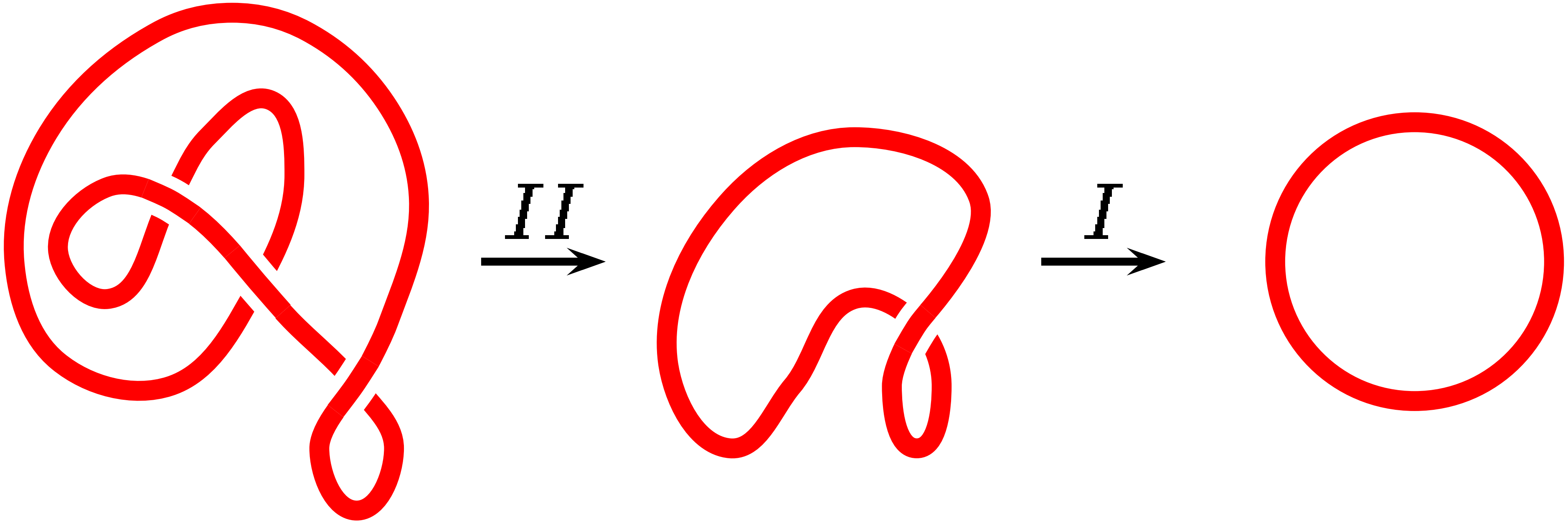


上交差点を含む辺がまだ色が付いていないならばそこで交差交換して進む。



そして、出発点 x に戻る。

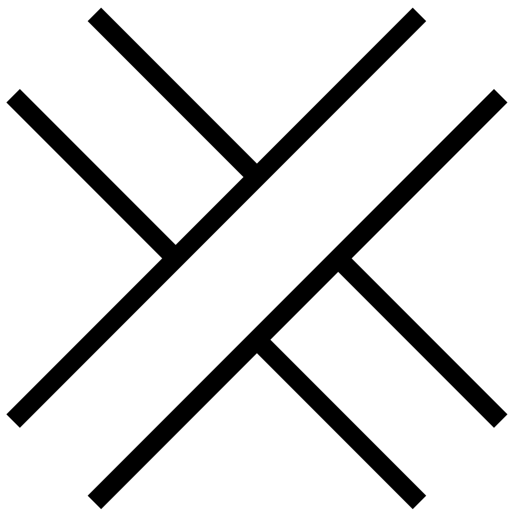




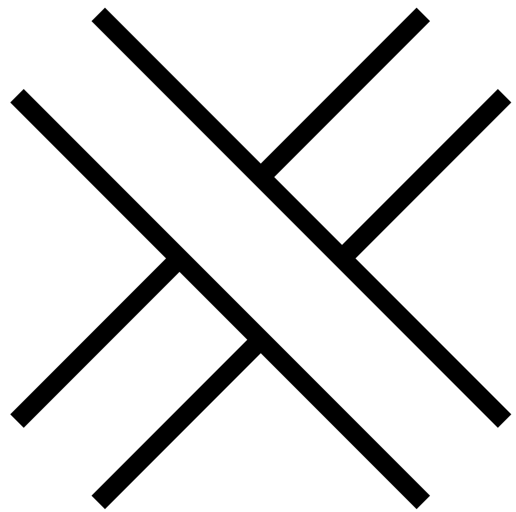
こうして得られたものは明らかに平凡な結び目である。 □

定理. $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ を正則の位置にある絡み目とする。$\tilde{L}$ の交差点のうちのいくつかの交差点において交差交換することにより、$\tilde{L}$ は平凡な絡み目となるようにできる。

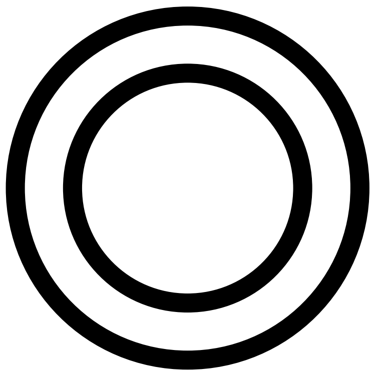
定理． リボンにおいて、下図のような交差交換を許すとする。



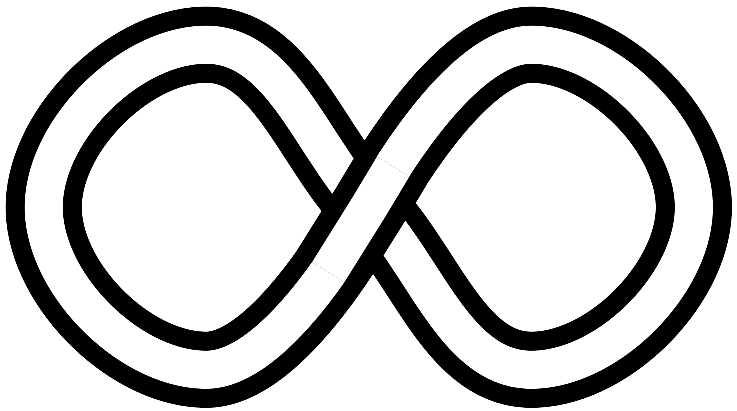
$$\Longleftrightarrow$$



このとき、どんなリボンも下図の A、B のいずれかに変形可能である。



A

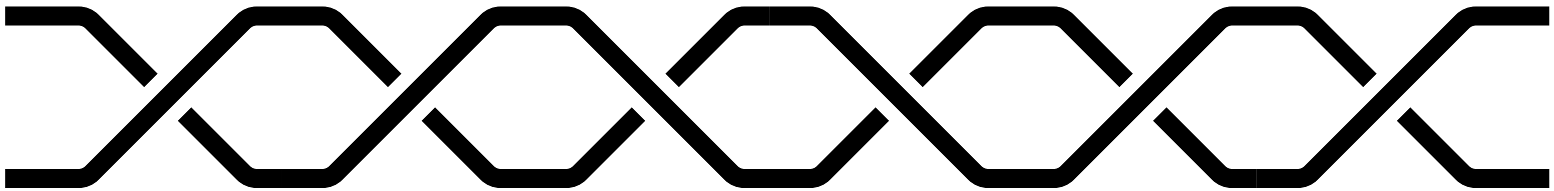


B

証明. まず、ねじれを気にせず中心線を平凡な結び目に変形し、その後ねじれを消していく。

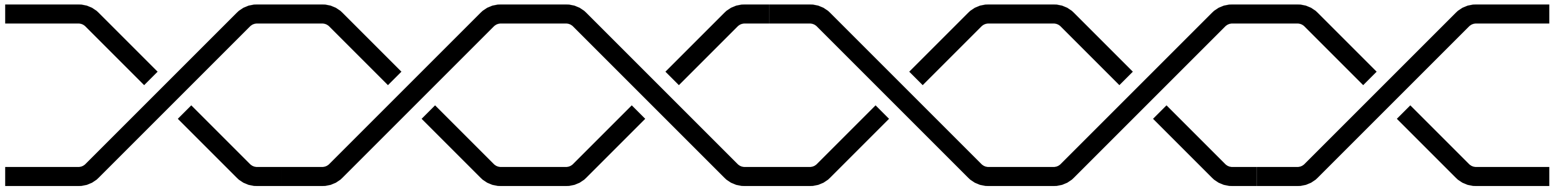
前定理より、交差交換を許すときにはどんな結び目も平凡な結び目にできることがわかっている。よって、中心線は平凡な結び目にできる。

$a.$ **リボンのねじれを一ヵ所に集め、ねじれの数を減らす。**



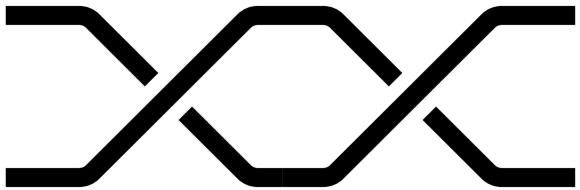
$$-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$$

$a.$ **リボンのねじれを一ヵ所に集め、ねじれの数を減らす。**



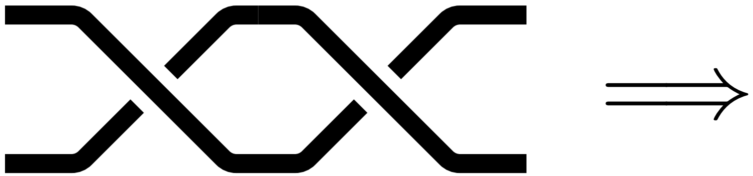
$$-\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2} \qquad +\frac{1}{2} \qquad +\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$

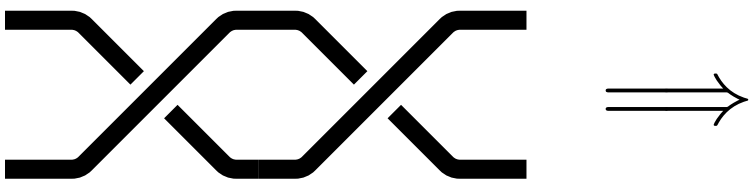


$$-\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2}$$

$b.$ **交差に統一する。**

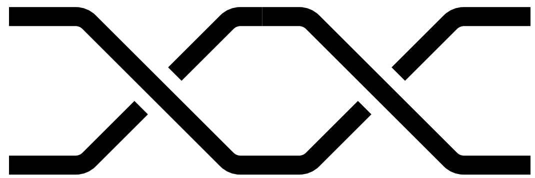
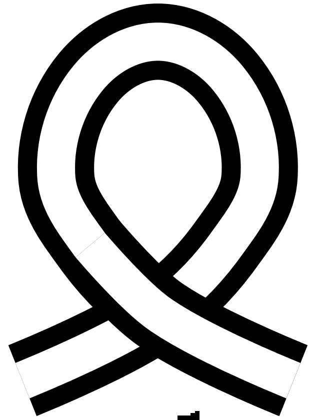


$+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$

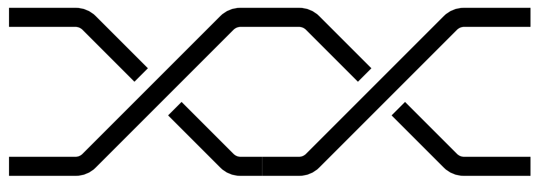
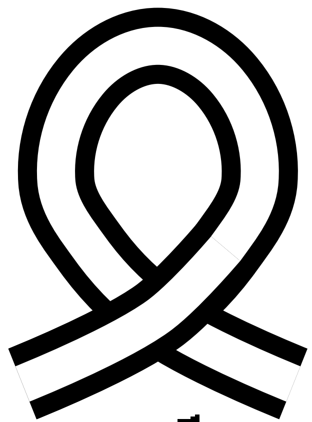


$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$

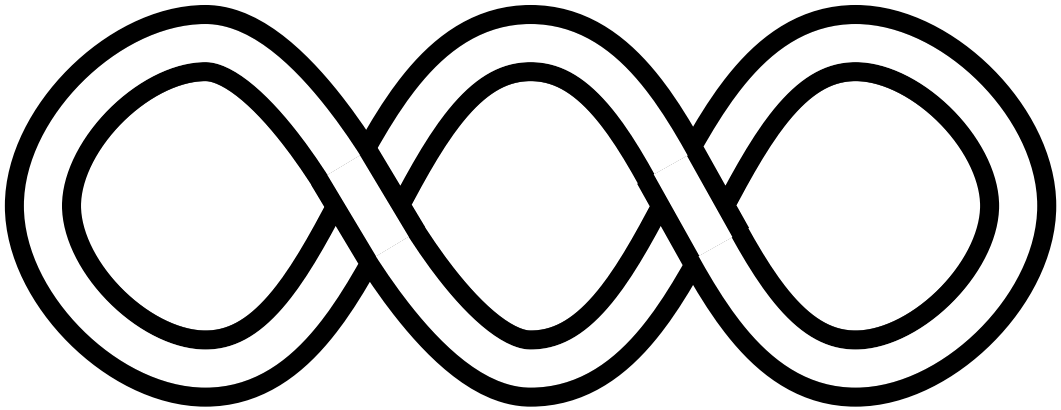
$b.$ 交差に統一する。

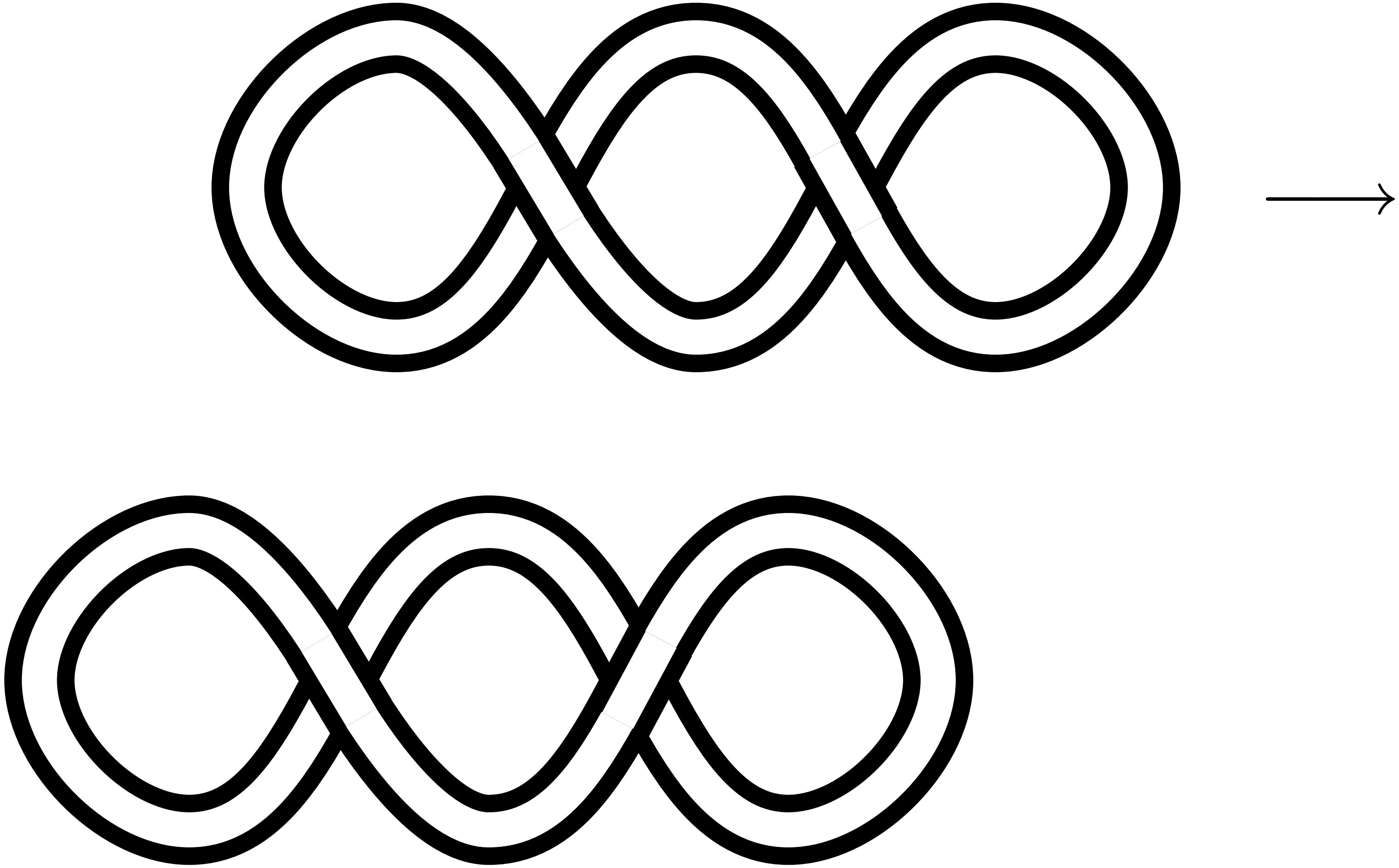
 $\Longrightarrow$ 

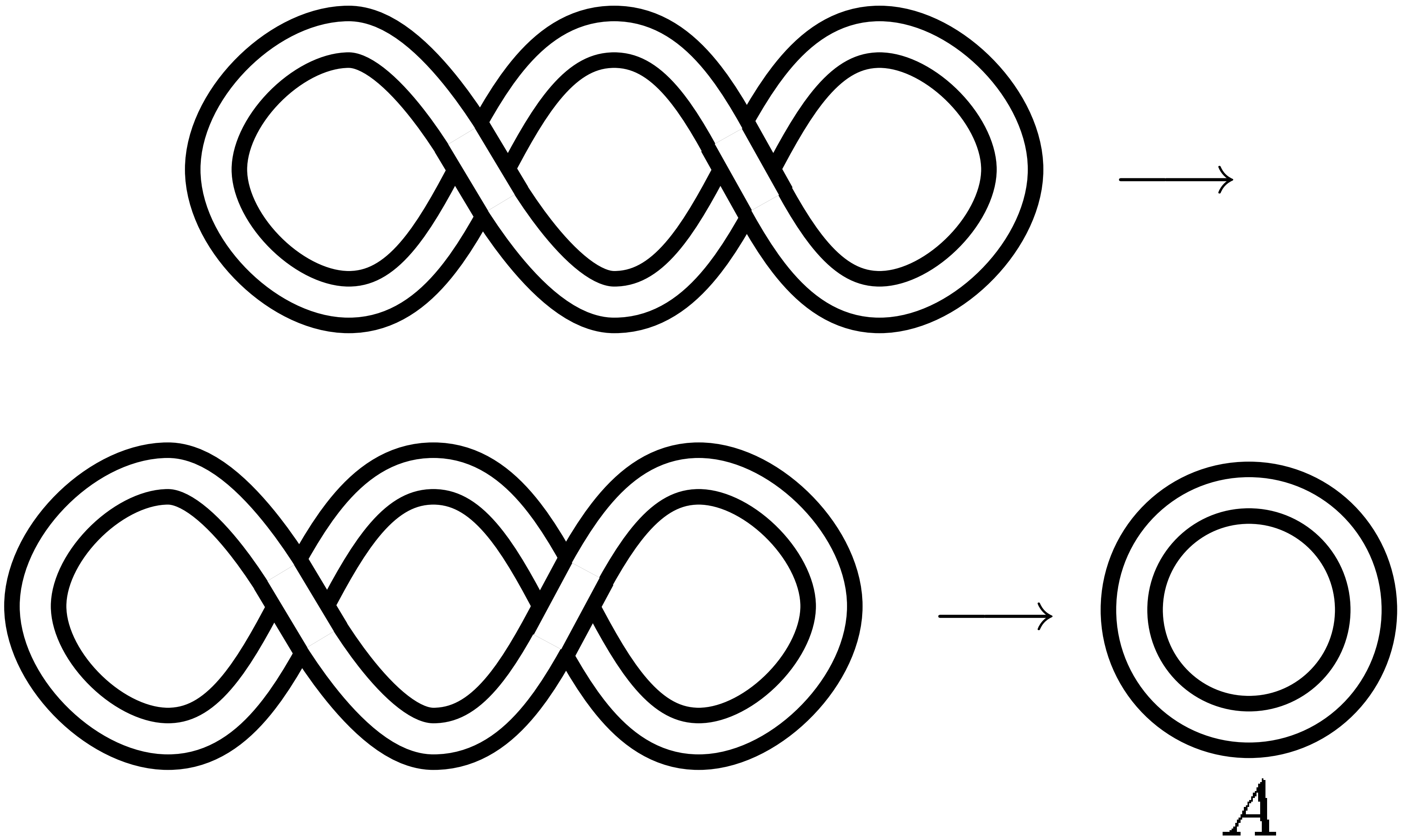
$+\frac{1}{2}$ $\qquad$ $+\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+1$

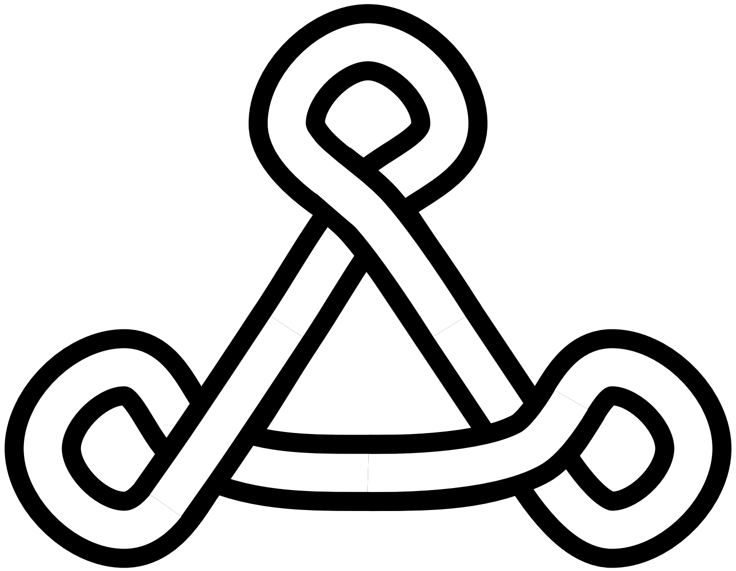
 $\Longrightarrow$ 

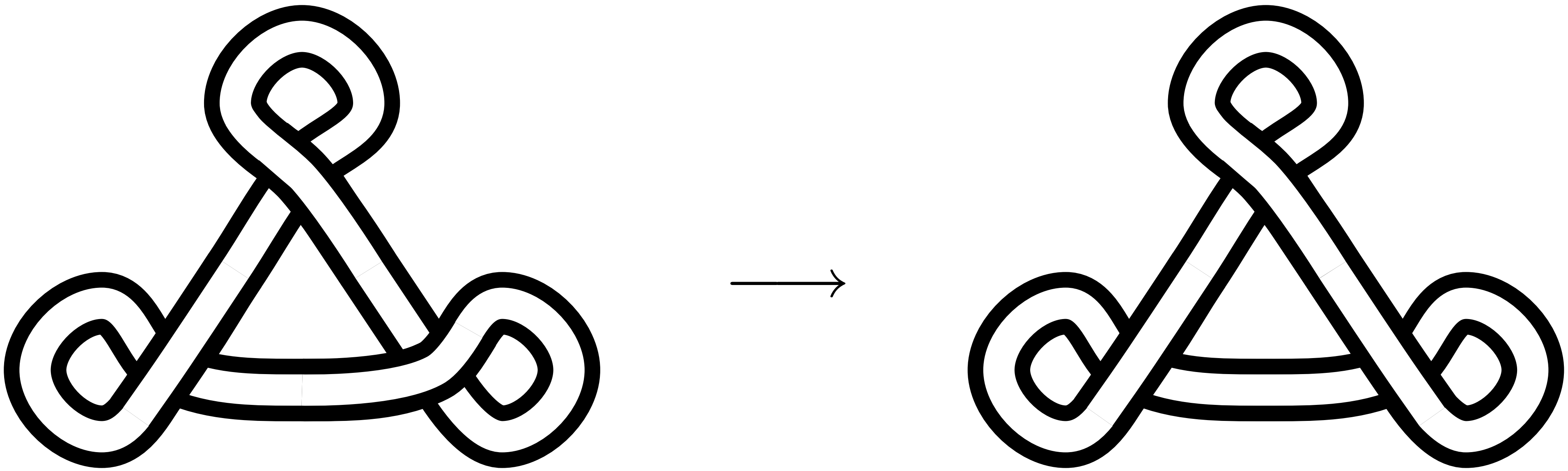
$-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ -1

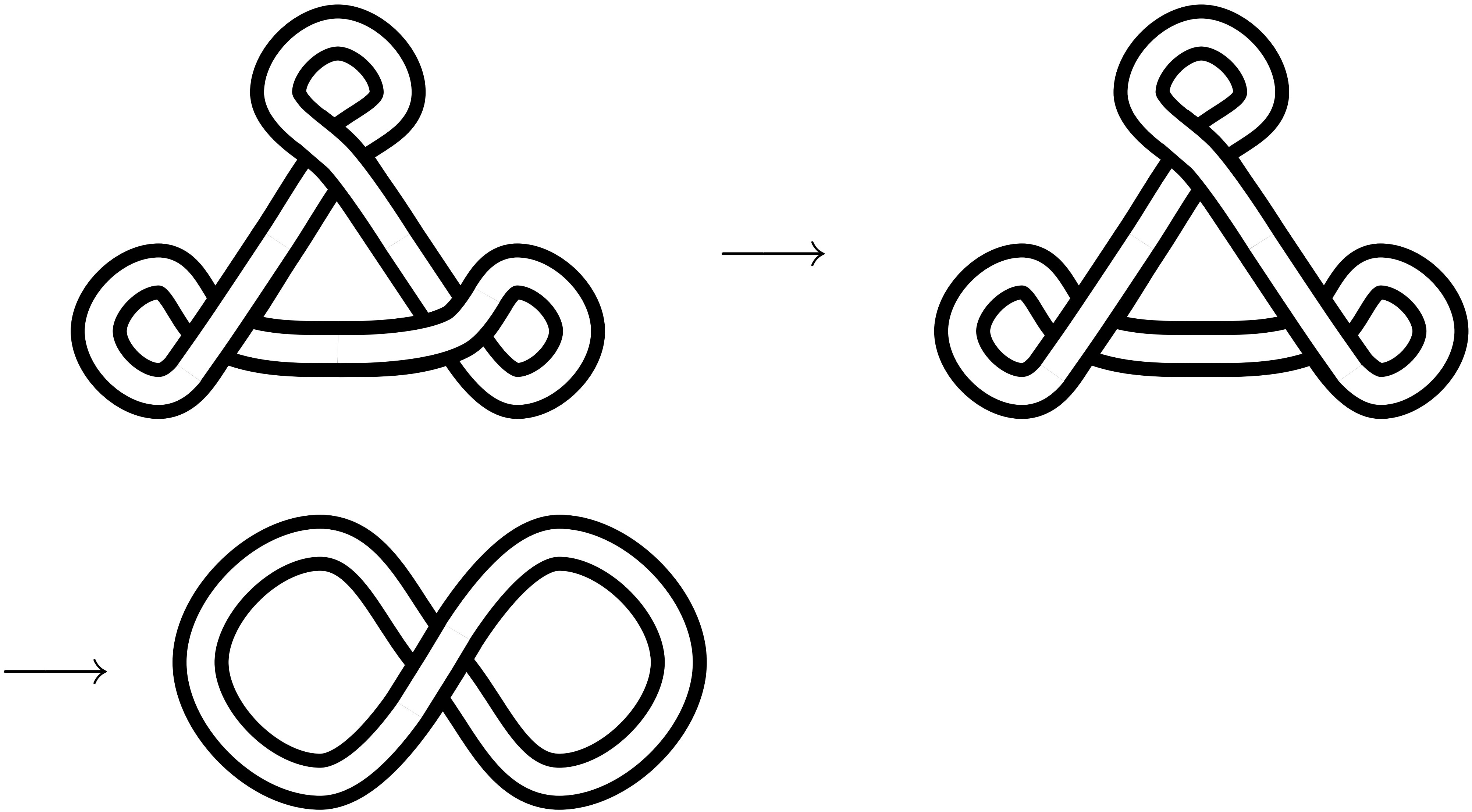





A



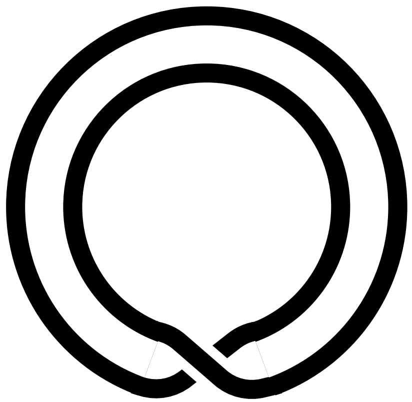




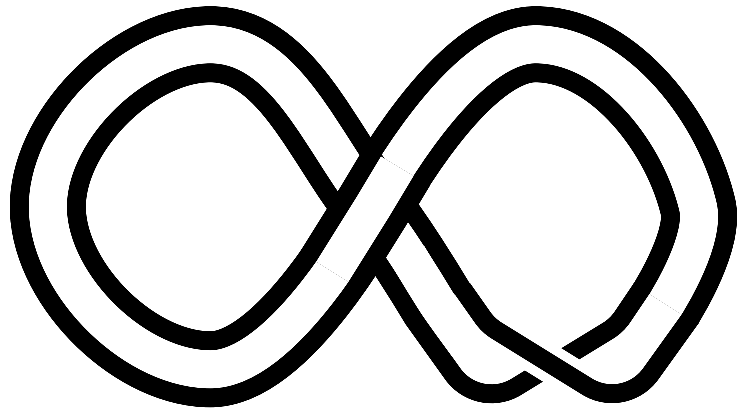
B

以上より、どんなリボンも A、B のいずれかに変形可能である。 $\square$

定理. メビウスの帯において、交差交換を許すとする。このとき、どんなメビウスの帯も下図の C、D のいずれかに変形可能である。



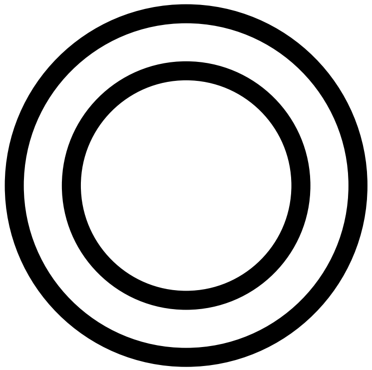
C



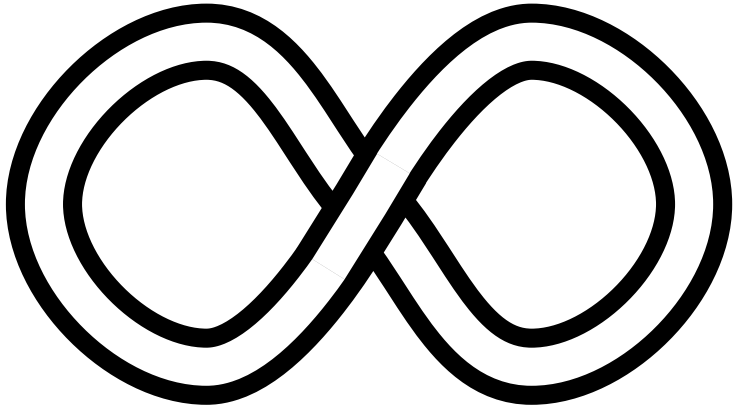
D

定理. 帯において、交差交換を許すとする。このとき、A と B、C と D は互いに変形不可能である。

証明. **交差交換をすることによって絡み数は ± 2 だけ変わる。**

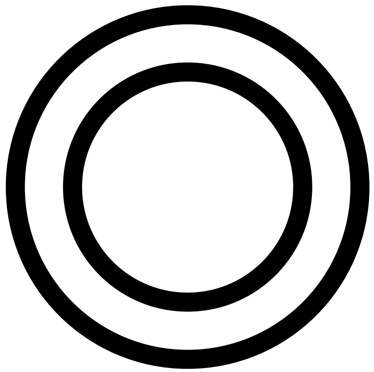


A

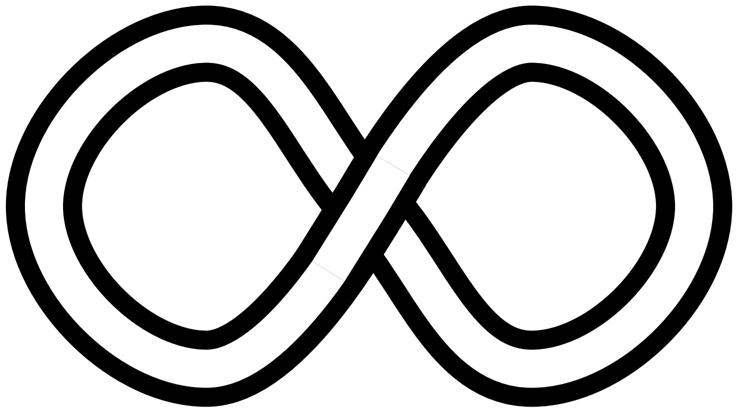


B

証明. 交差交換をすることによって絡み数は ± 2 だけ変わる。

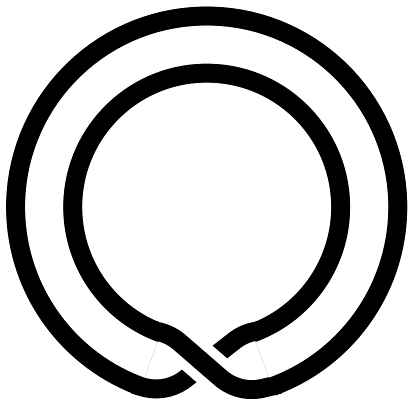


A

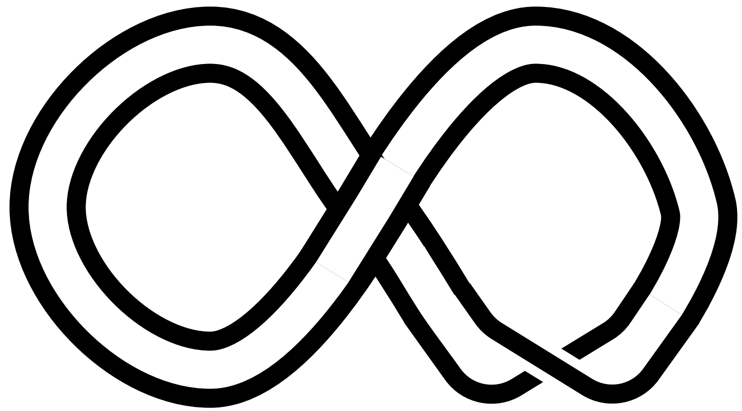


B

よって、A と B は互いに変形不可能である。

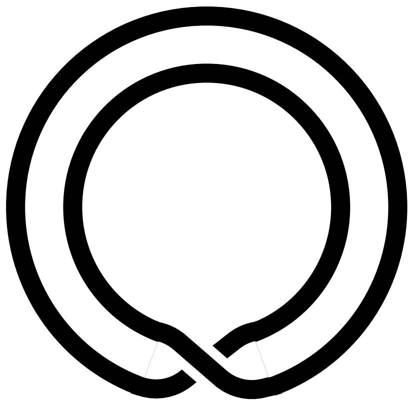


C

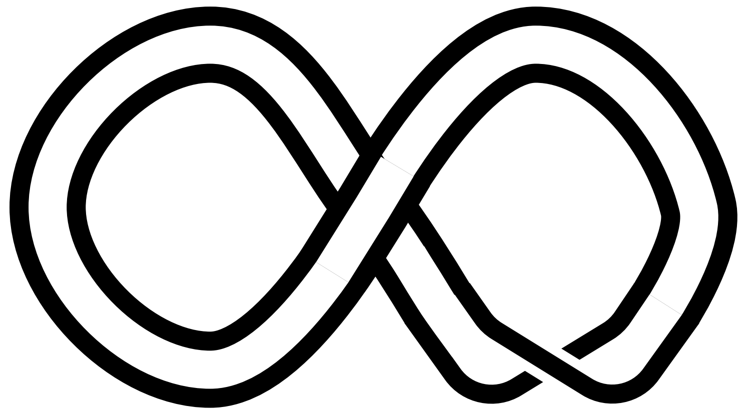


D

$\square$



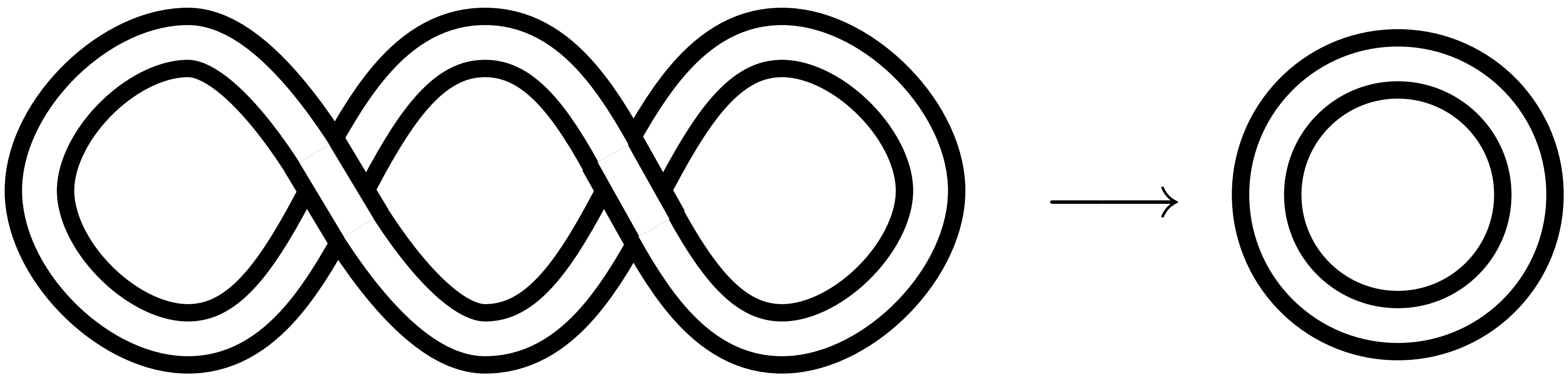
C



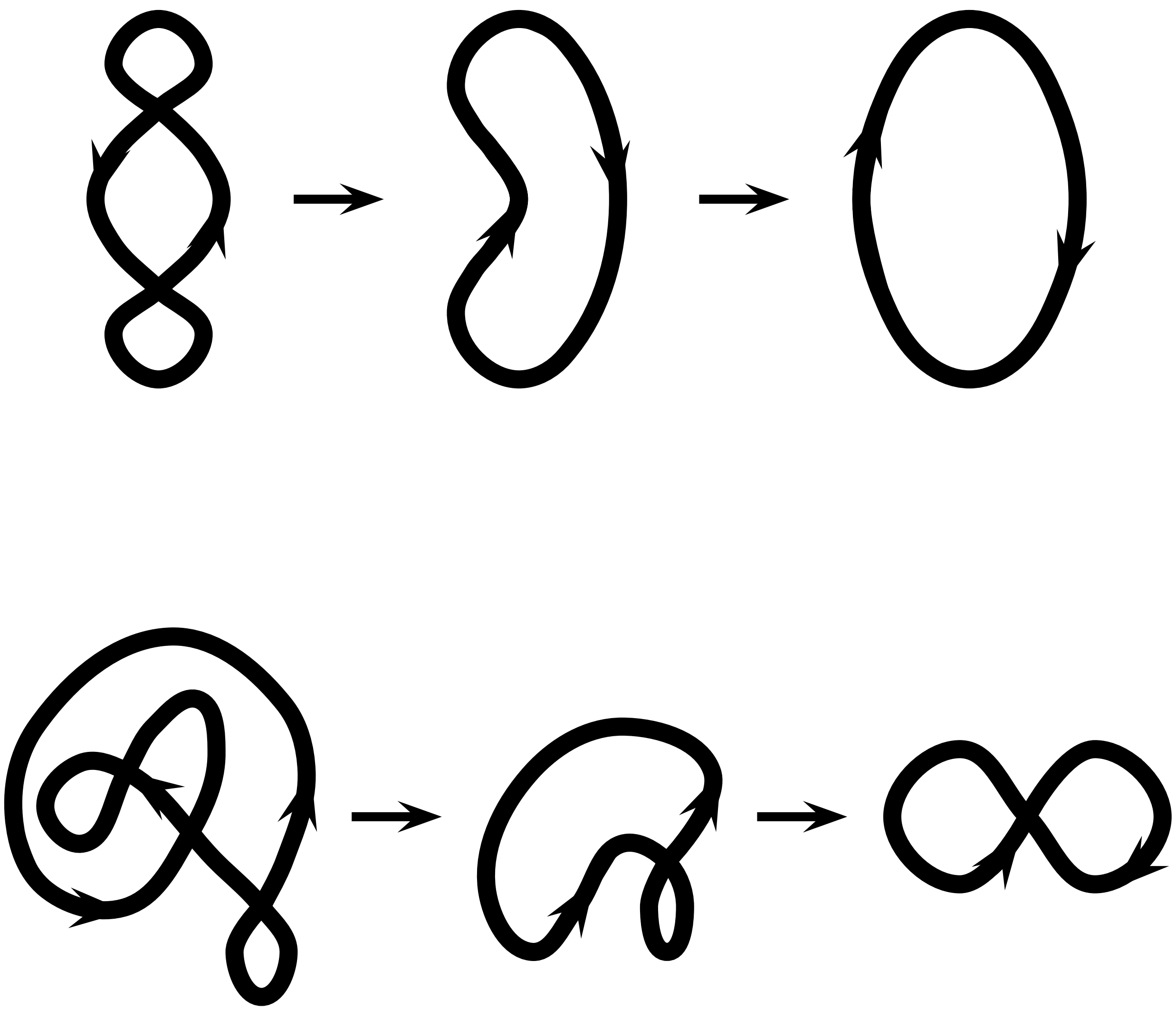
D

よって、C と D は互いに変形不可能である。 $\square$

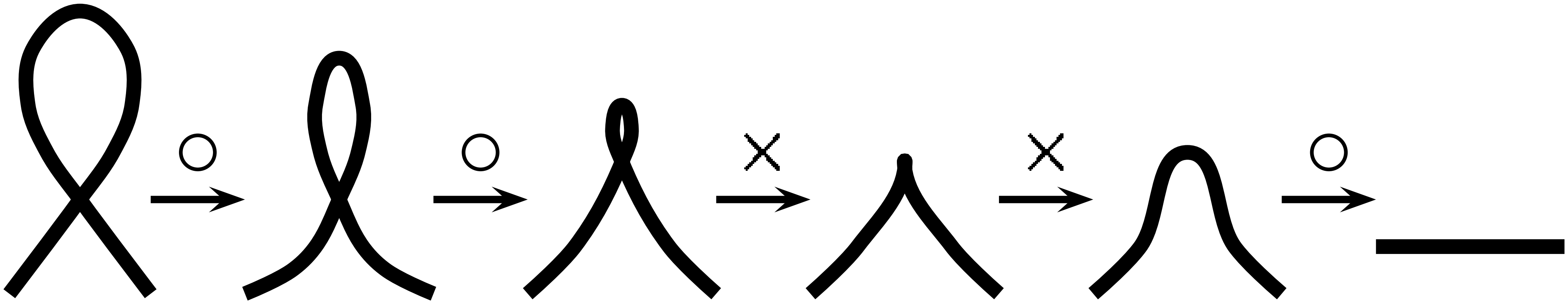
定義. 交差交換を許すとき、下図のようななめらかな変形を**正則ホモトピー** (regular homotopy) という。

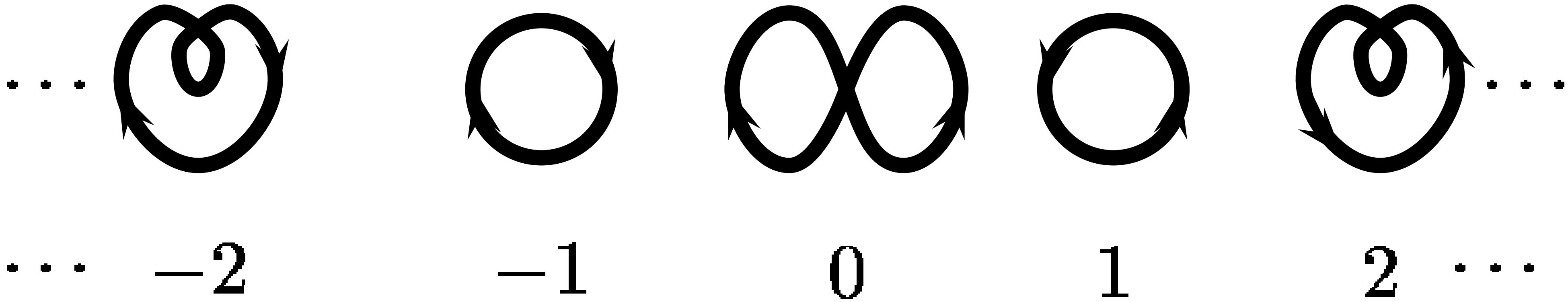


平面曲線の正則ホモトピー

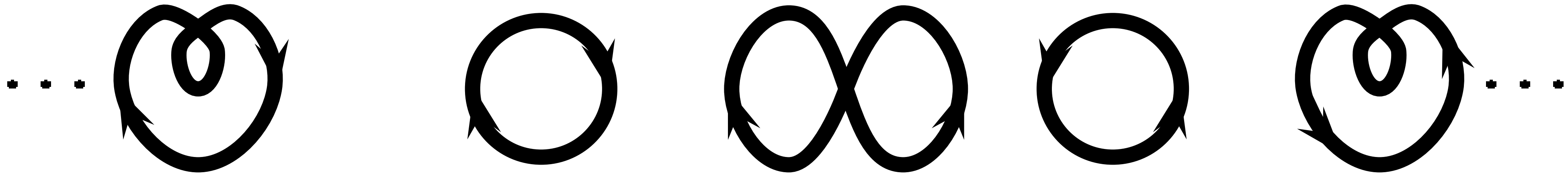


　ただし、下図のようにコブをつくったりしてはなめらかな変形とはいえない。





$\cdots$ -2 -1 0 1 2 $\cdots$



$$\cdots \qquad -2 \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad \cdots$$

これを回転数が $n(n$:整数) の標準形という。

6. コンウェイ多項式

有向絡み目 L に対して 3 つの公理を用いて、多項式 $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を定義することができる：

有向絡み目 L に対して 3 つの公理を用いて、多項式 $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を定義することができる：

$\mathbb{Z}[z]$ は z を変数とする整係数多項式環

有向絡み目 L に対して 3 つの公理を用いて、多項式 $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を定義することができる：

$\mathbb{Z}[z]$ は z を変数とする整係数多項式環

$\nabla_L(z)$ は有向絡み目 L およびその有向絡み目型 $[L]$ の**コンウェイ多項式**

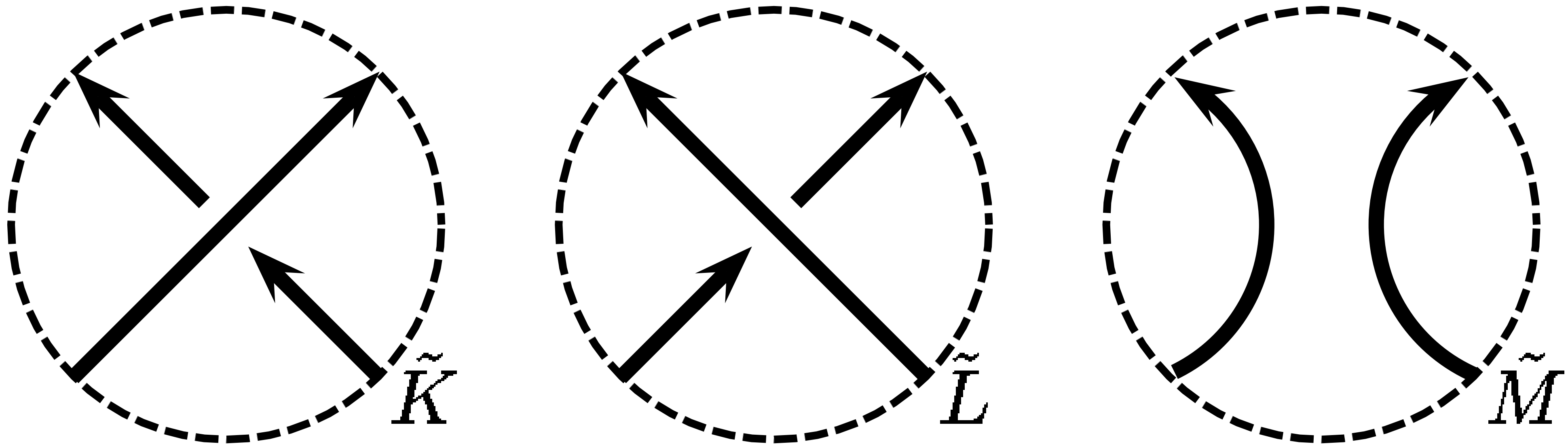
公理 (C_0) :有向絡み目 L と L' が有向同型ならば、

$$\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z).$$

公理（C_1）:平凡な有向結び目 O について、

$$\nabla_O(z) = 1.$$

　公理（C_2）:3 つの有向絡み目 K, L, M が正則の位置にあって、これらの正則表示 $\tilde{K}$, $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ はある 1 点の近傍がそれぞれ下図に示す状態になっていて、さらにこれらの近傍の外部では完全に一致しているとする。



このとき次の等式が成り立つ：

$$\nabla_K(z) - \nabla_L(z) = z\nabla_M(z).$$

命題．有向絡み目 M が分離可能ならば $\nabla_M(z) = 0$

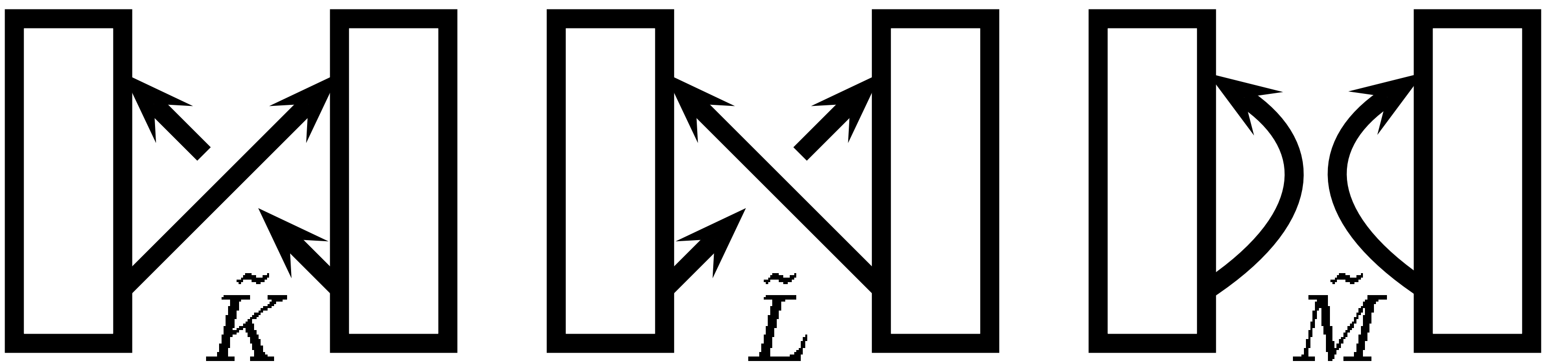
公理 (C_0) より、

$$\nabla_K(z) = \nabla_L(z).$$

公理 (C_2) より、

$$0 = \nabla_K(z) - \nabla_L(z) = z\nabla_M(z).$$

$$\therefore \quad \nabla_M(z) = 0$$



コンウェイ多項式の計算方法:

L を交差交換 $\longrightarrow$ 平凡

平凡な絡み目のコンウェイ多項式はわかっている

以上より帰納的に計算することができる

7 コンウェイ多項式の性質と計算例

定理. (1) **有向絡み目 L について、**

$$\nabla_L(z) = \nabla_{-L}(z)$$

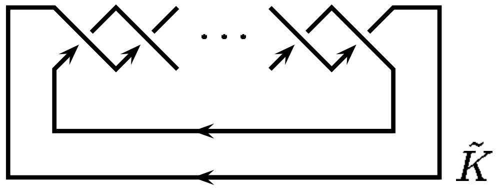
従って、コンウェイ多項式は、結び目に関しては、向きに依存しない不変量である

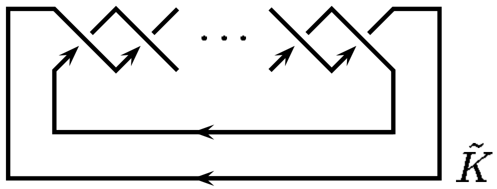
(2) μ **成分の有向絡み目** L **について、**L **のすべての交差点において得られる有向絡み目を** L^* **とすると**

$$\begin{aligned}\nabla_{L^*}(z) &= \nabla_L(-z) \\ &= (-1)^{\mu-1}\nabla_L(z)\end{aligned}$$

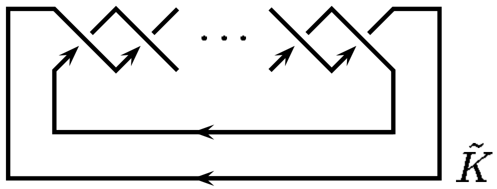
　定理の２式は、第３節で述べられた帰納的な計算方法を用いて容易に得ることができる。

例.(1)



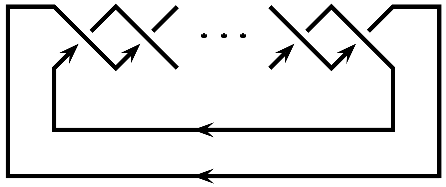


q : K の交差点の数、$K(q)$: K の表す絡み目

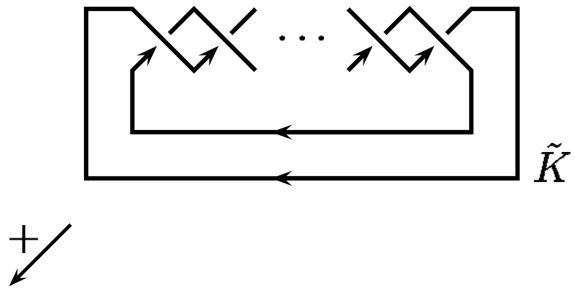


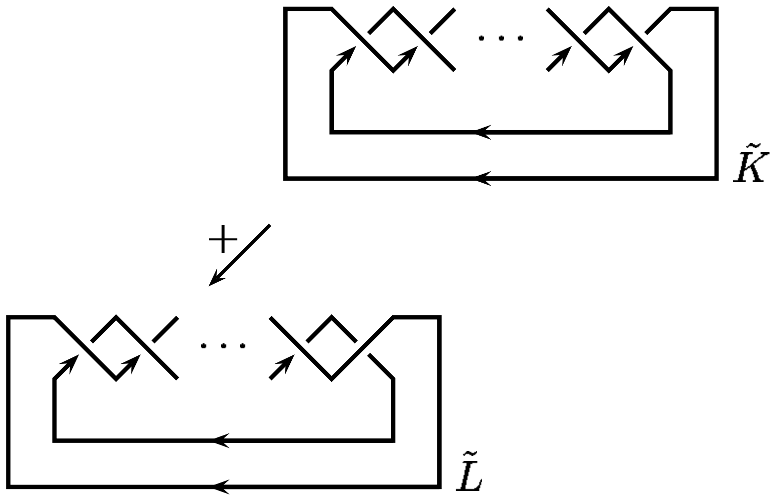
$q = 2n+1$ のとき、$K(q)$ は $(2,q)$ 型トーラス結び目、

$q = 2n$ のとき、$K(q)$ は $(2,q)$ 型トーラス絡み目

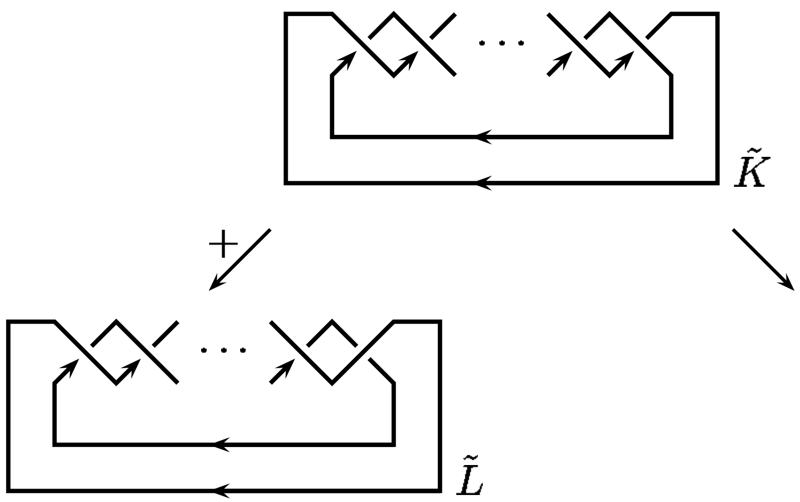


$\tilde{K}$

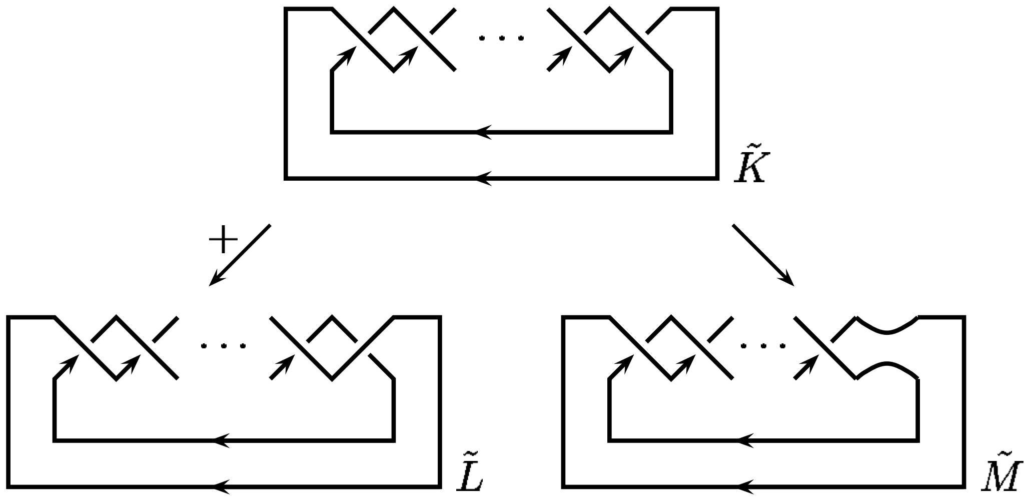

$\tilde{K}$
$+$



上図の L は $K(q-2)$ を表し、

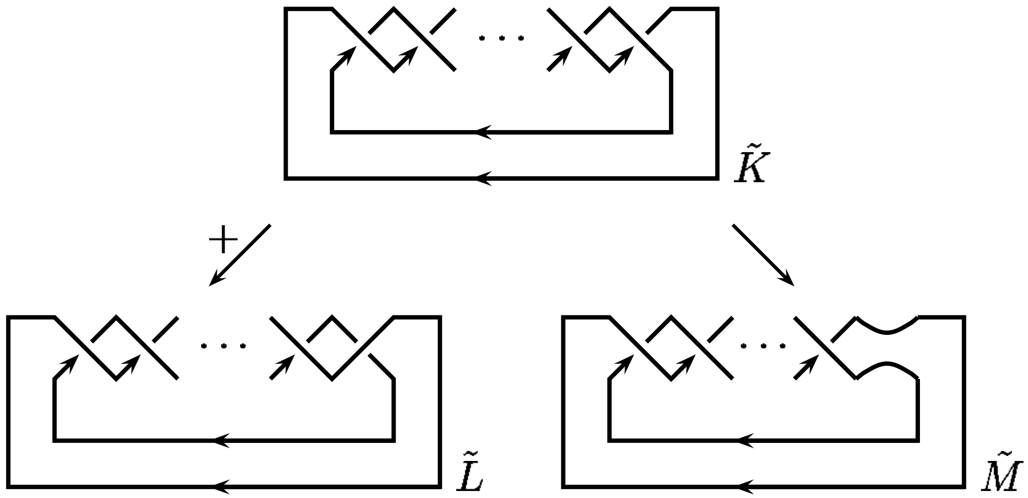


上図の L は $K(q-2)$ を表し、



上図の L は $K(q-2)$ を表し、

M は $K(q-1)$ を表す。



よって

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

を得る。

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) 式について $K(0)$ は平凡な絡み目、$K(1)$ は平凡な結び目だから、

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) 式について $K(0)$ は平凡な絡み目、$K(1)$ は平凡な結び目だから、

$$\nabla_{K(0)}(z) = 0,$$

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) **式について** $K(0)$ **は平凡な絡み目、**$K(1)$ **は平凡な結び目だから、**

$$\nabla_{K(0)}(z) = 0,$$

$$\nabla_{K(1)}(z) = 1,$$

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) 式について $K(0)$ は平凡な絡み目、$K(1)$ は平凡な結び目だから、

$$\nabla_{K(0)}(z) = 0,$$

$$\nabla_{K(1)}(z) = 1, \qquad \nabla_{K(2)}(z) = z,$$

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) 式について $K(0)$ は平凡な絡み目、$K(1)$ は平凡な結び目だから、

$$\nabla_{K(0)}(z) = 0,$$

$$\nabla_{K(1)}(z) = 1, \qquad \nabla_{K(2)}(z) = z,$$

繰り返していくと…

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{K(0)}(z) = 0,\\
&\nabla_{K(1)}(z) = 1,\\
&\nabla_{K(2)}(z) = z,\\
&\nabla_{K(3)}(z) = 1 + z^2,\\
&\nabla_{K(4)}(z) = 2z + z^3,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

が得られる。

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) に $z = 1$ を代入

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) に $z = 1$ を代入 $\rightarrow$

$$\nabla_{K(q)}(z) = \nabla_{K(q-2)}(z) + z\nabla_{K(q-1)}(z) \qquad (B)$$

(B) に $z = 1$ を代入 $\rightarrow$

$$\nabla_{K(q)}(1) = \nabla_{K(q-2)}(1) + \nabla_{K(q-1)}(1)$$

$\nabla_{K(1)}(1) = \nabla_{K(2)}(1) = 1$ であるから、

$\nabla_{K(1)}(1) = \nabla_{K(2)}(1) = 1$ であるから、

$\nabla_{K(n)}(1)$ は、

$\nabla_{K(1)}(1) = \nabla_{K(2)}(1) = 1$ であるから、

$\nabla_{K(n)}(1)$ は、

フィボナッチ数列 $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \cdots$ となる。

よって、$K(1), K(2), K(3), K(4), \cdots\cdots$ たちが**互いに同型でない**ことがわかる。

よって、$K(1), K(2), K(3), K(4), \cdots\cdots$ たちが**互いに同型でない**ことがわかる。

特に、$K(3), K(5), K(7), K(9), \cdots\cdots$ は**平凡な絡み目でない**ことがわかる。

例.(2)

$K(q)$ **の交差の上下を逆にしたものを** $K(-q)$ **と表すことにする。**

例.(2)

$K(q)$ **の交差の上下を逆にしたものを** $K(-q)$ **と表すことにする。このとき、定理の** (2) **より、**

例.(2)

$K(q)$ **の交差の上下を逆にしたものを** $K(-q)$ **と表すことにする。このとき、定理の** (2) **より、**

$$\nabla_{K(-q)}(z) = (-1)^{q-1}\nabla_{K(q)}(z)$$

であることがわかる。

我々は、

我々は、中心線が結び目 C であるようなメビウスの帯 X を半分に切ってできるリボンの中心線 K が平凡であるならば、

我々は、中心線が結び目 C であるようなメビウスの帯 X を半分に切ってできるリボンの中心線 K が平凡であるならば、C 自身が平凡でなければならないことを示した。

我々は、中心線が結び目 C であるようなメビウスの帯 X を半分に切ってできるリボンの中心線 K が平凡であるならば、C 自身が平凡でなければならないことを示した。

C が平凡であるとき、

我々は、中心線が結び目 C であるようなメビウスの帯 X を半分に切ってできるリボンの中心線 K が平凡であるならば、C 自身が平凡でなければならないことを示した。

C が平凡であるとき、X は例の (1)、(2) のような境界をもつメビウスの帯 (以下、$M(q)$ と書く) であり $K = K(q)(q$ は奇数) となる。

我々は、中心線が結び目 C であるようなメビウスの帯 X を半分に切ってできるリボンの中心線 K が平凡であるならば、C 自身が平凡でなければならないことを示した。

C が平凡であるとき、X は例の (1)、(2) のような境界をもつメビウスの帯 (以下、$M(q)$ と書く) であり $K = K(q)(q$ は奇数) となる。

これが平凡であるのは、$q = \pm 1$ のときだけである。

以上をまとめて、次の定理を得る:

以上をまとめて、次の定理を得る:

定理. メビウスの帯 M を半分に切ってできるリボンの中心線が平凡であるのは、

以上をまとめて、次の定理を得る:

定理. メビウスの帯 M を半分に切ってできるリボンの中心線が平凡であるのは、

$M = M(\pm 1)$ **の 2 つの場合のみ**である。