総合理学学術講演会

結び目と４次元の手術

山崎　正之

2006.6.8

準備：基本的な図形の紹介

準備：基本的な図形の紹介

● n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$

準備：基本的な図形の紹介

● n 次元ユークリッド空間 R^n

$$= \text{“点”}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \text{の全体}$$

準備：基本的な図形の紹介

● n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$

$$= \text{“点”}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ の全体}$$

1. $\mathbf{R}^1 =$ 数直線 $(-\infty, \infty)$

準備：基本的な図形の紹介

- n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$

$$= \text{“点”}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \text{の全体}$$

1. $\mathbf{R}^1 =$ 数直線 $(-\infty, \infty)$
2. $\mathbf{R}^2 = 2$ 次元平面

準備：基本的な図形の紹介

● n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$

$$= \text{“点”}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \text{の全体}$$

1. $\mathbf{R}^1 =$ 数直線 $(-\infty, \infty)$
2. $\mathbf{R}^2 = 2$ 次元平面
3. $\mathbf{R}^3 = 3$ 次元空間

● n **次元球面** $\mathbf{S}^n \quad \subset \quad \mathbf{R}^{n+1}$

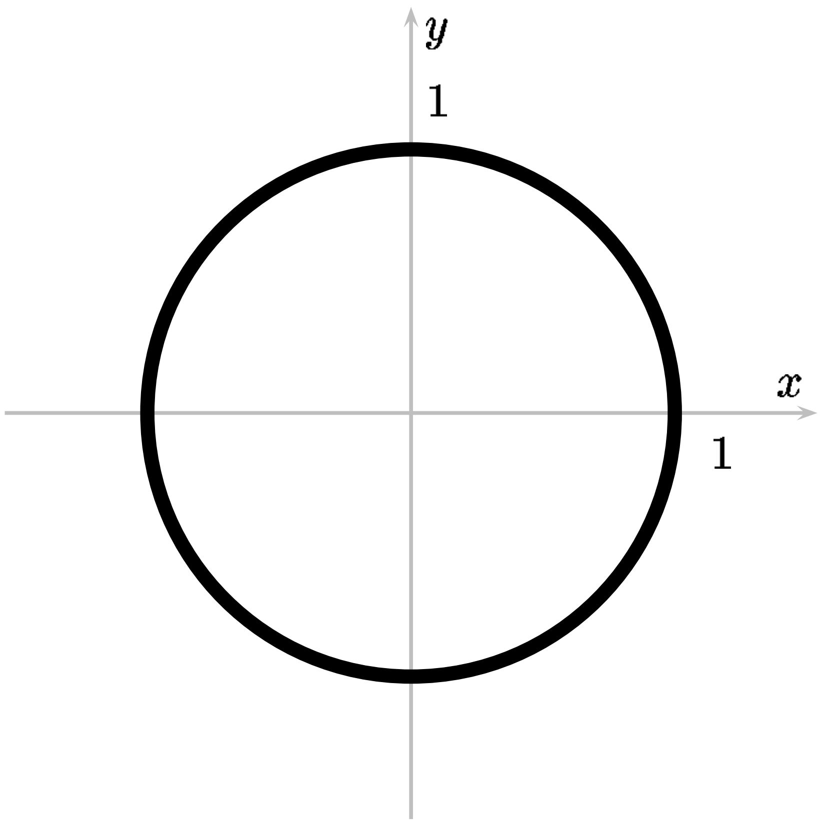
● n **次元球面** $\mathbf{S}^n \quad \subset \quad \mathbf{R}^{n+1}$

: **方程式** $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ **の定める図形**

● n 次元球面 $\mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$

: 方程式 $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ の定める図形

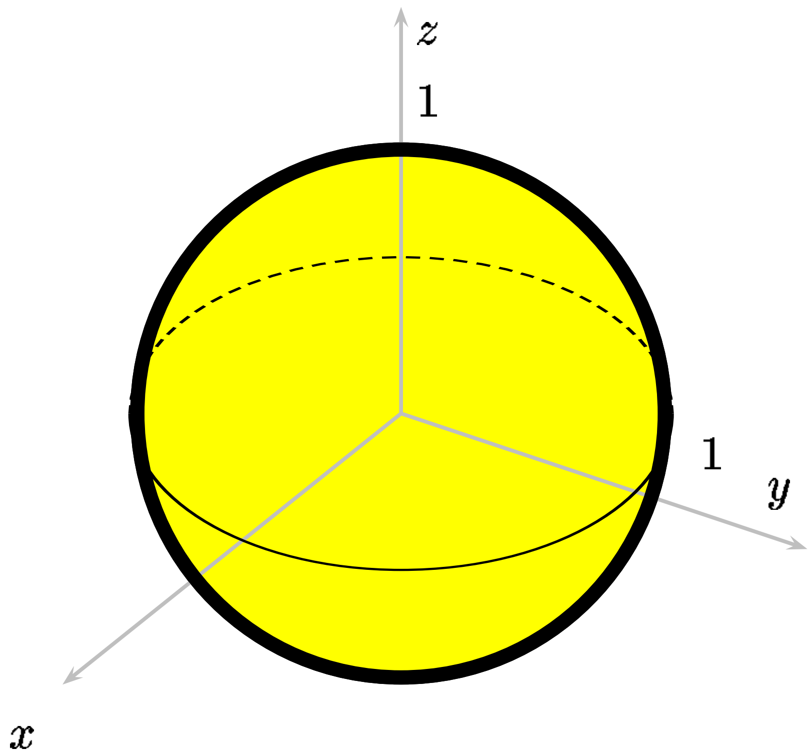
1. $\mathbf{S}^1 =$ 円周 $\quad x^2 + y^2 = 1$



● n 次元球面 $\mathbf{S}^n \quad \subset \quad \mathbf{R}^{n+1}$

: 方程式 $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ の定める図形

2. $\mathbf{S}^2 =$ 球面 $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$



● n 次元球面 $\mathbf{S}^n \quad \subset \quad \mathbf{R}^{n+1}$

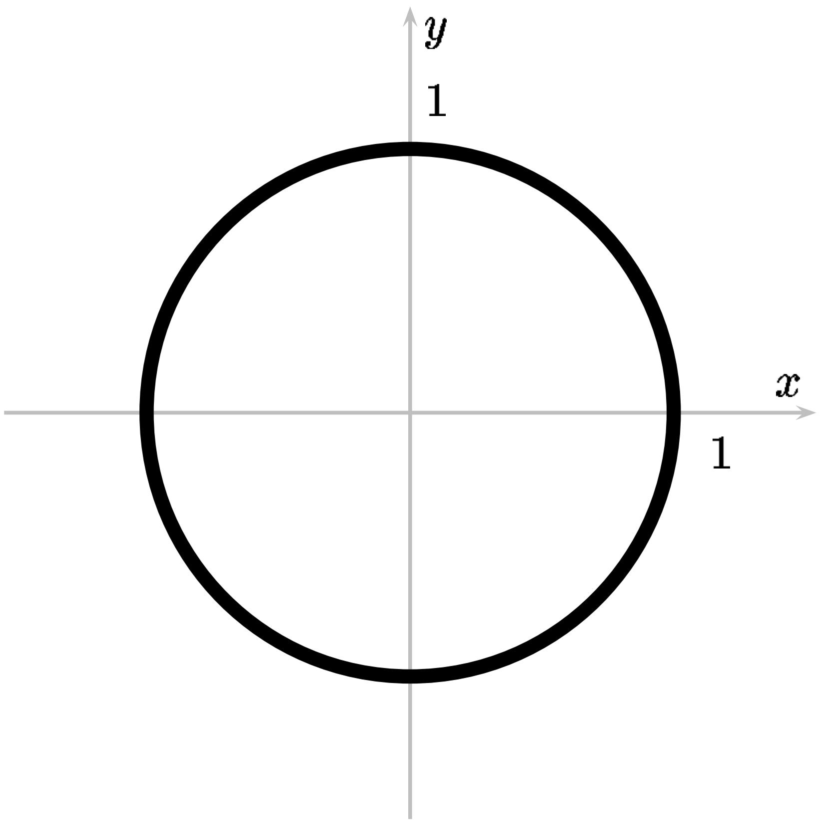
: 方程式 $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ の定める図形

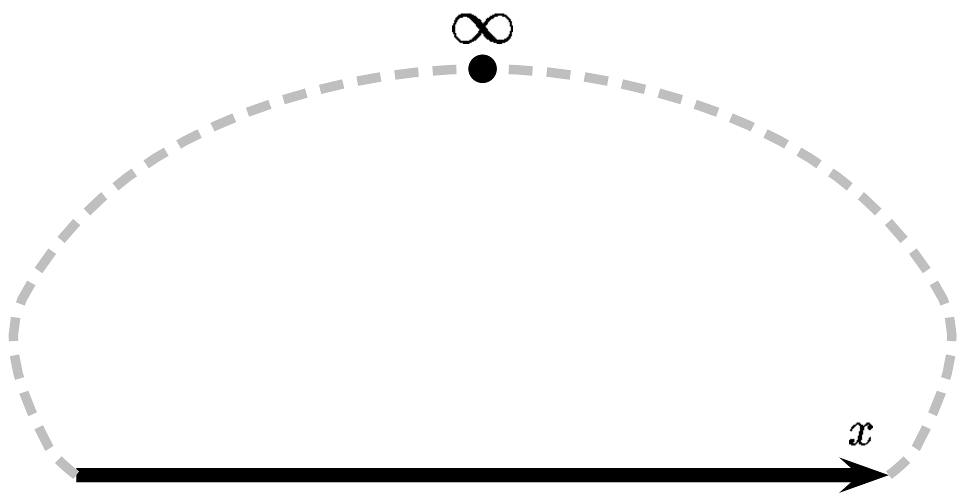
0. $\mathbf{S}^0 =$ 2点 $\quad x^2 = 1$ つまり $x = \pm 1$

球面の別の解釈　$\mathbf{S}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty(\text{無限遠点})\}$

球面の別の解釈　　$\mathbf{S}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty(\text{無限遠点})\}$

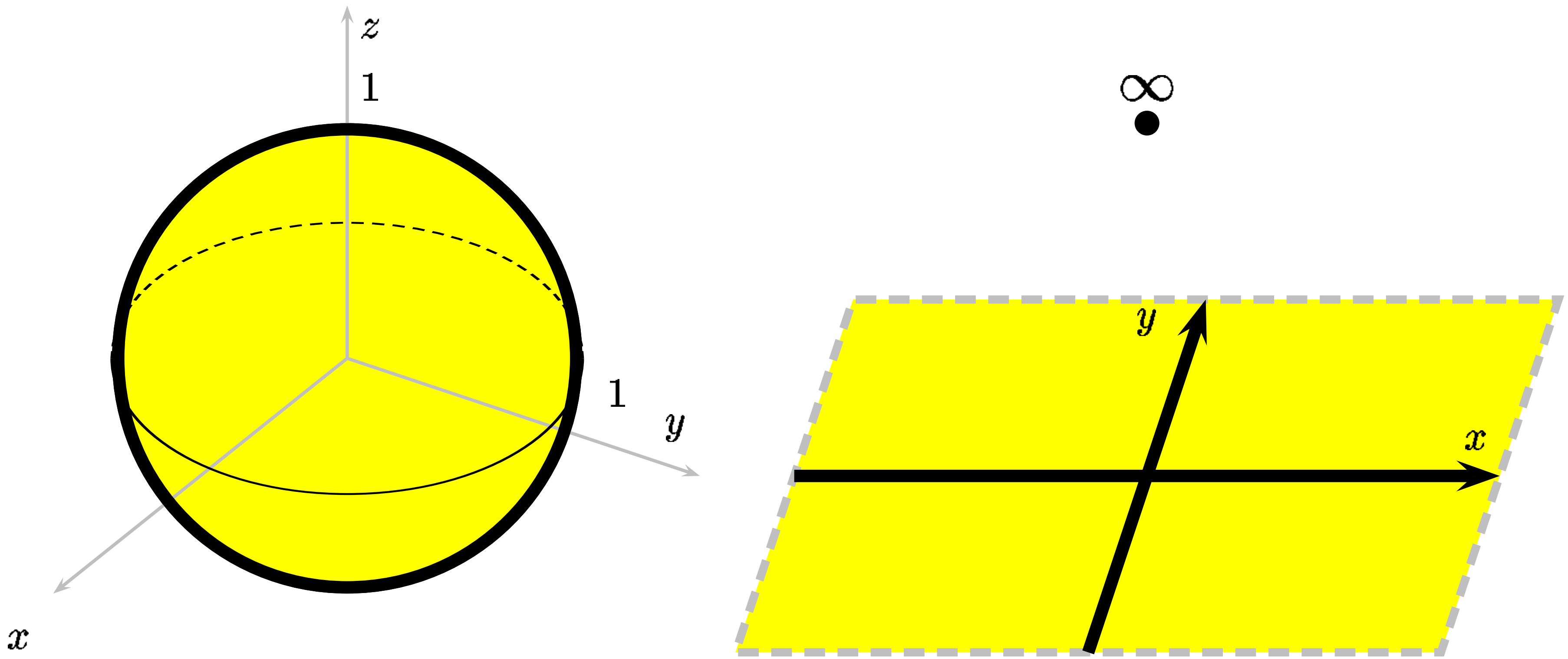
1. $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$





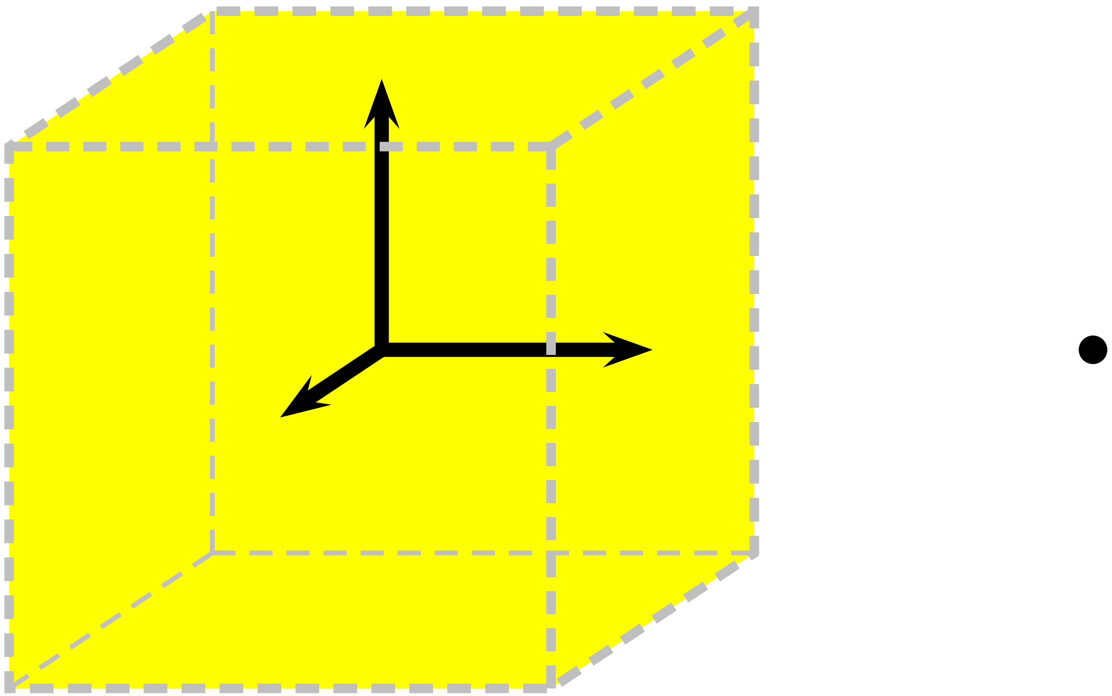
球面の別の解釈　$\mathbf{S}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty(\text{無限遠点})\}$

2. $\mathbf{S}^2 = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$



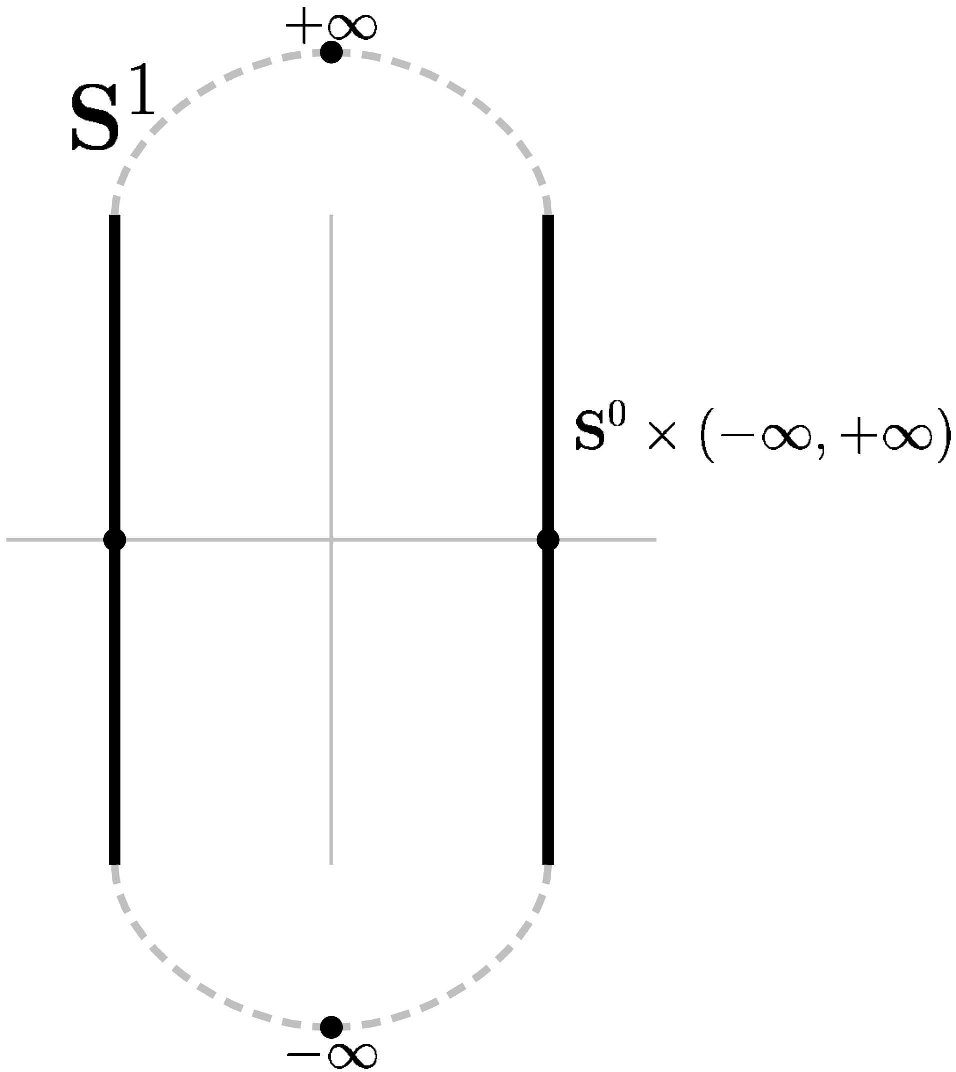
球面の別の解釈　$\mathbf{S}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty(\text{無限遠点})\}$

3. $\mathbf{S}^3 = \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$

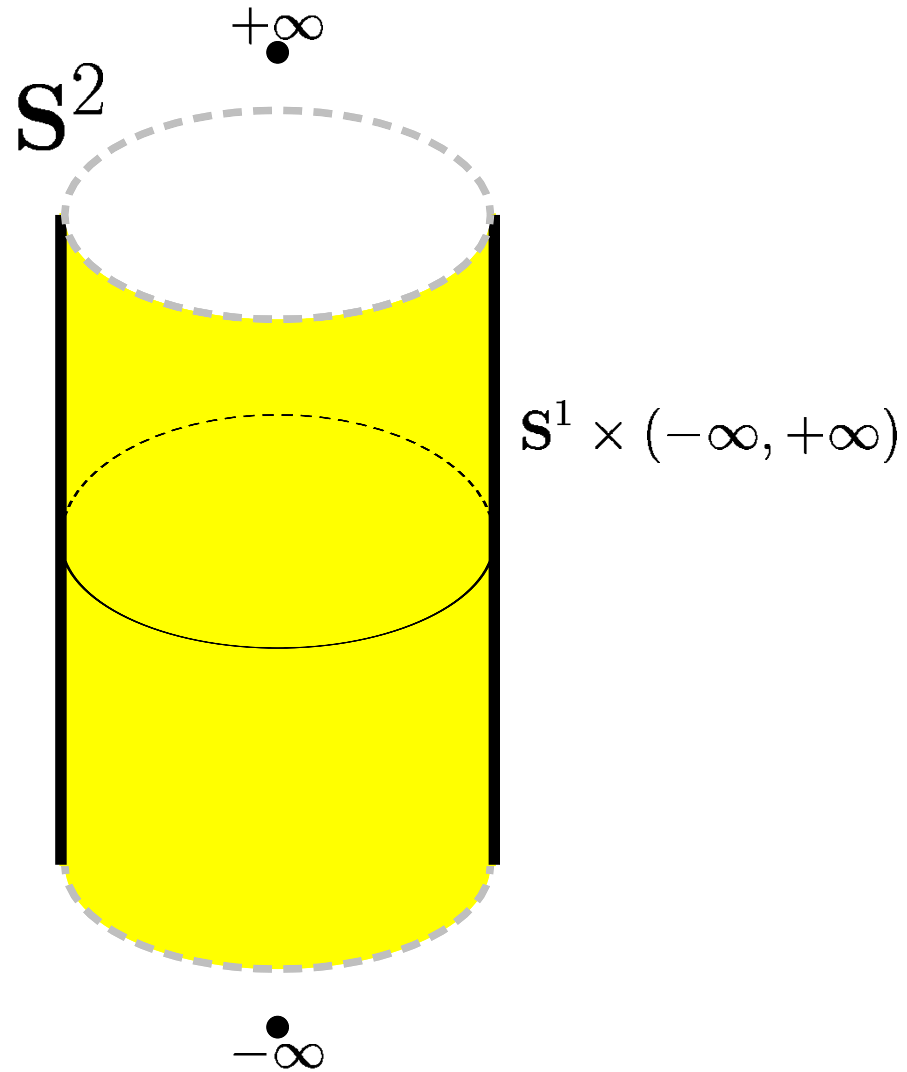


さらに別の解釈　$\mathbf{S}^n = (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}) \cup \{\pm\infty\}$

さらに別の解釈　$\mathbf{S}^n = (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}) \cup \{\pm\infty\}$



さらに別の解釈　$\mathsf{S}^n = (\mathsf{S}^{n-1} \times \mathsf{R}) \cup \{\pm\infty\}$



さらに別の解釈　$\mathbf{S}^n = (\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}) \cup \{\pm\infty\}$

$$\mathbf{S}^3 = (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}) \cup \{\pm\infty\}$$

昨年度のゼミ生（田村・難波）の発表より……

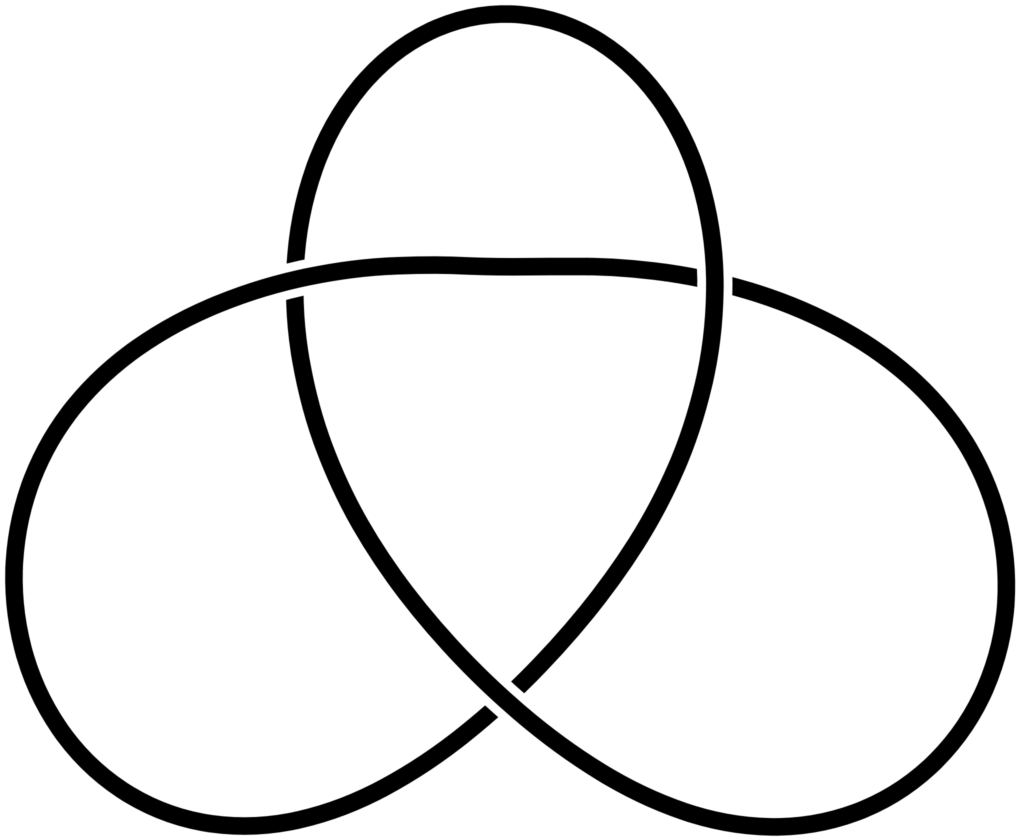
3. 結び目の補空間

結び目とは・・・

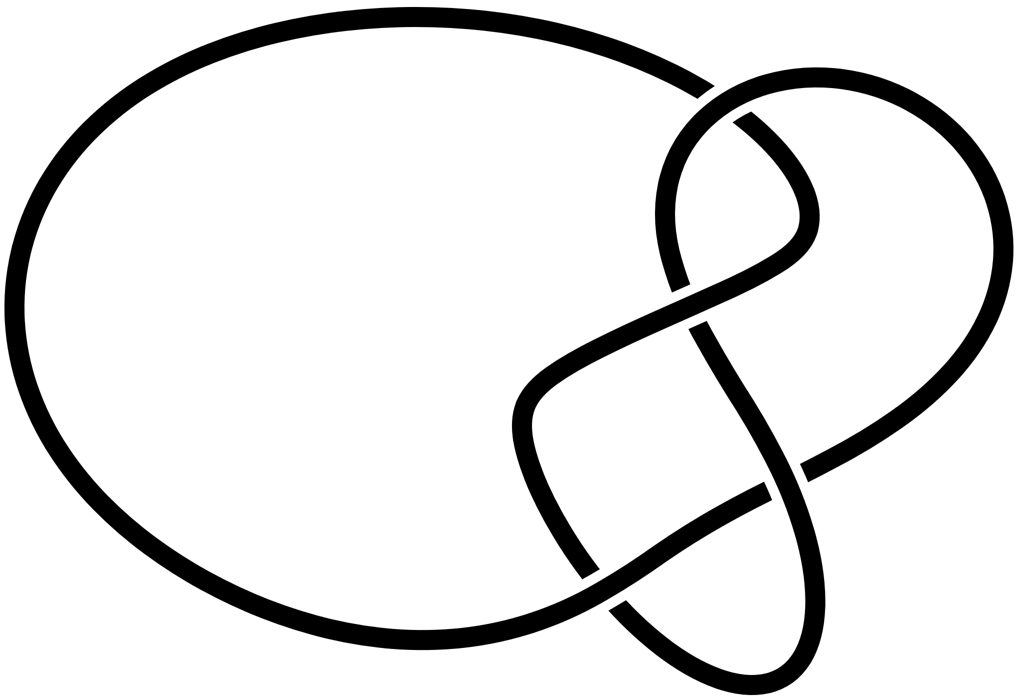
結び目とは・・・

三次元球面 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$

の単純閉曲線 K のこと



三葉結び目



８の字結び目

1970 年代、Thurston は８の字結び目 K の補空間 $\mathrm{S}^3 - K$ がふたつの理想三単体（四面体から４つの頂点を取り除いたもの）を貼り合わせたものになっていることを観察した (以下で紹介)。これにより補空間が「双曲構造」（曲率 -1 の幾何構造）を持つことがわかる。

一方、三葉結び目の補空間は双曲構造を持たない。

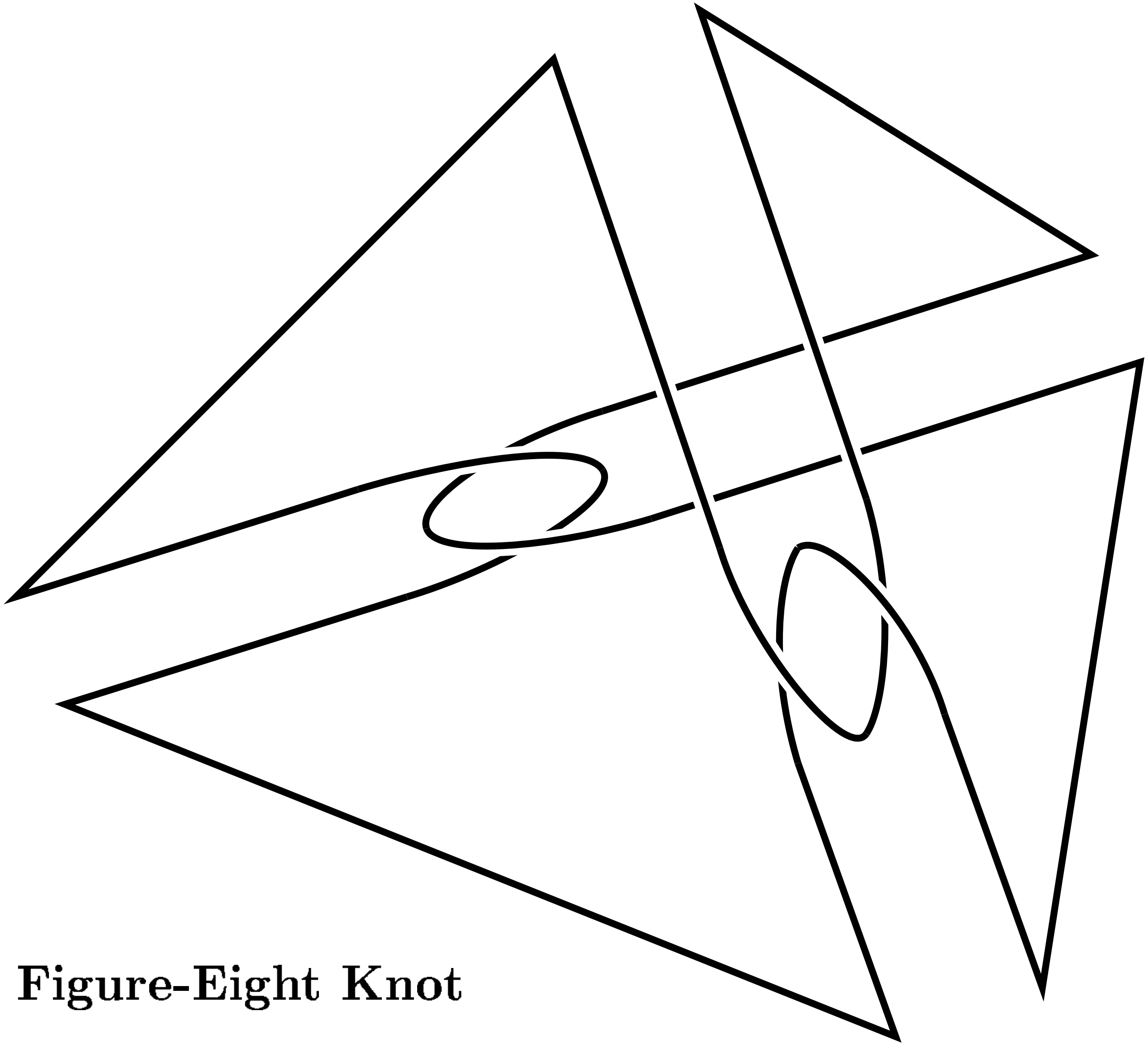


Figure-Eight Knot

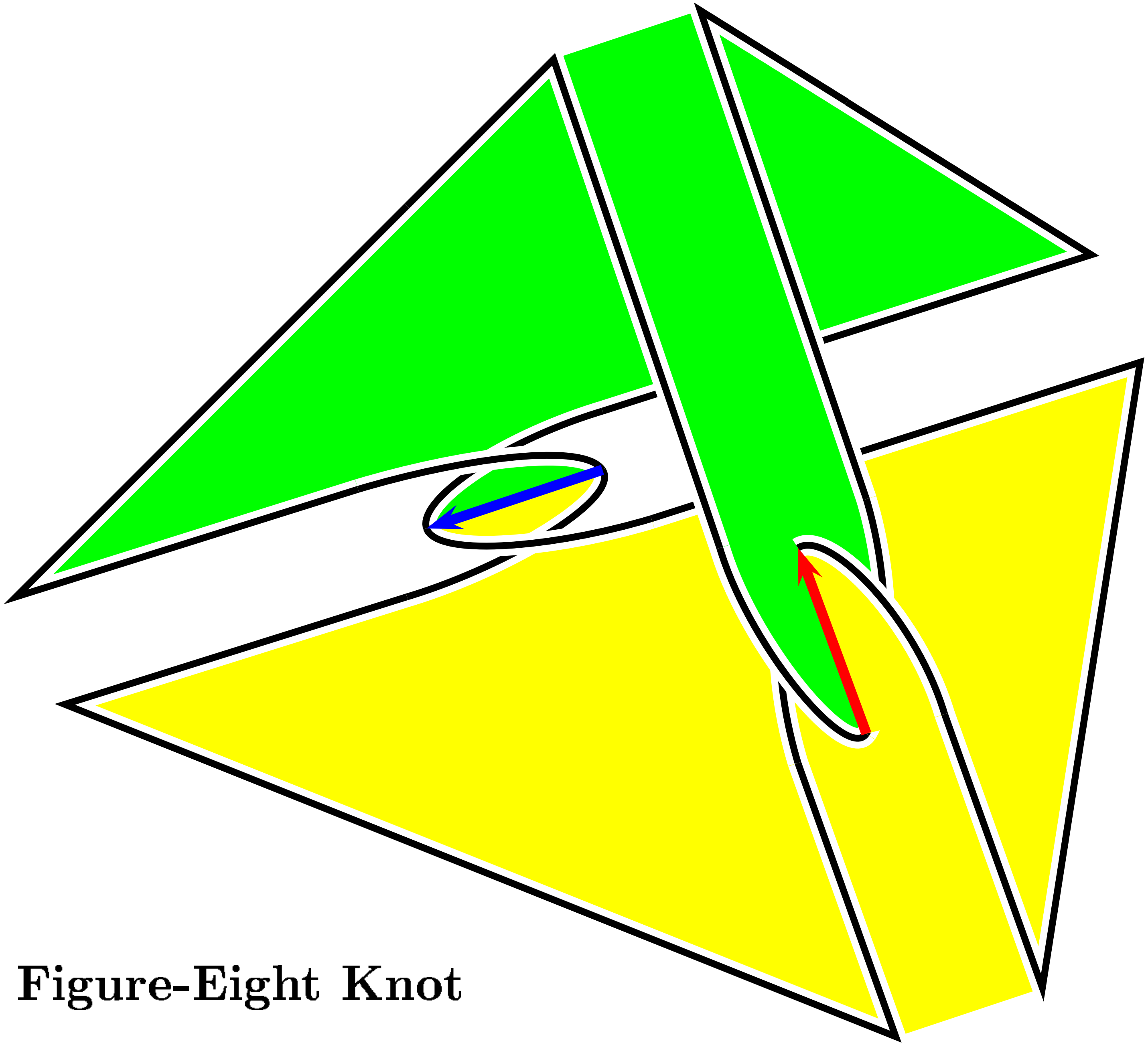


Figure-Eight Knot

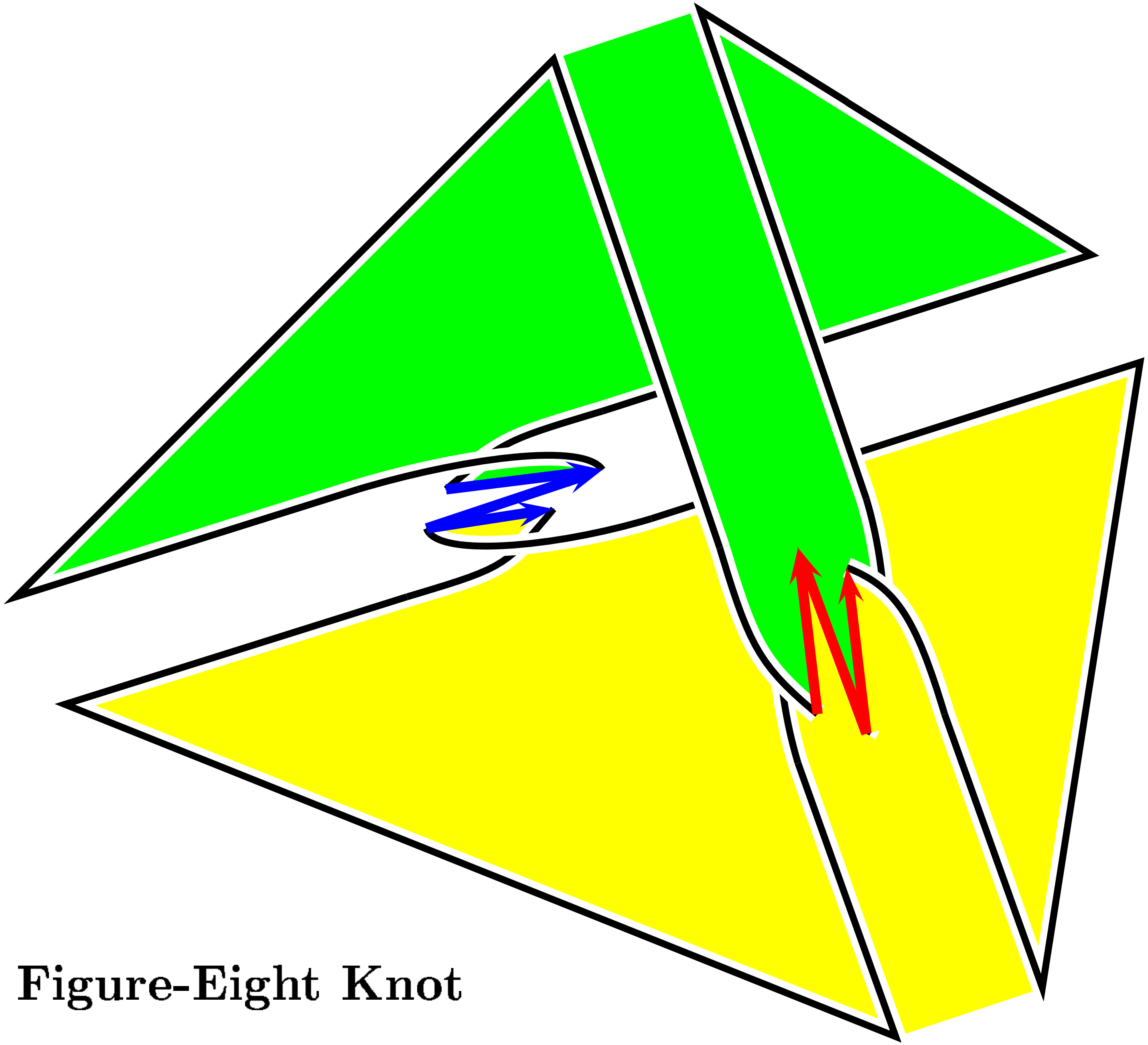


Figure-Eight Knot

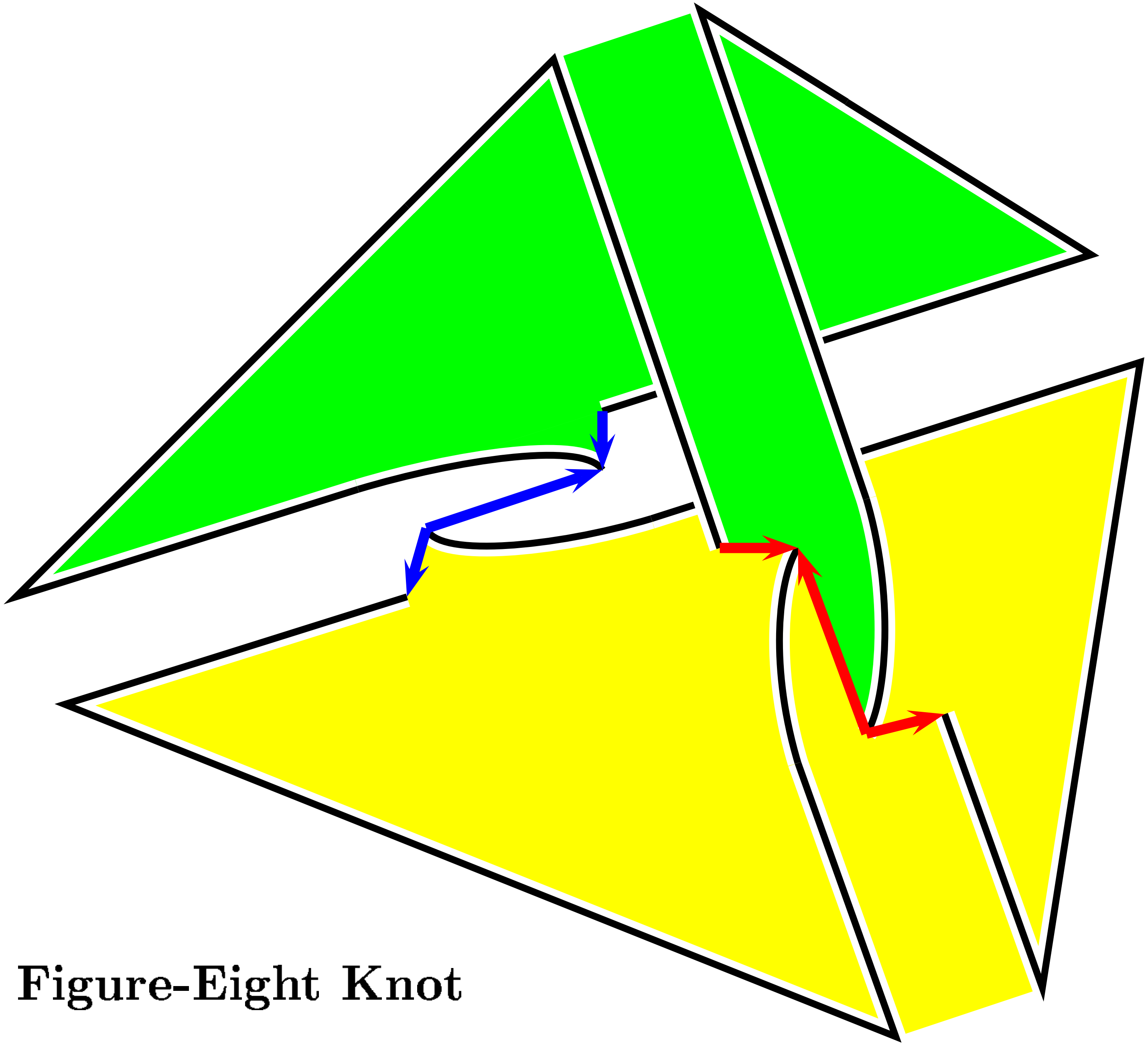
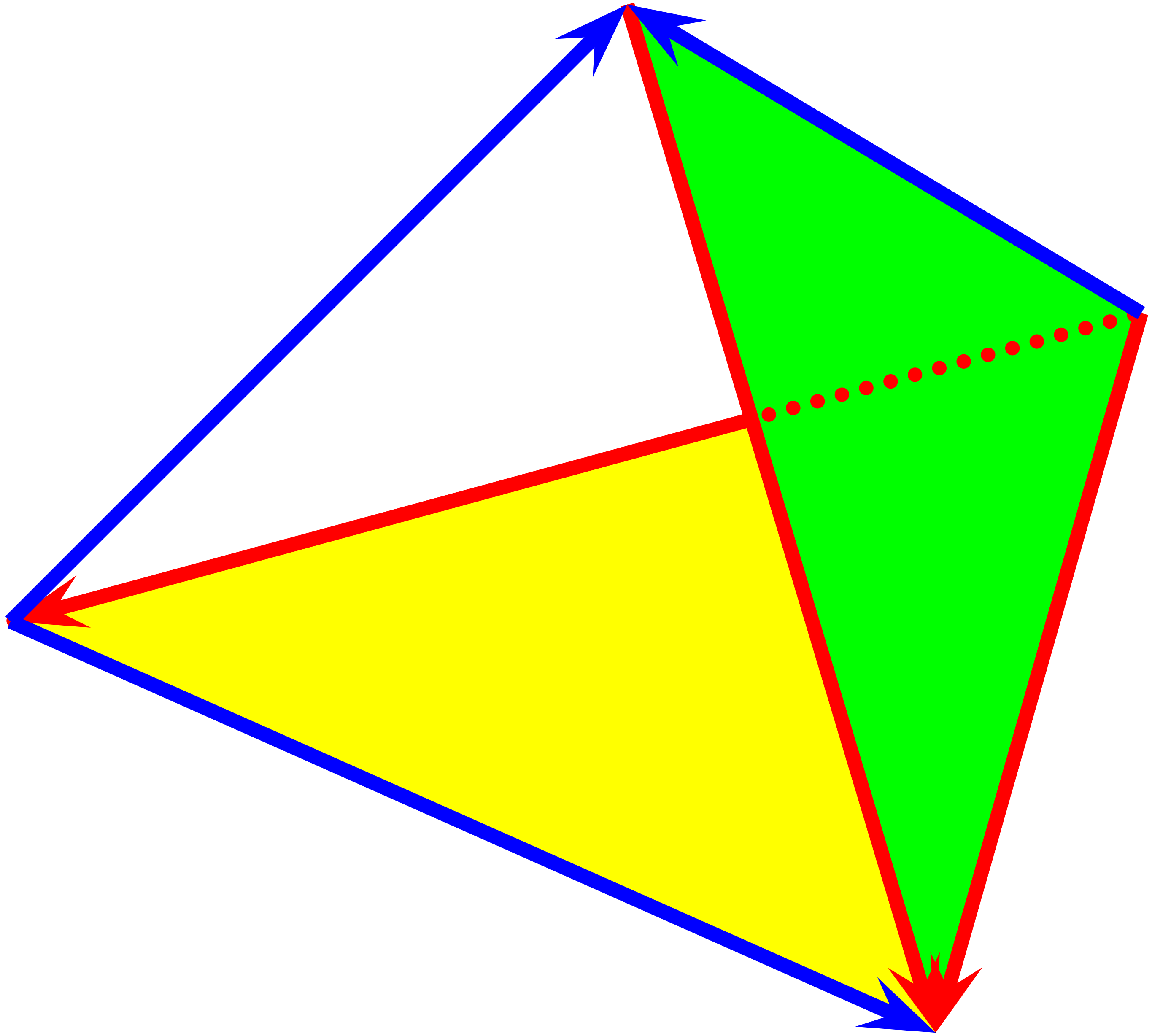
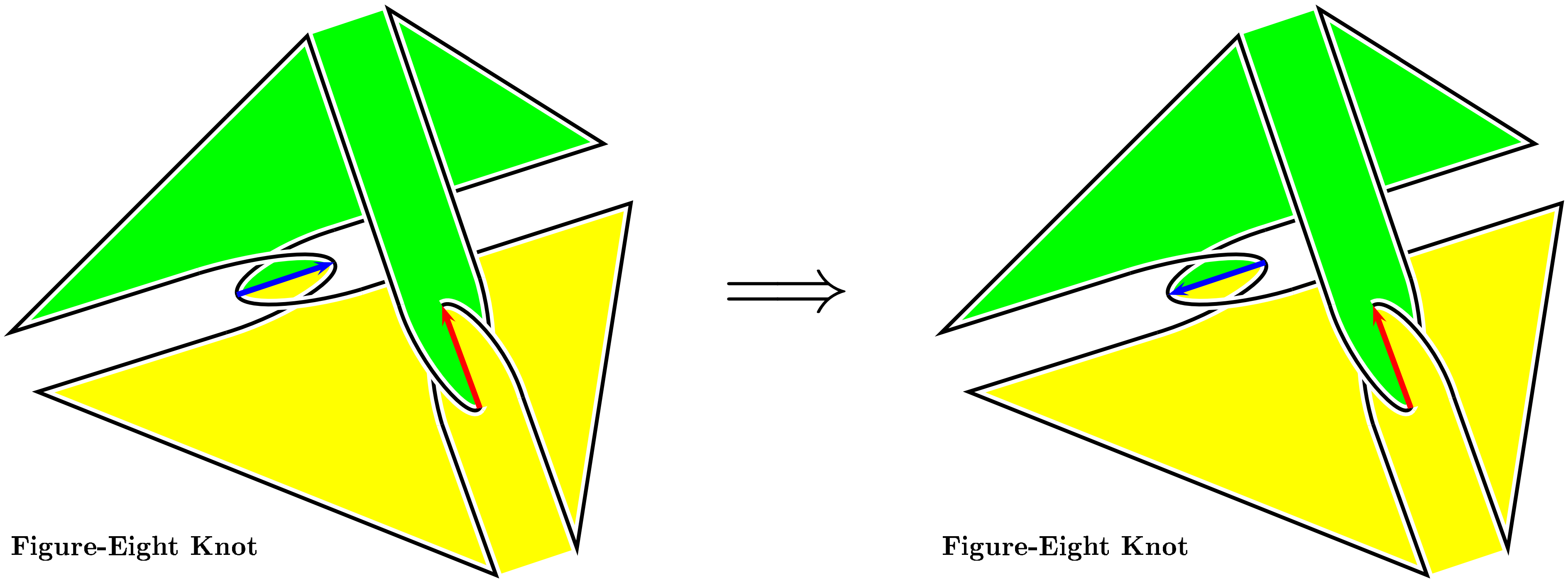


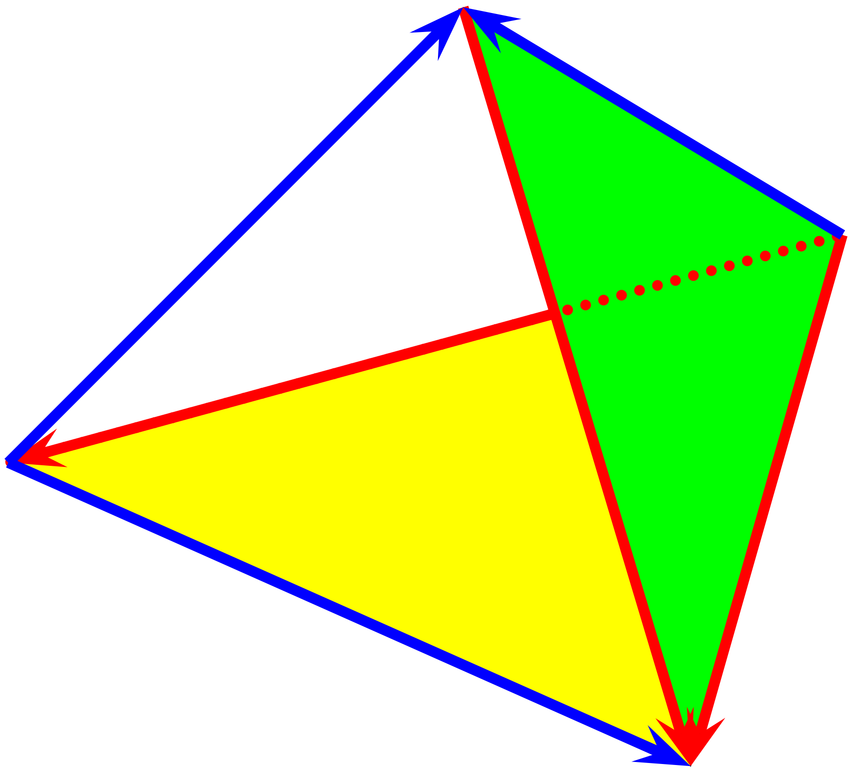
Figure-Eight Knot



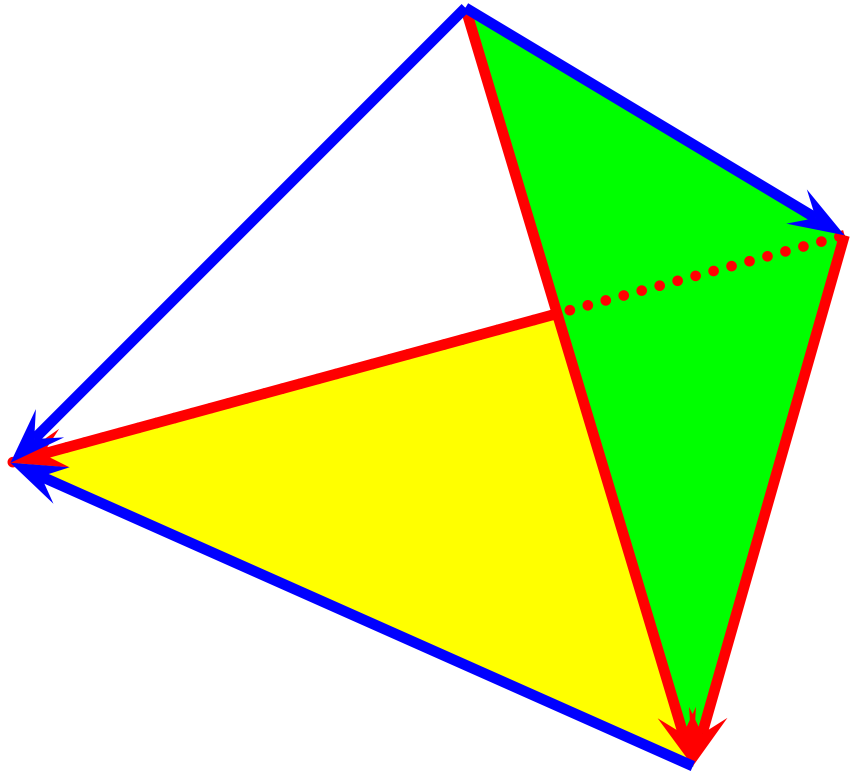
外側を観察するには、膜を裏返す必要がある。
このとき青い矢印の向きが変わる。



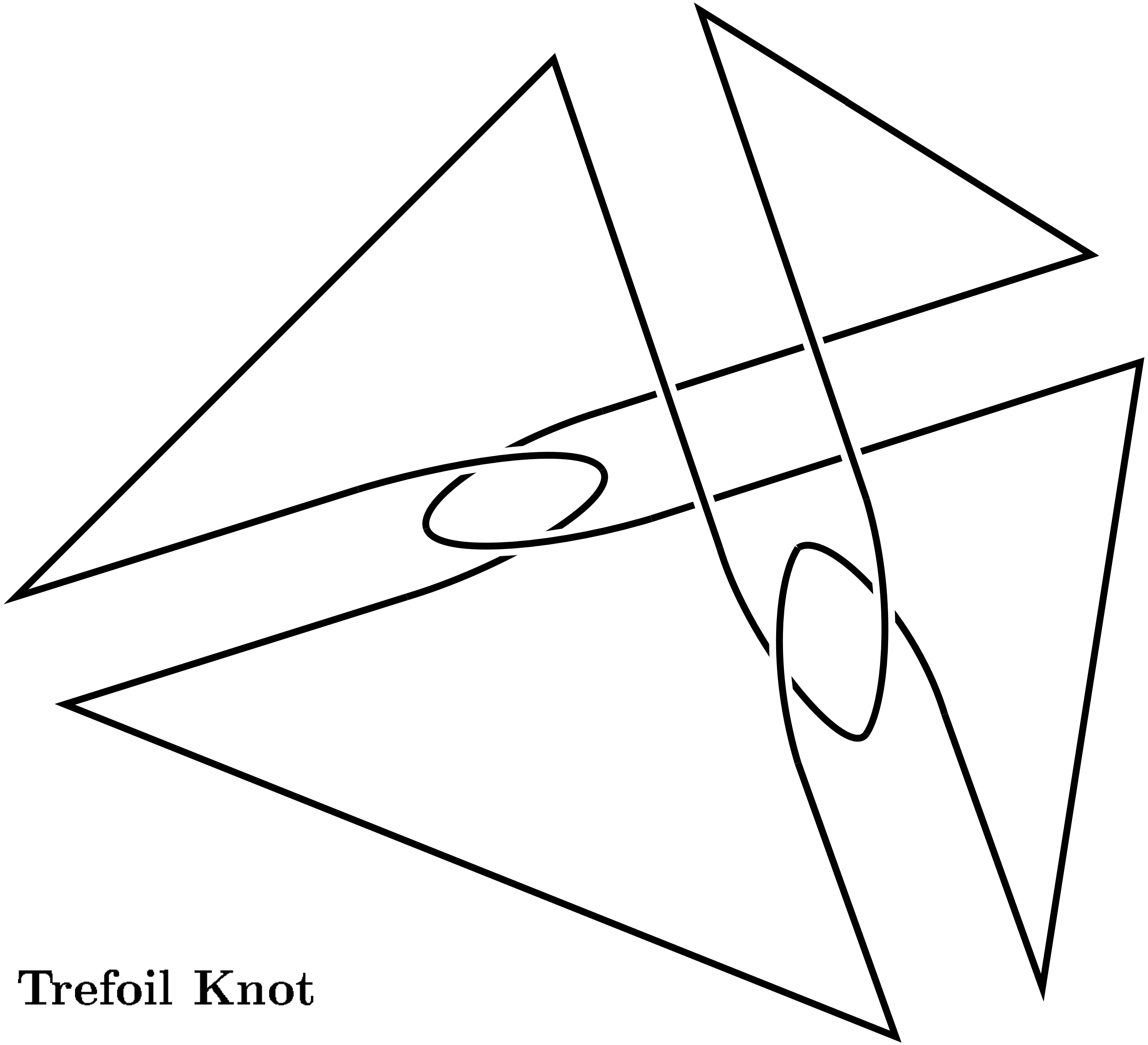
８の字結び目の補空間の分割：



内側



外側



Trefoil Knot

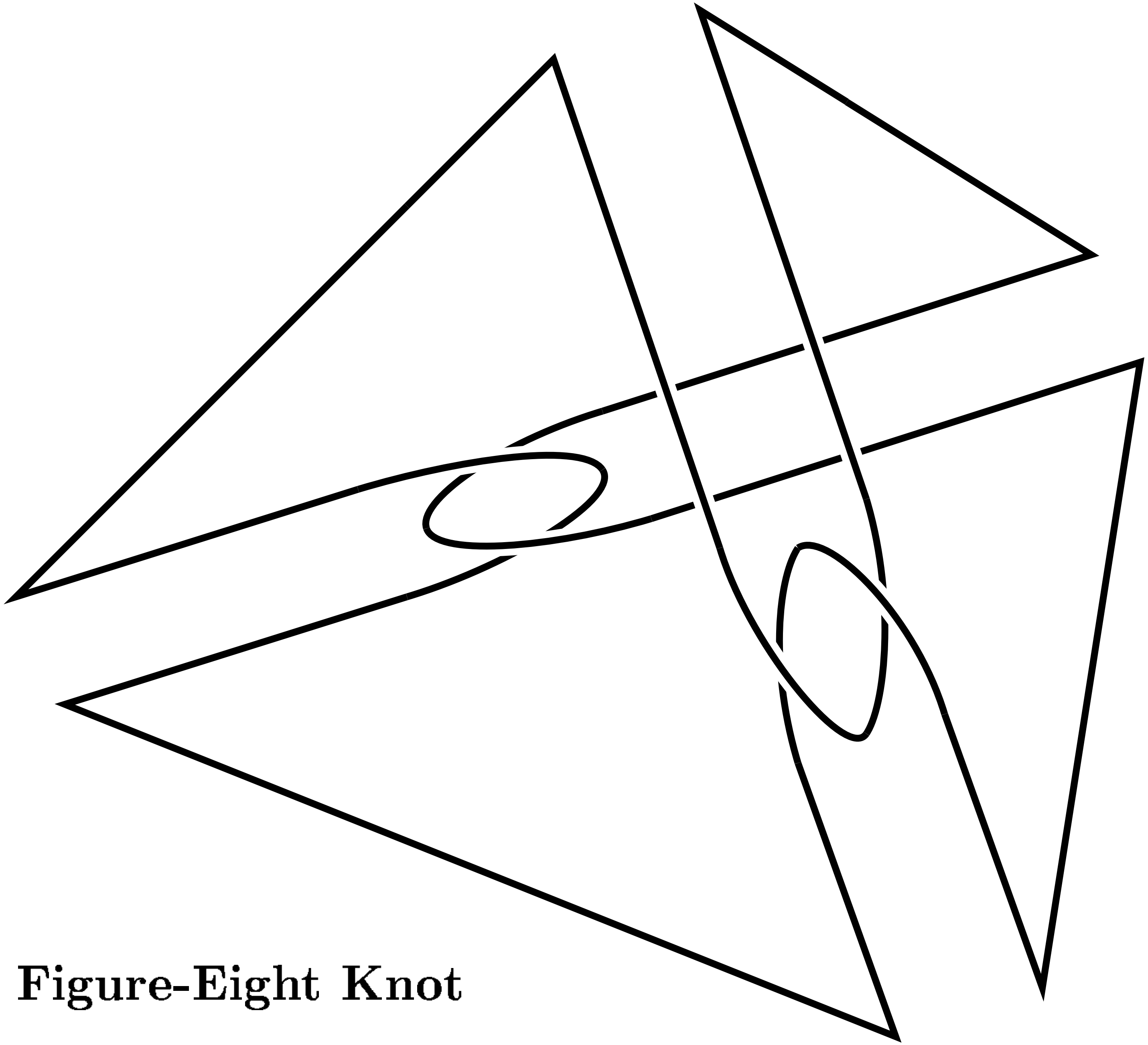
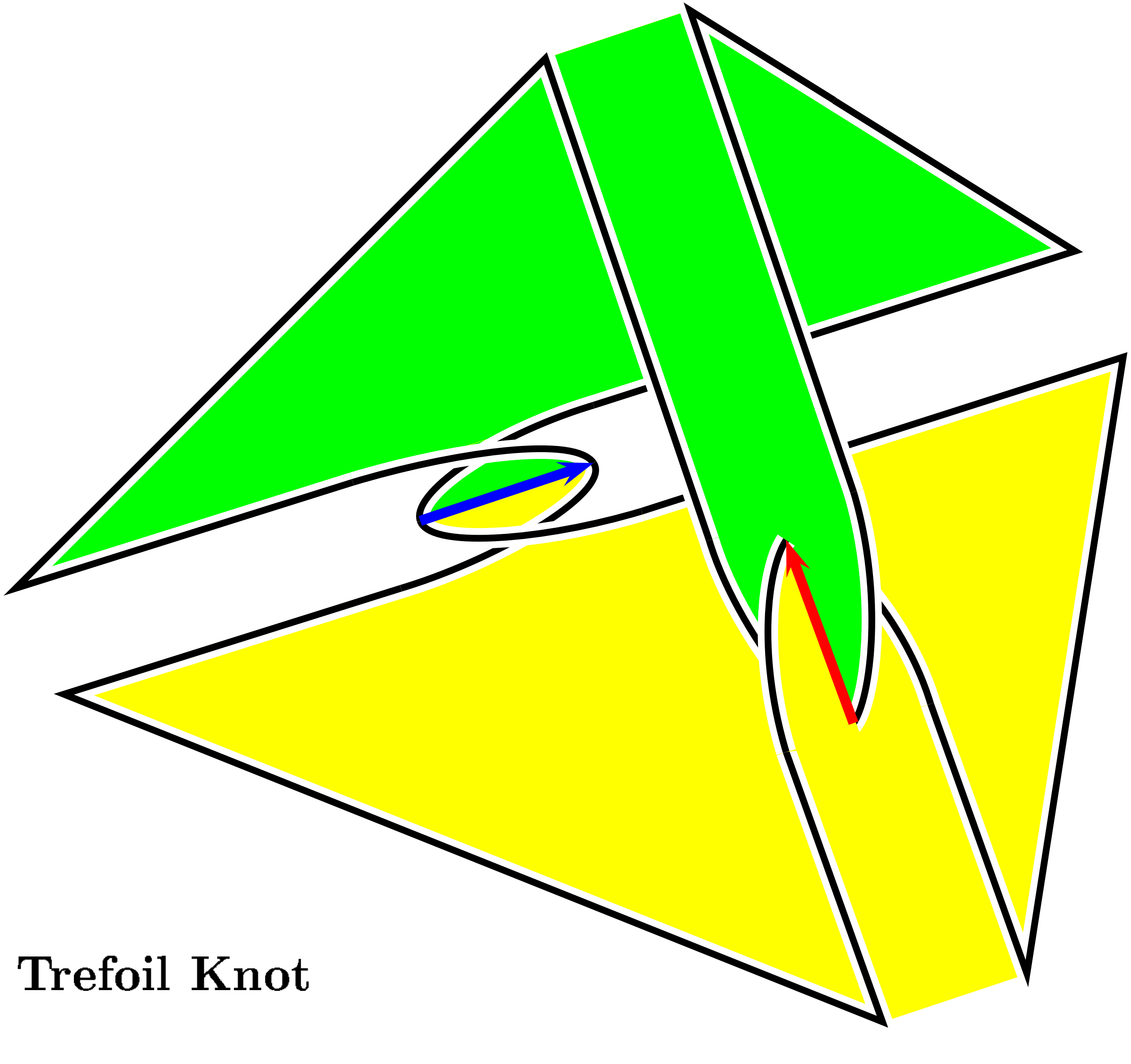
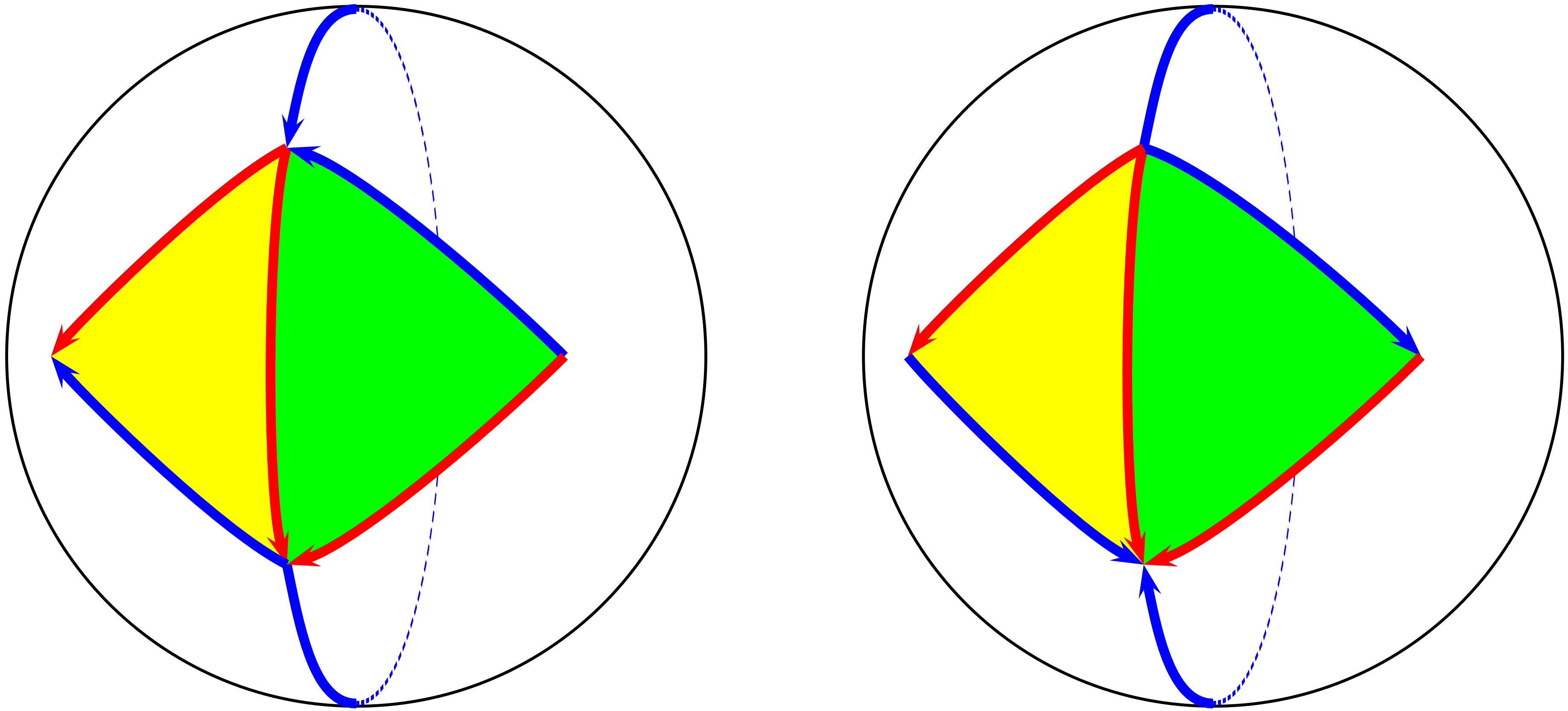


Figure-Eight Knot



Trefoil Knot

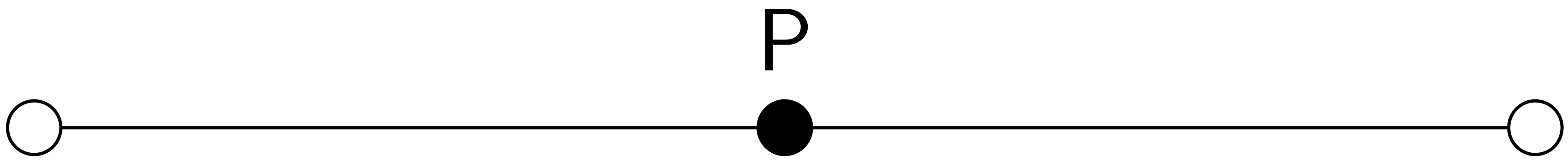
三葉結び目の補空間は次のふたつの理想３胞体に分割できることがわかった：



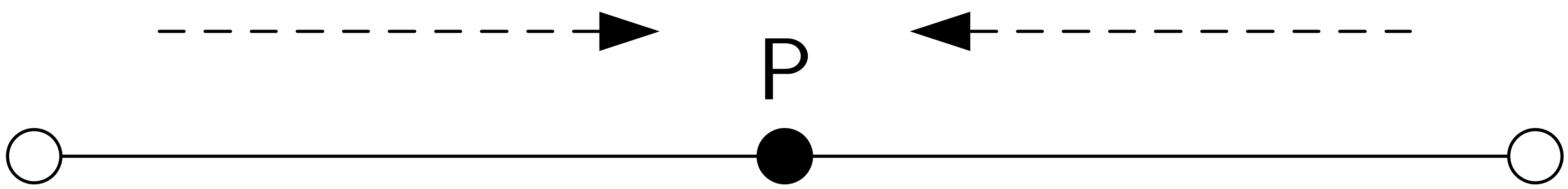
補空間の分割から

“ よい双対脊柱 ” を構成する

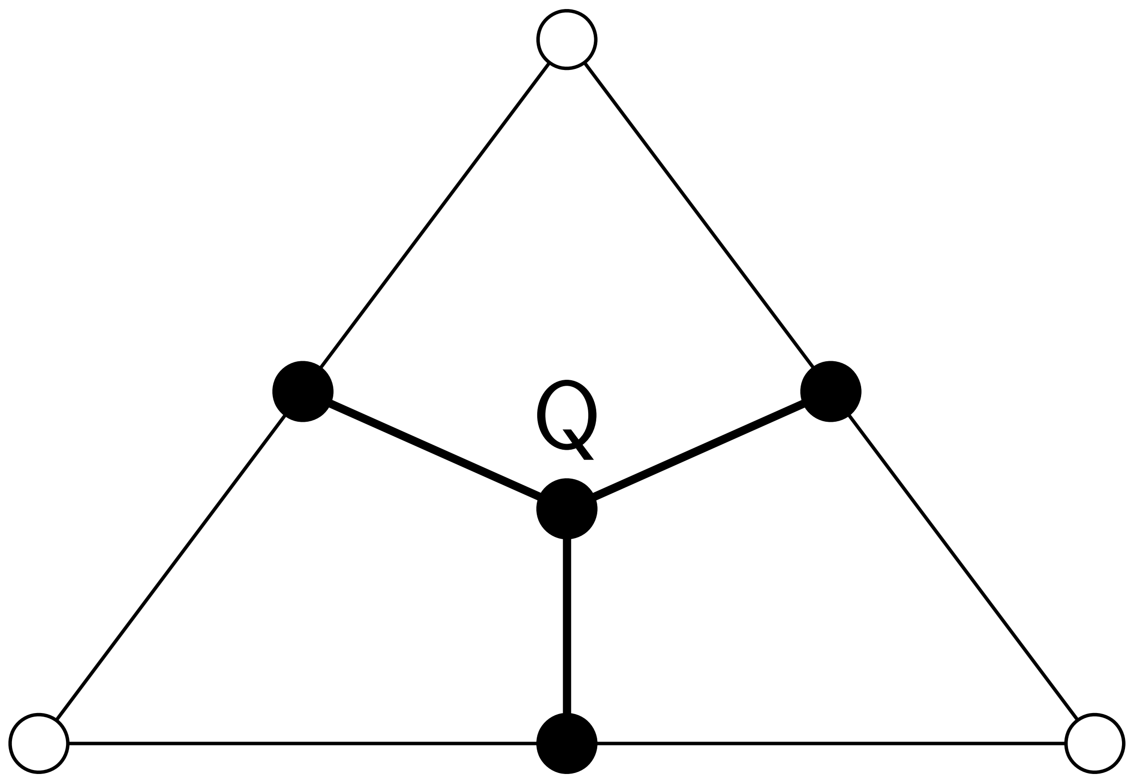
理想１単体の双対脊柱



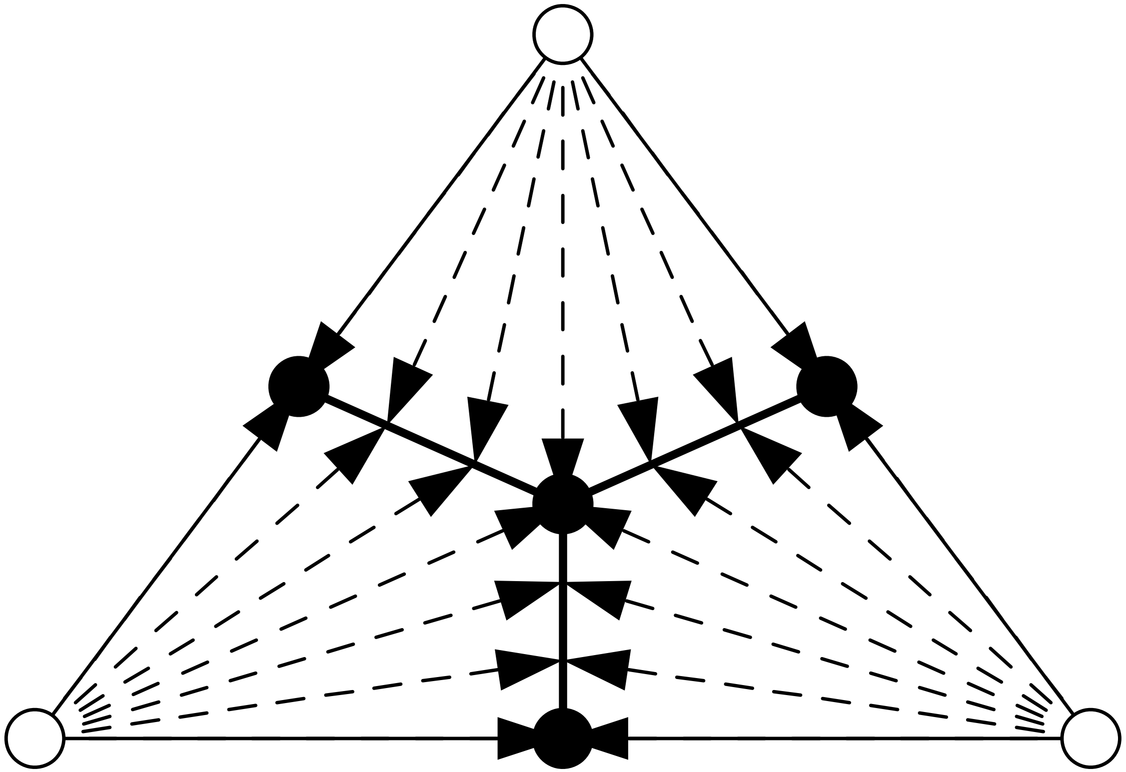
理想１単体の双対脊柱



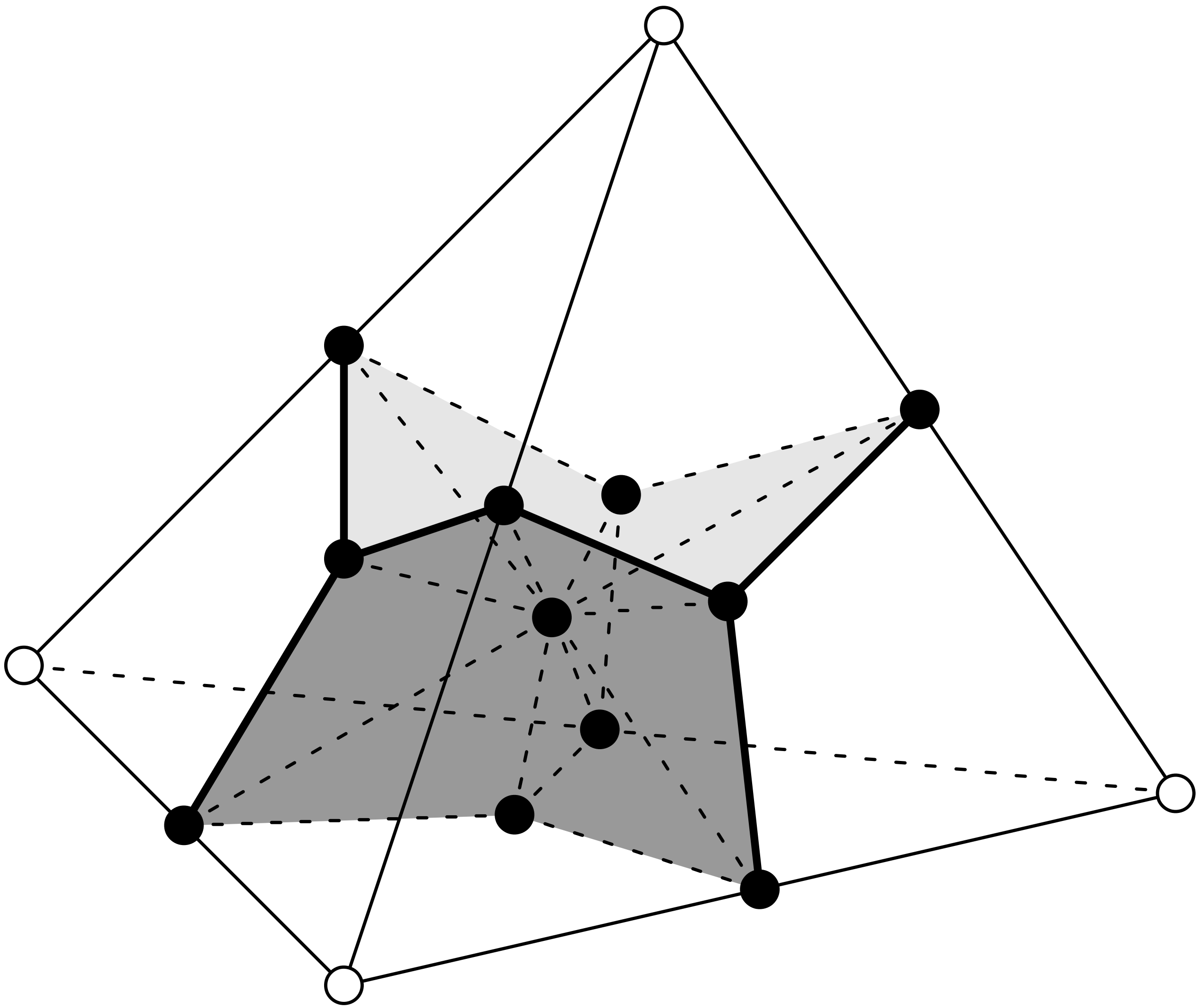
理想２単体の双対脊柱



理想２単体の双対脊柱



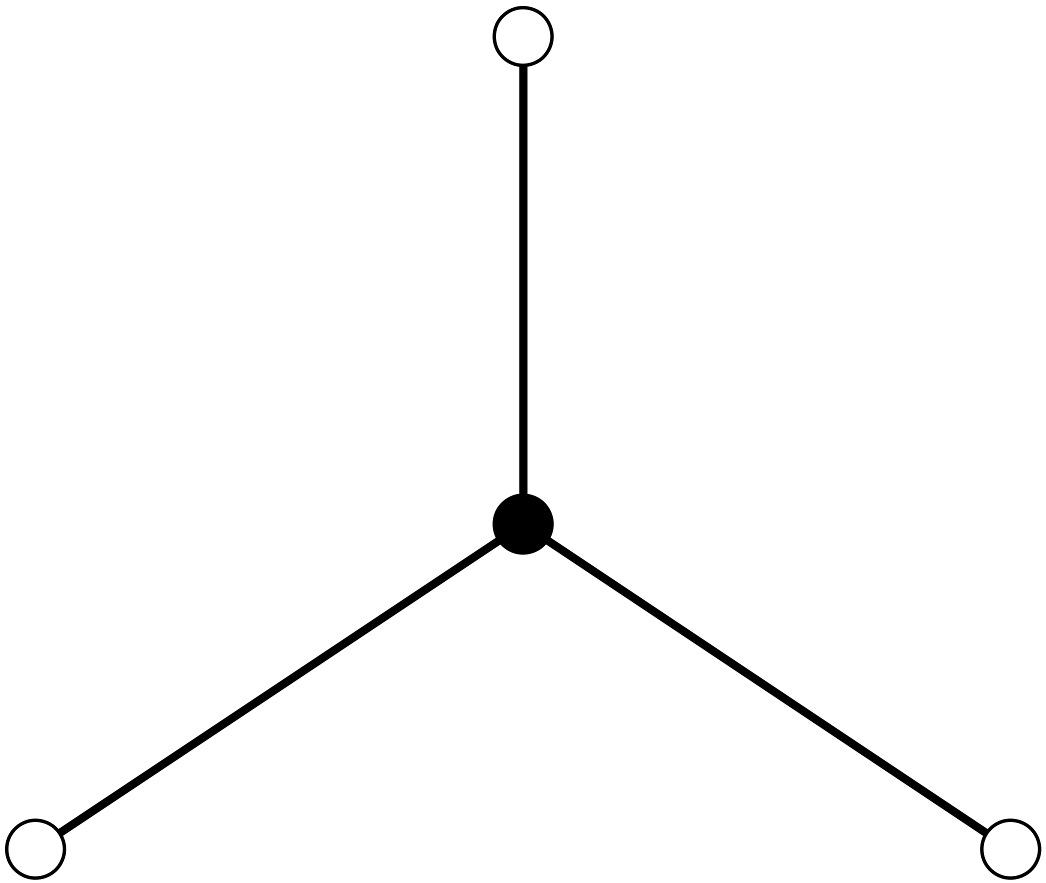
理想３単体の双対脊柱



理想３胞体への分割の場合も

ほとんど同様

$\mathbf{S}^3 - K$ を双対脊柱 X へつぶす写像による各点の逆像は半開区間たちの端点での和：



“よい” 脊柱

一般の結び目 K に対し、S^3 における K の管状近傍を $N(K)$ とし、四次元の図形 $M(K)$ を次のように定める：

$$M(K) = \partial((\mathsf{S}^3 - intN(K)) \times \mathsf{D}^2)$$

一般の結び目 K に対し、S^3 における K の管状近傍を $N(K)$ とし、四次元の図形 $M(K)$ を次のように定める：

$$M(K) = \partial((\mathsf{S}^3 - intN(K)) \times \mathsf{D}^2)$$

$\mathsf{S}^3 - K$ のよい脊柱の存在

$\Longrightarrow M(K)$ の手術障害類理論の成立

(Hegenbarth-Repovš)

以上の結果を一般の結び目に拡張しよう……

以上の結果を一般の結び目に拡張しよう……

横田さんの主張：

任意の結び目 K に対し、補空間 $\mathrm{S}^3 - K$ は有限個の（必ずしも双曲的ではない）理想四面体に分割できる。

以上の結果を一般の結び目に拡張しよう……

横田さんの主張：

任意の結び目 K に対し、補空間 $\mathrm{S}^3 - K$ は有限個の（必ずしも双曲的ではない）理想四面体に分割できる。

……この論文が読みにくい

ぼくにはよくわからない

しかしわかるところをつないで考えると、次のことは少なくとも正しい：

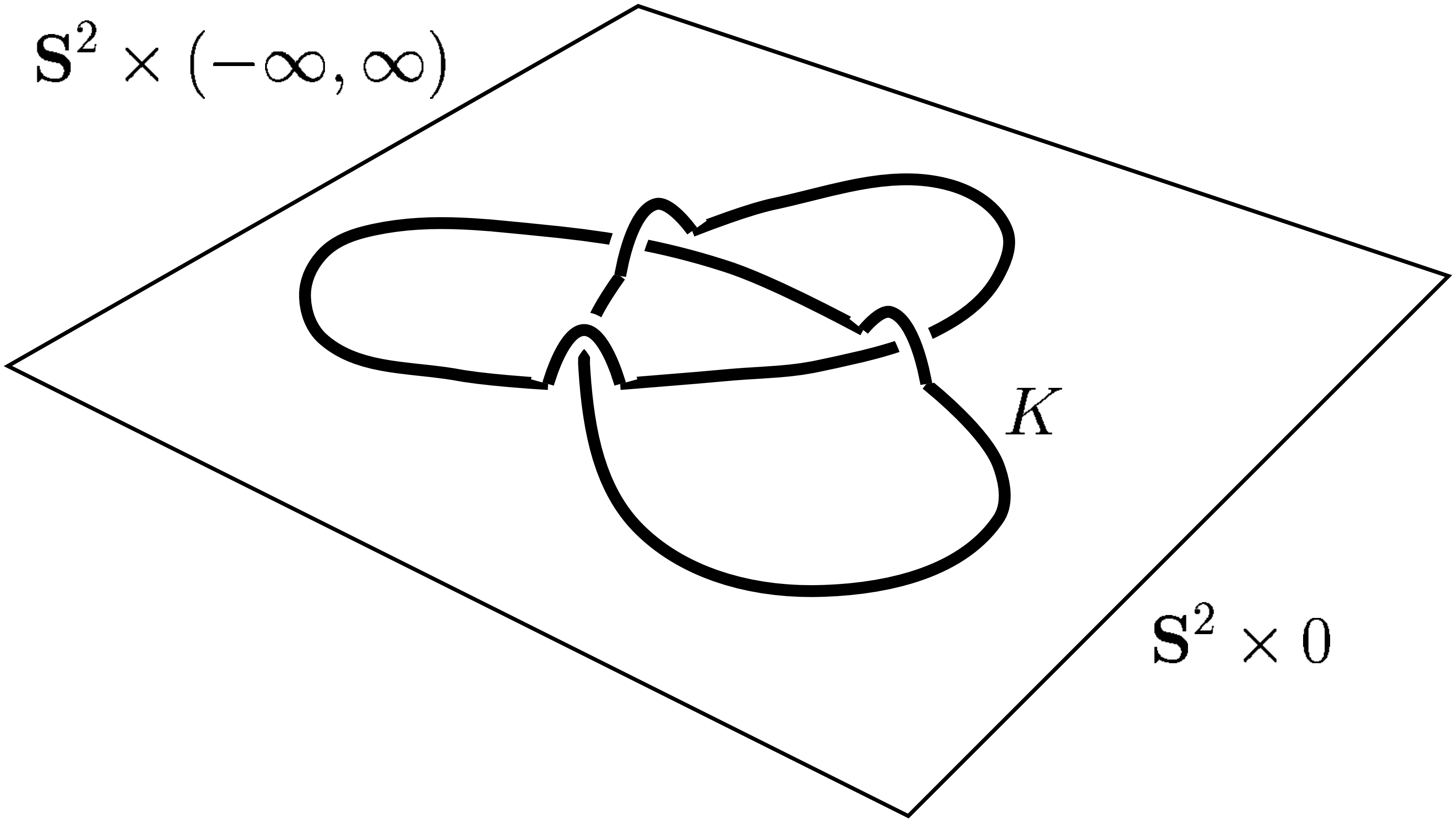
任意の結び目 K に対し、補空間 $\mathrm{S}^3 - K$ は有限個の理想三胞体に分割できる。

しかしわかるところをつないで考えると、次のことは少なくとも正しい：

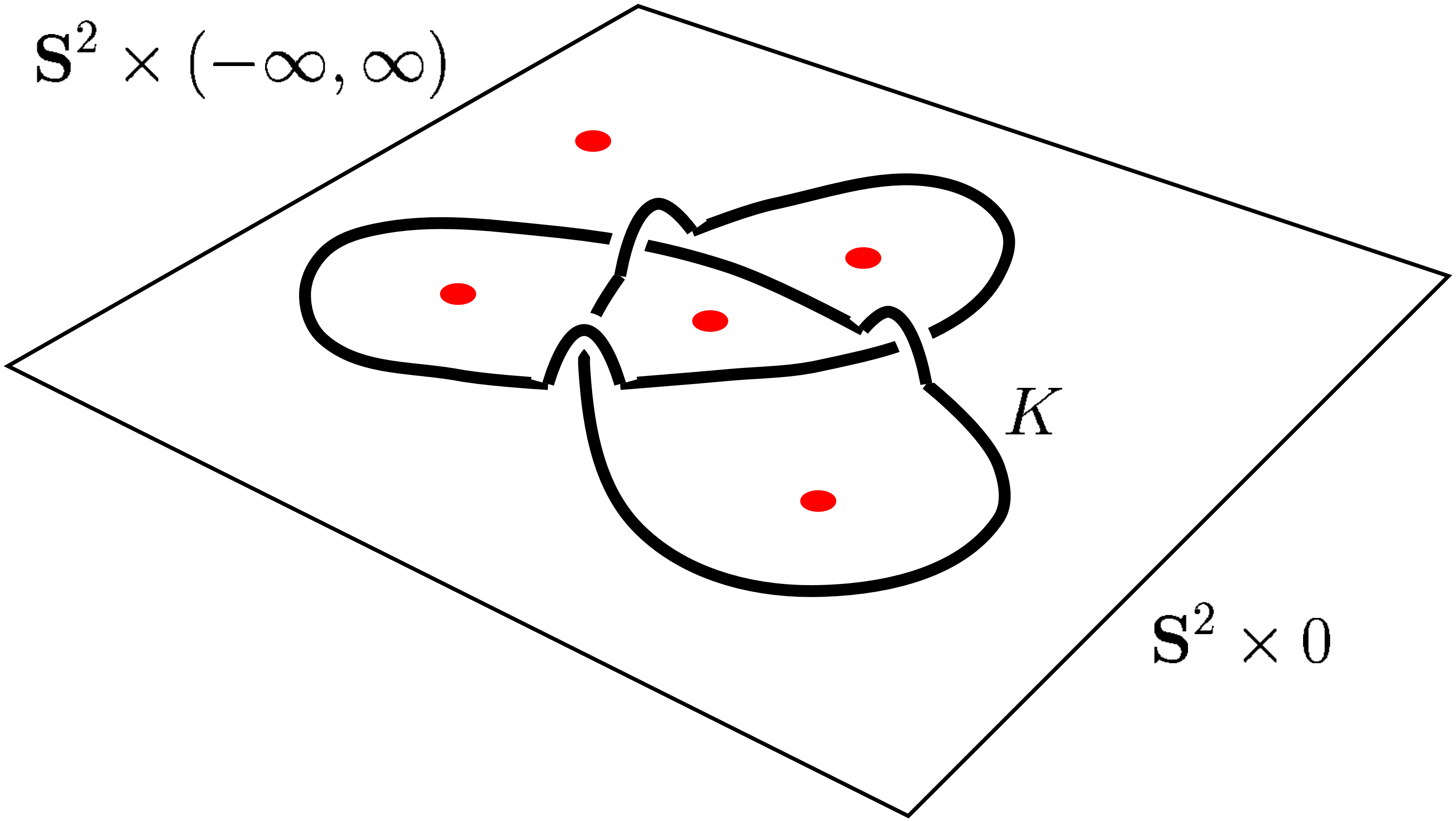
$\boxed{\text{任意の結び目 } K \text{ に対し、補空間 } \mathrm{S}^3 - K \text{ は有限個の理想三胞体に分割できる。}}$

我々の目的には、これで十分！！

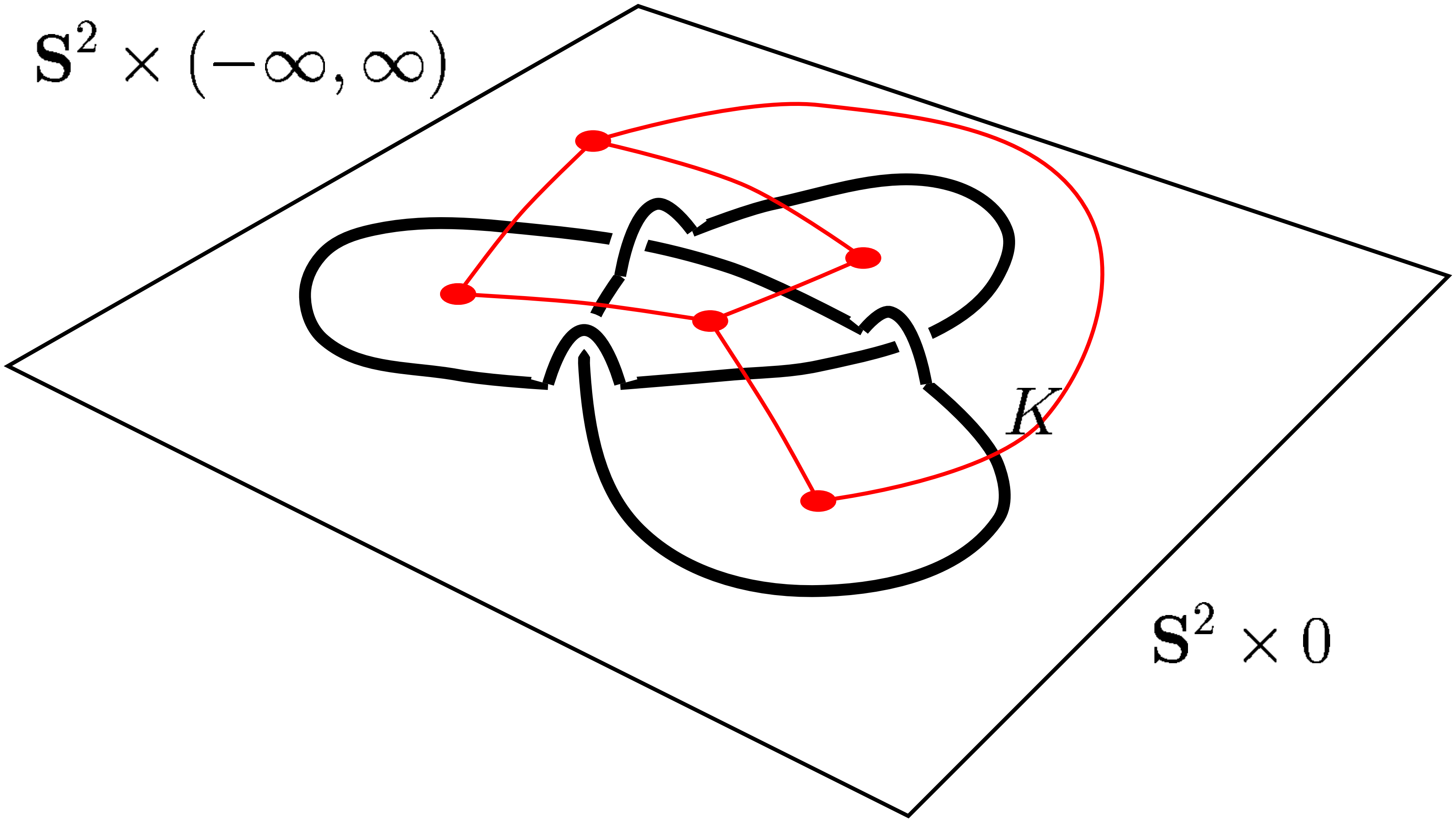
S^3 を $\mathsf{S}^2 \times (-\infty, \infty) \cup \{\pm\infty\}$ と同一視し、
K は $\mathsf{S}^2 \times 0$ に集まっているとする。



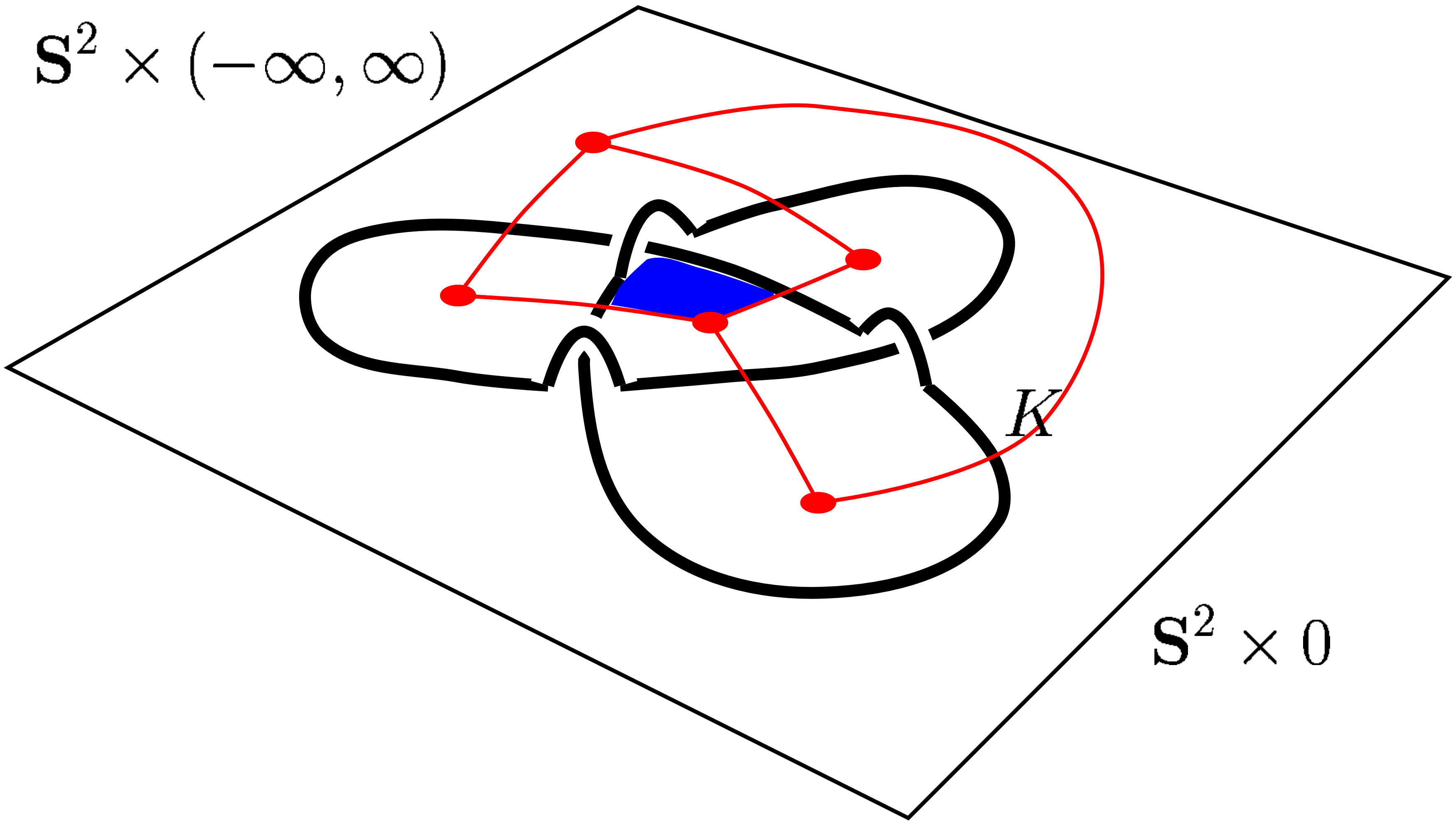
$\mathbf{S}^2 \times 0$ がいくつかの領域に分かれるので、
おのおのから点をひとつずつとる。



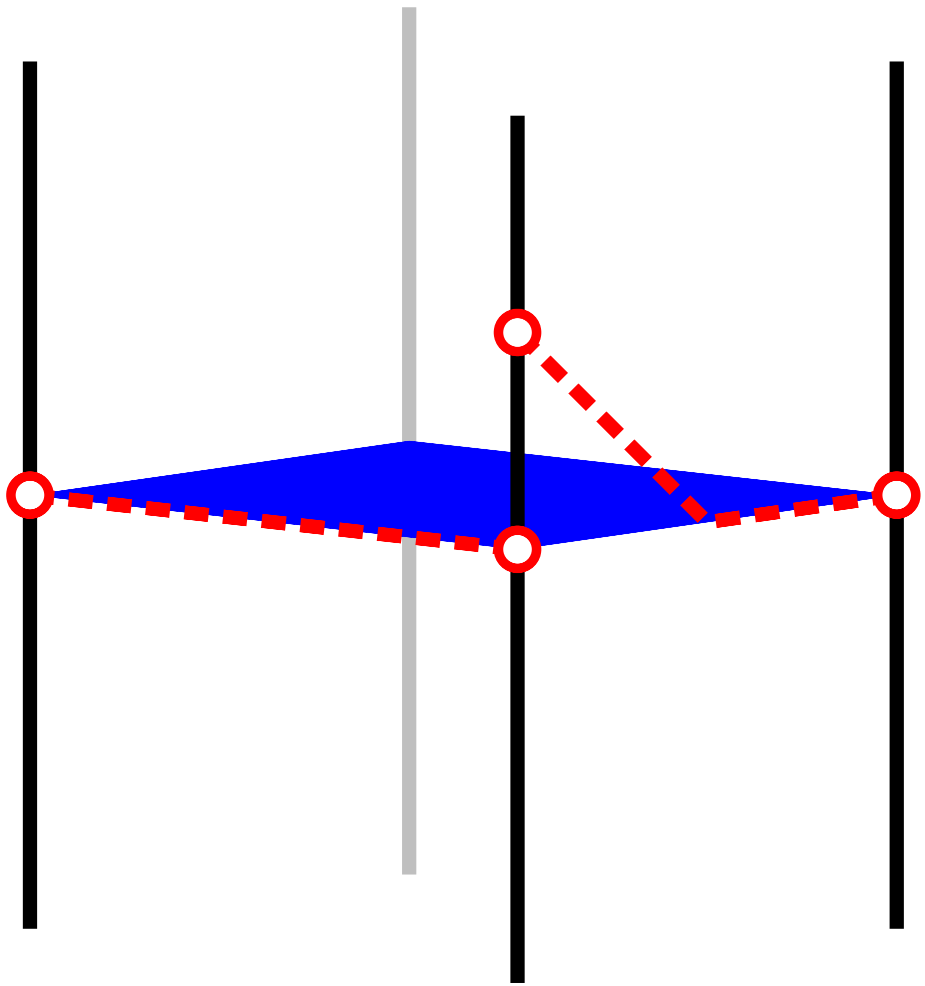
辺で隣り合う領域の点同士を、その辺を通るような曲線で結ぶ。



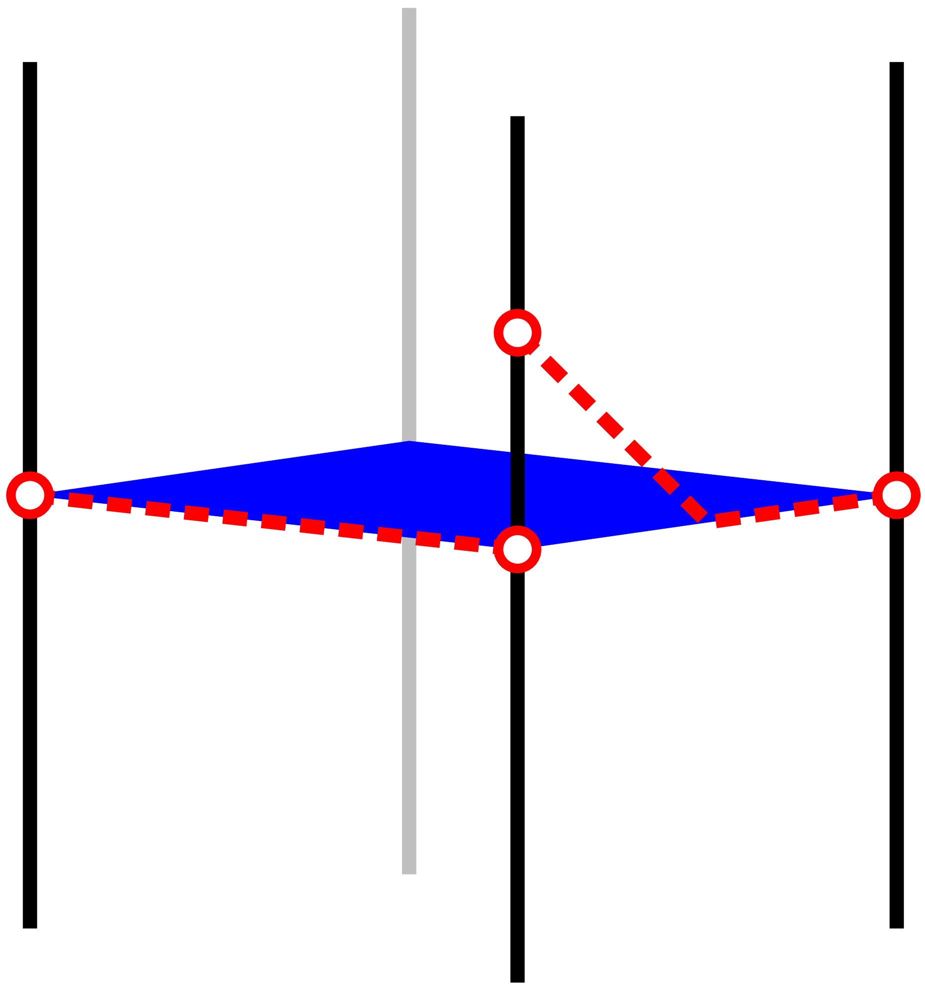
立体交差の数を n とすると、$\mathbf{S}^2 \times 0$ は $4n$ 個の四辺形 R_i たちに分解する。



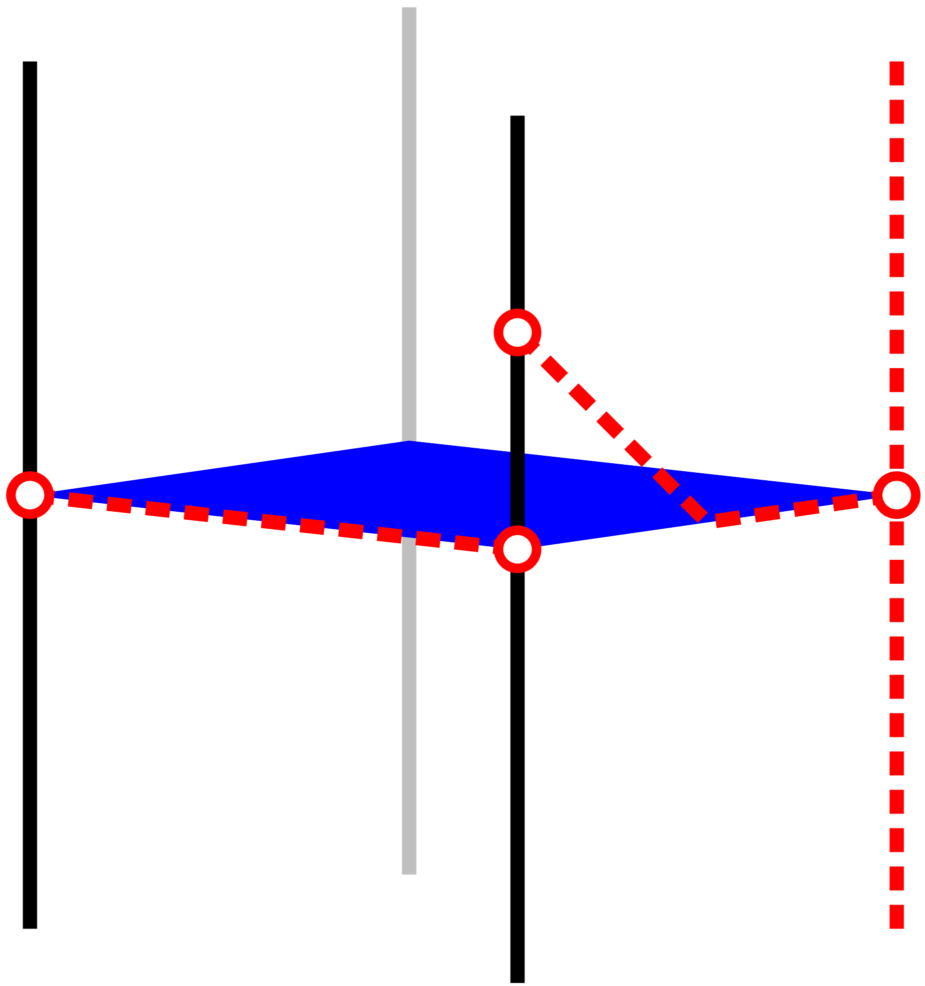
$R_i \times (-\infty, \infty) - K$ が（おおむね）求める理想胞体である。



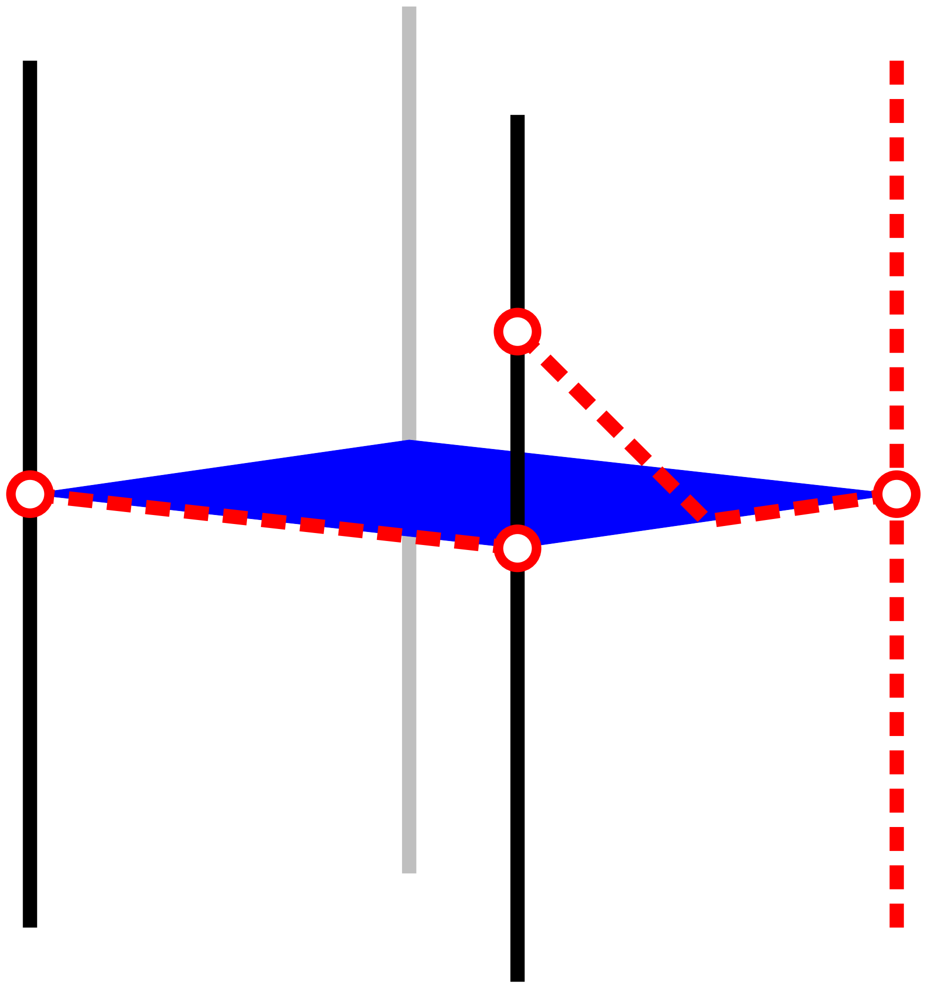
ただし、これらの和は $\mathsf{S}^3 - K$ ではなくて、
$\mathsf{S}^3 - \{\pm\infty\} - K$ である。



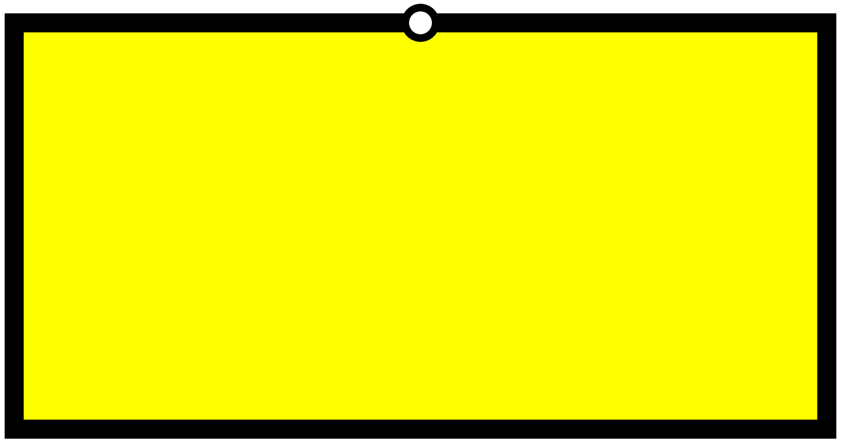
そこで K 上のある１点から $\pm\infty$ に向けて穴を掘る。これは４個の胞体に影響を与える。



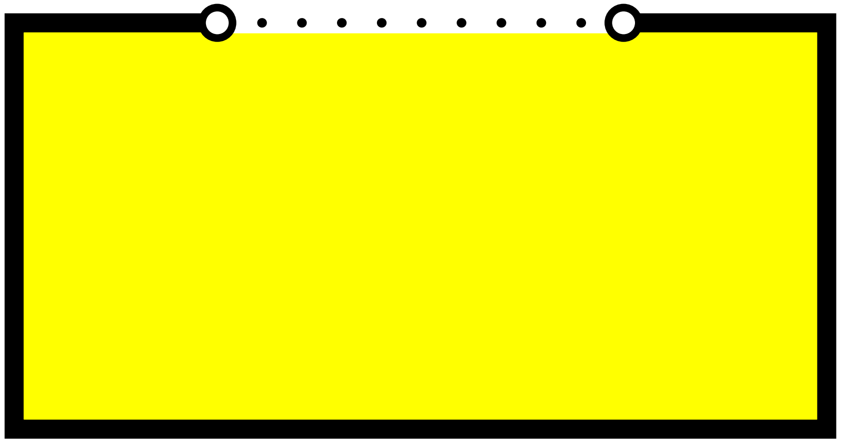
これで求める分解が得られる。



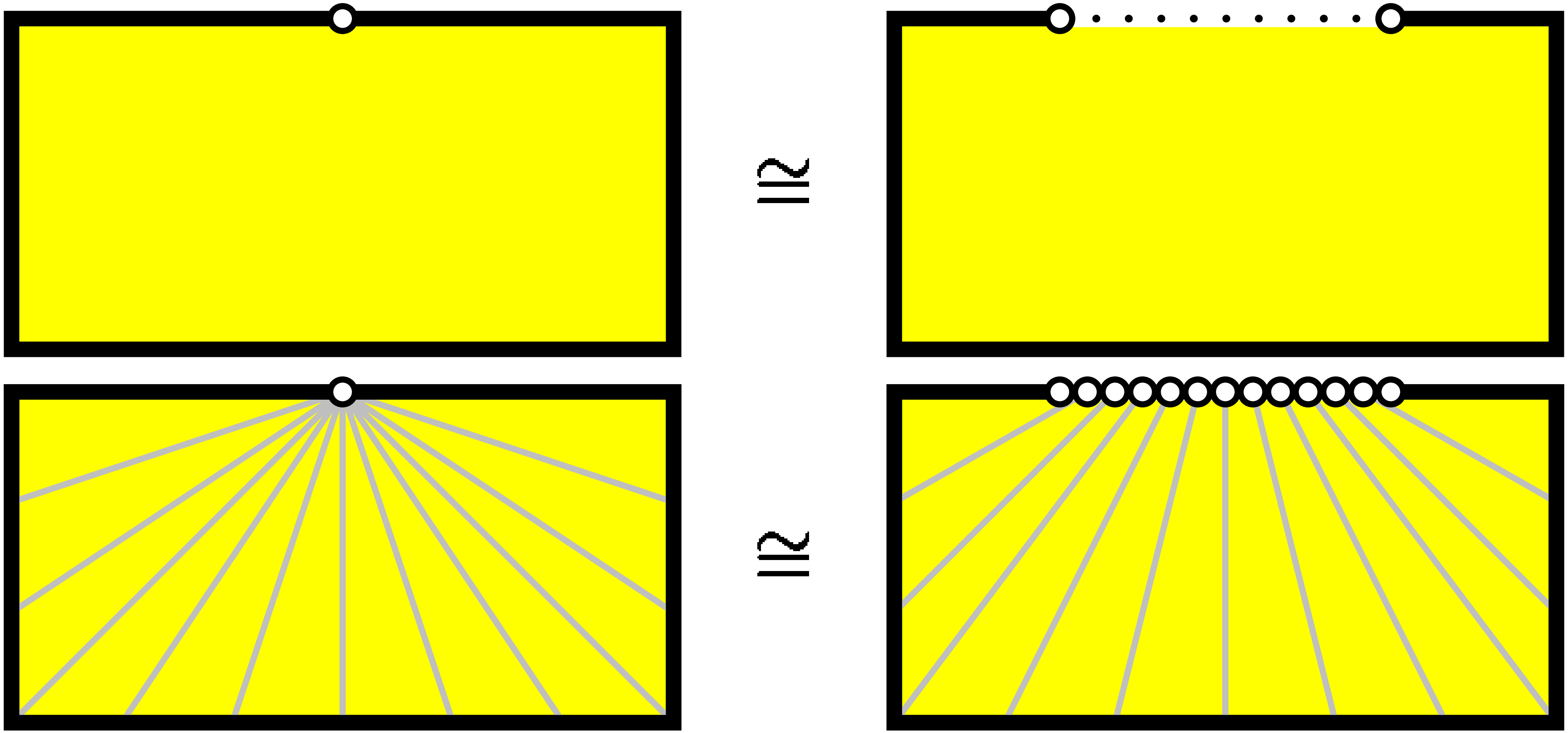
次のような同一視を用いると表面が理想 n 角形 $(n = 1, 2, 3)$ たちに分割されているのがわかる。



$\cong$



次のような同一視を用いると表面が理想 n 角形 $(n=1,2,3)$ たちに分割されているのがわかる。



低次元と高次元

低次元と高次元

高次元とは：５次元以上

低次元と高次元

高次元とは：５次元以上

低次元とは：４次元以下

低次元と高次元

高次元とは：５次元以上

低次元とは：４次元以下

何が違うのか……

「空間内のモノを整理整頓できるか」

「空間内のモノを整理整頓できるか」

M という m 次元の図形と、

「空間内のモノを整理整頓できるか」

M という m 次元の図形と、

N という n 次元の図形が、

「空間内のモノを整理整頓できるか」

M という m 次元の図形と、

N という n 次元の図形が、

W という w 次元の図形の中にあるとしよう。

$M^m,\ N^n \subset W^w$

$m + n$ と w の大小により、状況が異なる。

$M^m,\ N^n \subset W^w$

$m+n$ と w の大小により、状況が異なる。

- $m+n<w$ の場合
  少し動かせば M^m と N^n はぶつからないようにできる

例：$m=n=1,\ w=3$

$M^m,\ N^n \subset W^w$

$m+n$ と w の大小により、状況が異なる。

- $m+n=w$ の場合

  少し動かせば M^m と N^n はいくつかの点でしかぶつからないようにできる。

  例：$m=n=1,\ w=2$ とか $m=2,\ n=1,\ w=3$ など。

$M^m,\ N^n \subset W^w$

$m+n$ と w の大小により、状況が異なる。

- $m+n>w$ の場合

  少し動かせば M^m と N^n は $m+n-w$ 次元の図形にそって交わるようにできる。

  例：$m=n=2,\ w=3$

$M^m, N^n \subset W^w$

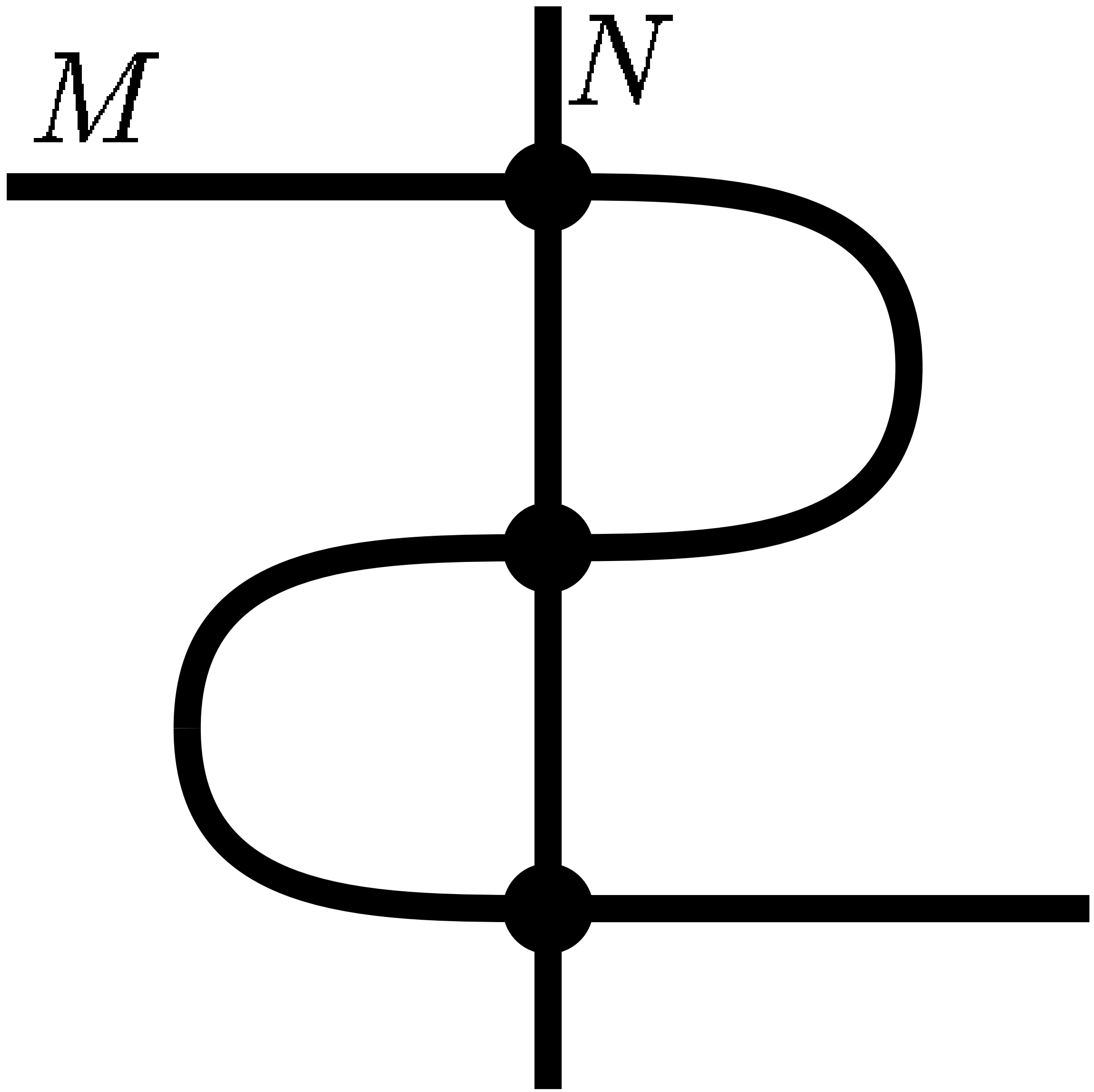
$m+n$ と w の大小により、状況が異なる。

- $m+n=w$ の場合

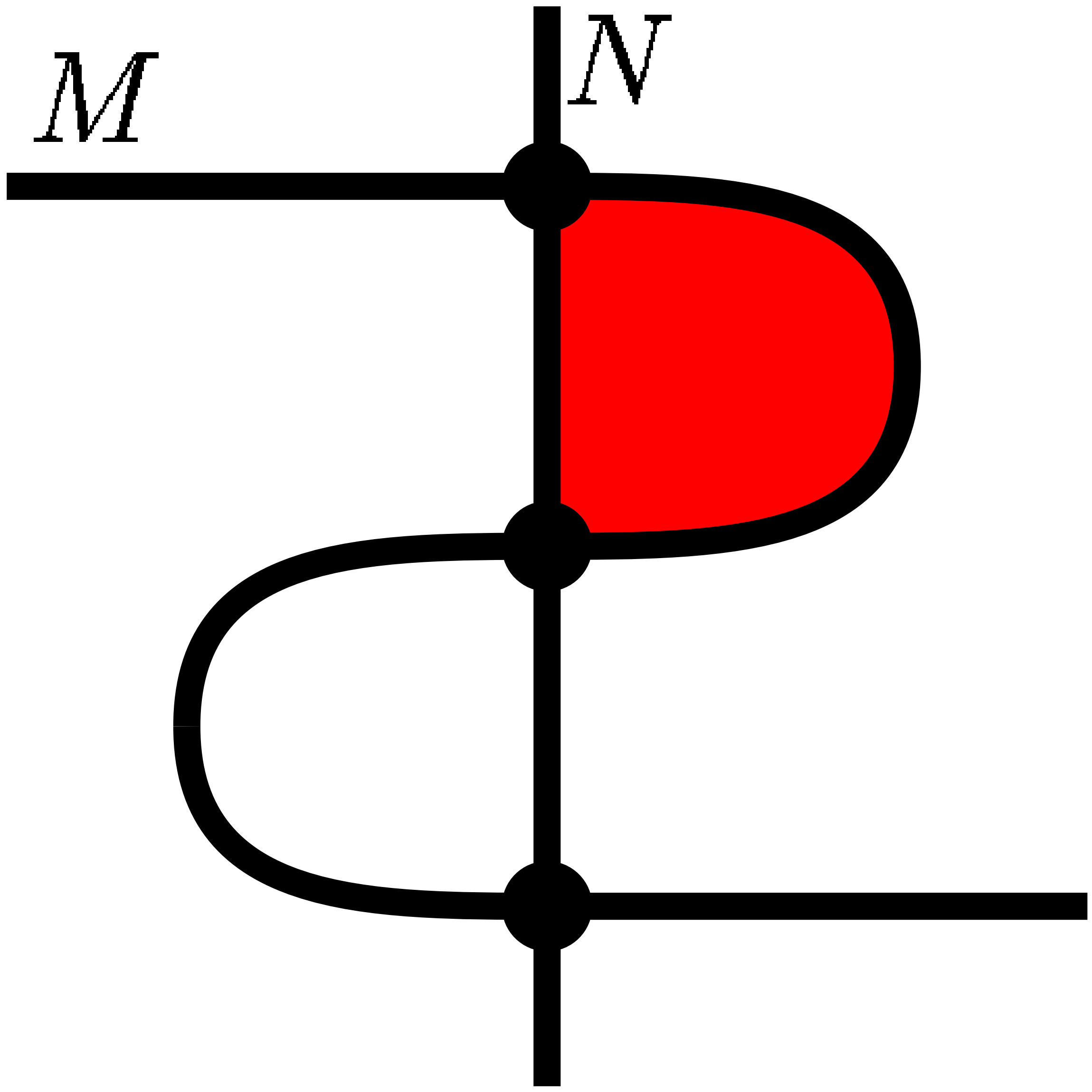
  余分な交点を減らす方法が知られている：

  Whitney のトリック

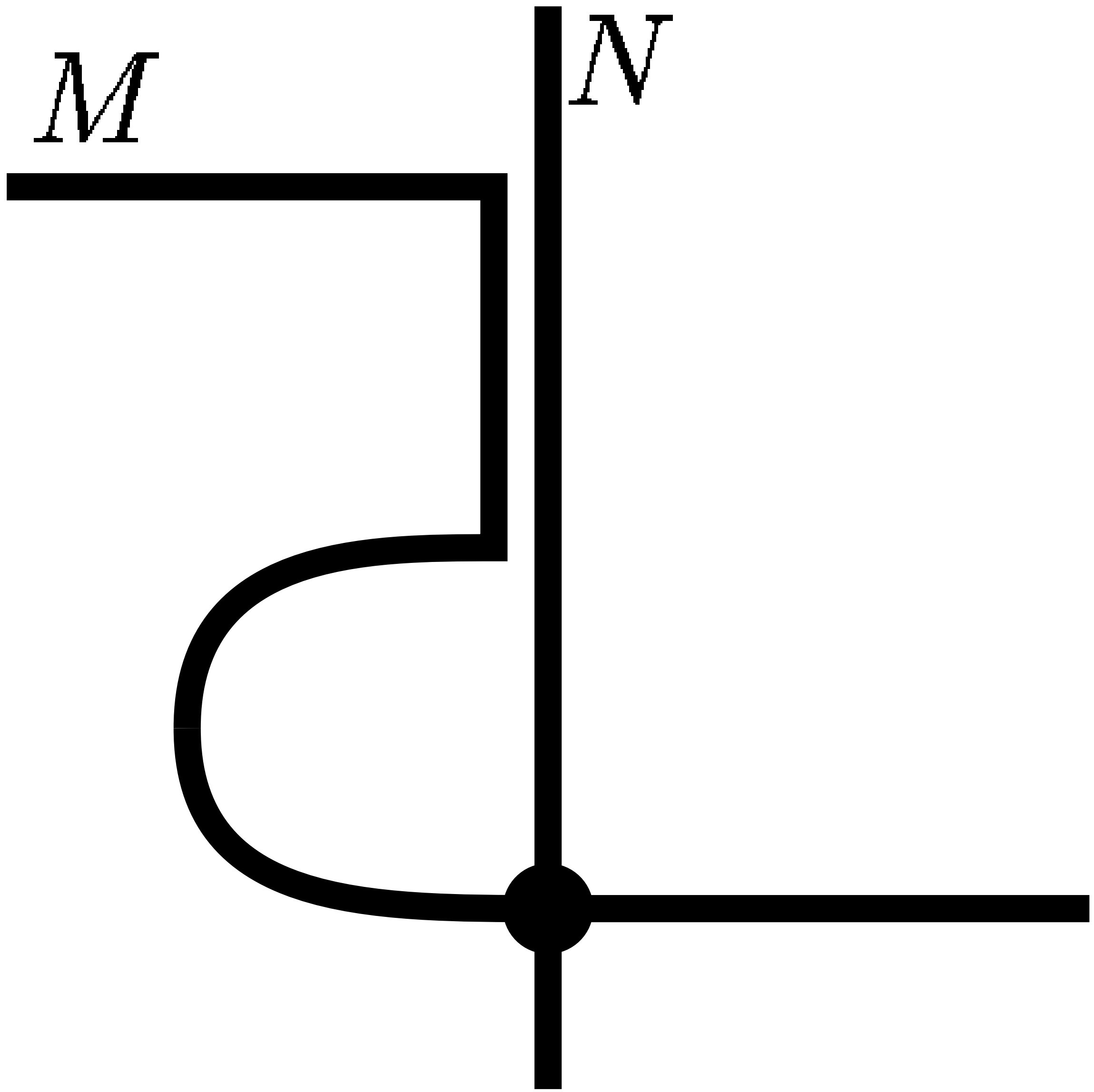
Whitney **のトリック** ($m = n = 1$, $w = 2$ **の図**)



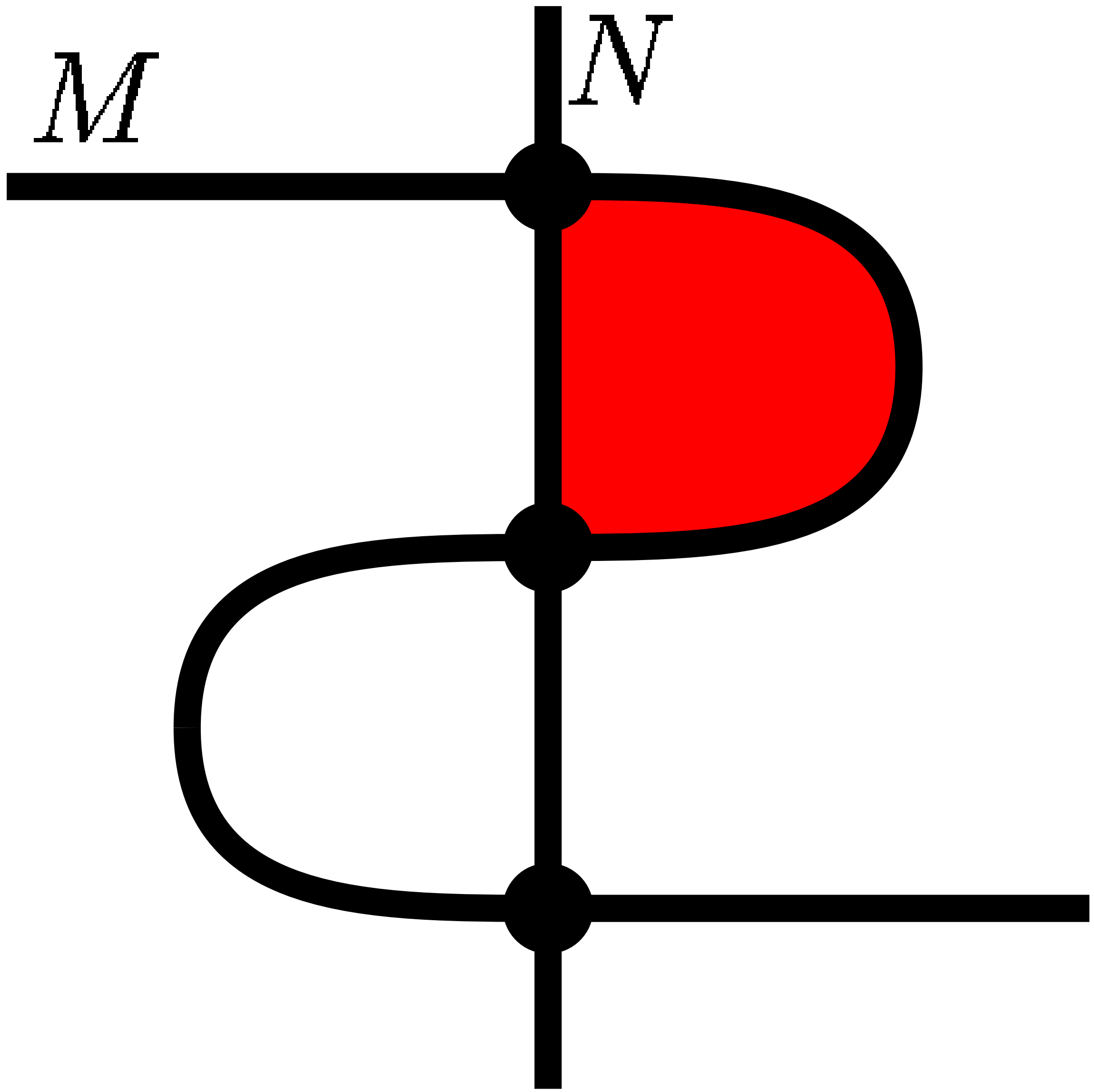
Whitney のトリック ($m = n = 1$, $w = 2$ の図)



Whitney **のトリック** ($m = n = 1$, $w = 2$ **の図**)



Whitney **の円板（2 次元）が必要！**



全体の空間 W の次元 w が 5 以上の場合、

$$2 + 2 < w$$

　であるから、ホイットニーの円板は必要に応じていつも見つけることができる。

（→　高次元多様体の手術理論）

全体の空間 W の次元が 4 の場合、

$$2 + 2 = 4$$

であるから、ホイットニーの円板を見つけようとすると、円板が自分自身と交わってしまう！！！

全体の空間 W の次元が 4 の場合、

$$2 + 2 = 4$$

　であるから、ホイットニーの円板を見つけようとすると、円板が自分自身と交わってしまう！！！

ならば、円板自身の交叉を解消するために Whitney のトリックを使ったら？

全体の空間 W の次元が 4 の場合、

$$2 + 2 = 4$$

　であるから、ホイットニーの円板を見つけようとすると、円板が自分自身と交わってしまう！！！ならば、円板自身の交叉を解消するために Whitney のトリックを使ったら？

また新たな円板の交叉の問題が！！！！！！……

1982 年、M. Freedman は、W^4 がある条件（単連結性）を満たすときに、この操作を無限に続けると交叉が解消できることを証明し、単連結な 4 次元多様体の分類を行った。

1982 年、M. Freedman は、W^4 がある条件（単連結性）を満たすときに、この操作を無限に続けると交叉が解消できることを証明し、単連結な４次元多様体の分類を行った。

Hegenbarth-Repovš は W が「縦」と「横」の構造を持ち、縦方向が「単連結性」をみたす場合に、W に関して「手術障害類理論」が成りたつような十分条件を見つけ出した。

結び目 K の補空間の構造に関する我々の観察により、$W = M(K)$ で彼らの議論が使えることがわかる。