Novikov 予想に関する G-T-Y の仕事

山崎 正之

岡山理科大学

2015 年 3 月 27 日

Novikov 予想

R: involution を持つ環
$\mathbb{L}(R)$: Ω スペクトラム s.t. $\pi_*(\mathbb{L}(R)) = L_*(R)$ ($* \in \mathbb{Z}$)
$\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbb{Z}\{e\})$
$A : H_*(X;\mathbb{L}) \to L_*(\mathbb{Z}\pi_1(X))$: アセンブリ写像

$\mathbb{L}'$:q-connective ($\pi_*(\mathbb{L}(R)) = 0$, $* < q$) なバージョン
$\Rightarrow H_*(X;\mathbb{L}') = H_*(X;\mathbb{L})$ ($* \geq \dim X + q$)

命題：群 Γ に対して次は同値

- Γ に対する Novikov 予想が正しい.
- $A : H_*(B\Gamma;\mathbb{L}) \to L_*(\mathbb{Z}\Gamma)$ は $\otimes\mathbb{Q}$ すると split injective. ただし, $B\Gamma$ は Γ の分類空間.

Novikov は $\mathbb{Z}^n$ の場合を証明している。

Borel 予想

閉多様体 M が $K(\Gamma, 1)$ ならば, 任意のホモトピー同値写像 $f : N \to M$ は同相写像にホモトピック。

命題：閉多様体 M が $K(\Gamma, 1)$ ならば, 次は同値 (やや雑)

- 任意のホモトピー同値写像 $f : N \to M$ は同相写像に h-コボルダント。
- $A : H_*(B\Gamma; \mathbb{L}) \to L_*(\mathbb{Z}\Gamma)$ は同型。

※ $\mathrm{Wh}(\Gamma) = 0$ ならこれらは Borel 予想と同値。

予想：閉多様体 M が $K(\Gamma, 1)$ ならば, 次が成り立つ

$$\mathrm{Wh}(\Gamma) = \widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\{\Gamma\}) = K_{-i}(\mathbb{Z}\{\Gamma\}) = 0$$

M: n 次元多様体, $\Gamma = \pi_1(M^n)$ $\Longrightarrow$ 手術の完全列

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \to & \mathcal{S}(M \times D^2, \partial) & \to & [M \times D^2, \partial; G/TOP, *] & \to & L_{n+2}(\mathbb{Z}\Gamma) \\ & \to & \mathcal{S}(M \times D^1, \partial) & \to & [M \times D^1, \partial; G/TOP, *] & \to & L_{n+1}(\mathbb{Z}\Gamma) \\ & \to & \mathcal{S}(M) & \to & [M; G/TOP] & \to & L_n(\mathbb{Z}\Gamma) \end{array}$$

$\mathbb{L}' = \mathbb{L}\langle 1 \rangle$ $(\pi_i(\mathbb{L}') = 0\ (i < 1))$ とすると $(\mathbb{L}')_0 = G/TOP$

$$[M \times D^i, \partial; G/TOP, *] = H^0(M \times D^i, \partial; \mathbb{L}') \cong H_{n+i}(M \times D^i; \mathbb{L}') = H_{n+i}(M; \mathbb{L}')$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \to & \mathcal{S}(M \times D^2, \partial) & \to & H_{n+2}(M; \mathbb{L}') & \to & L_{n+2}(\mathbb{Z}\Gamma) \\ & \to & \mathcal{S}(M \times D^1, \partial) & \to & H_{n+1}(M; \mathbb{L}') & \to & L_{n+1}(\mathbb{Z}\Gamma) \\ & \to & \mathcal{S}(M) & \to & H_n(M; \mathbb{L}') & \to & L_n(\mathbb{Z}\Gamma) \end{array}$$

$H_{n+i}(M; \mathbb{L}') = H_{n+i}(M; \mathbb{L})$ $(\forall i \geq 1)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \to & \mathcal{S}(M\times D^2,\partial) & \to & H_{n+2}(M;\mathbb{L}) & \xrightarrow{A} & L_{n+2}(\mathbb{Z}\Gamma) \\
 & \to & \mathcal{S}(M\times D^1,\partial) & \to & H_{n+1}(M;\mathbb{L}) & \xrightarrow{A} & L_{n+1}(\mathbb{Z}\Gamma) \\
 & \to & \mathcal{S}(M) & \to & H_n(M;\mathbb{L}') & \longrightarrow & L_n(\mathbb{Z}\Gamma)
\end{array}
$$

- 最下段を除き、各項は周期４の周期性をもつ。
- $\mathcal{S}(M) \hookrightarrow \mathcal{S}(M\times D^{4j},\partial)$

したがって次は同値

- $\mathcal{S}(M) = \mathcal{S}(M\times D^1,\partial) = \mathcal{S}(M\times D^2,\partial) = \cdots = 0$
- $A : H_*(M;\mathbb{L}) \to L_*(\mathbb{Z}\Gamma)$ は同型 ($\forall *$: 十分大)
- $A : H_*(M;\mathbb{L}) \to L_*(\mathbb{Z}\Gamma)$ は同型 ($\forall * \geq n+1$)
- $A : H_*(M;\mathbb{L}) \to L_*(\mathbb{Z}\Gamma)$ は同型 ($\forall * \in \mathbb{Z}$)

Farrell-Jones 予想の特別な場合

閉多様体 M が $K(\Gamma, 1)$ ならば, 次は同型:

$$A : H_*(B\Gamma; \mathbb{L}^{\langle -\infty \rangle}) \to L_*^{\langle -\infty \rangle}(\mathbb{Z}\Gamma)$$

Farrell-Jones 予想のもう少し一般の場合

群 Γ に対して次は同型：

$$A : H_*^{\Gamma}(E_{\mathcal{VCYC}}\Gamma; \mathbb{L}^{\langle -\infty \rangle}) \to H_*^{\Gamma}(\mathrm{pt.}; \mathbb{L}^{\langle -\infty \rangle}) = L_*^{\langle -\infty \rangle}(\mathbb{Z}\Gamma)$$

$E_{\mathcal{VCYC}}\Gamma$: Γ-CW 複体 s.t.

- イソトロピー部分群は皆 virtually cyclic
- イソトロピー部分群が皆 virtually cyclic な Γ-CW 複体 Y から $E_{\mathcal{VCYC}}\Gamma$ への Γ 写像は, Γ-ホモトピーを除いてただひとつ.

今回の目的：以下の論文の紹介

Erik Guentner - Romain Tessera - Guoliang Yu
"A notion of geometric complexity and its application to topological rigidity"
Invent math (2012) 189, 315–357

定理

距離空間 Γ は "bounded geometry (BG)" および "finite decomposition complexity (FDC)" をもつ
$\Rightarrow$

- Γ に対し bounded な Borrell 同型予想が成り立つ
- Γ に対し $\otimes\mathbb{Q}$ なしで Novikov 予想が成り立つ

- Γ が "bounded geometry (BG)" をもつ $\iff \forall r > 0$ に対し，$\exists N = N(r) \in \mathbb{N}$ *s.t.* 半径 r の球体はたかだか N 個の要素しかもたない。

FDC をもつ群の例

- 可算部分群 $\subset \mathbf{GL}(n, R)$, R: 任意の可換環 $\ni 1$
- 有限個の連結成分をもつリー群の加算部分群
- 双曲群
- elementary amenable な群

Guentner-Tessera-Yu,
"Discrete groups with finite decomposition complexity"
Groups Geom. Dyn. 7 (2013), no. 2, 377–402.

P. W. Nowak - Guoliang Yu
"Large Scale Geometry"
EMS Textbooks in Mathematics, EMS (2012)

定理 (G-T-Y)

閉多様体 M: $K(\Gamma, 1)$
Γ は “finite decomposition complexity (FDC)” をもつ
$\Rightarrow$ M は stably rigid

M が stably rigid とは……

$\exists n$ s.t. 任意のホモトピー同値写像 $f: N \to M$ に対し,
$f \times 1: N \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n$ は同相写像にホモトピック.

rigidity の証明······M の幾何的性質を用いるのが常套手段
特に M の普遍被覆 $\widetilde{M}$ の大域的で粗い性質が重要

例： 双曲的な多様体に関する Mostow rigidity

粗い幾何 (coarse geometry)

粗い同値の例

- $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ は同値
- $\mathbb{Z}^n$ と $\mathbb{R}^n$ は同値
- $\mathbb{Z}^n$ と $\mathbb{Z}^m$ が同値 $\Longleftrightarrow n = m$
- 有界集合は一点集合と同値
- $\widetilde{M}$ と $\pi_1(M)$, そしてその Cayley graph は同値 (M:コンパクト)

X, Y : 距離空間, $f : X \to Y$: 連続とは限らない写像

- f が次の２条件をみたすとき, 粗写像と呼ぶ。
  - $B \subset Y$ が有界 $\Longrightarrow f^{-1}(B) \subset X$ も有界
  - $\exists \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ s.t. $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_+(d(x_1, x_2))$

- f が次の条件をみたすとき, 粗埋め込みと呼ぶ。（$\Longrightarrow$ 粗写像になる）
  - $\exists \rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ （非減少）s.t.
    - $\lim_{t \to \infty} \rho_-(t) = \infty$
    - $\rho_-(d(x_1, x_2)) \leq d(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_+(d(x_1, x_2))$ $(\forall x_1, x_2 \in X)$

- 粗埋め込み f がさらに次の条件をみたすとき, 粗同値写像と呼ぶ。
  - $\exists C > 0$ s.t. $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ s.t. $d(f(x), y) \leq C$

※ $y \in Y$ に対し, $d(f(x), y) \leq C$ となる x をひとつ選び, $g(y) = x$ として $g : Y \to X$ を定めると, g は逆方向の粗同値写像を与え, $g \circ f$ と 1_X, $f \circ g$ と 1_Y はどちらも C-close である。

Rips 複体

X: 局所有限な距離空間, $d > 0$

$P_d(X)$ (X の Rips 複体)

次のような多面体

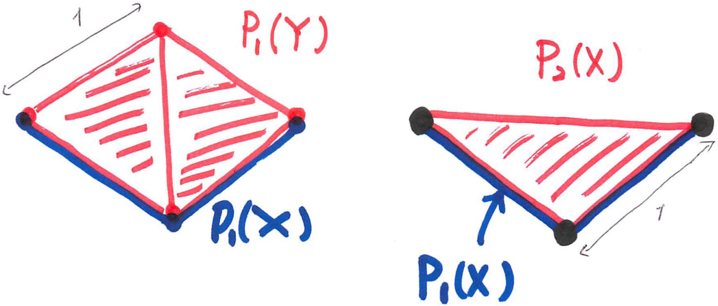
- $P_d(X)$ の頂点: X の点たち
- $P_d(X)$ の n 単体: $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$, ただし $d(x_i, x_j) \leq d$

"単体的距離": 各単体は "標準単体" の距離
異なる単体の点は道で結んでその長さの inf
（異なる成分の距離は ∞ とする）

例: $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $d \geq \mathrm{diam} X \Longrightarrow P_d(X)$ は n 単体.

注意

- $X \subset Y$ のとき $P_d(X) \subset P_d(Y)$ であるが, 部分距離空間とは限らない.
- $a < b$ のとき $P_a(X) \subset P_b(X)$ であるが, 部分距離空間とは限らない.



定理 K (G-T-Y)

距離空間 Γ が BG および FDC をもてば, 各 $i \geq 0$ に対し次が成り立つ:

$$\lim_{d\to\infty} Wh^{bdd}_{1-i}(P_d(\Gamma)) = 0, \quad \lim_{d\to\infty} \widetilde{K}^{bdd}_{-i}(P_d(\Gamma)) = 0$$

$$Wh^{bdd}_{1-i}(P_d(\Gamma)) = \lim_{\delta\to\infty} Wh^{\delta}_{1-i}(P_d(\Gamma))$$

$Wh^{\delta}_{1-i}(Y) = Wh(Y \times \mathbb{R}^i; 1_{Y\times\mathbb{R}^i}, 1, \delta)$:

Y の δ-controlled な局所有限 Wh_{1-i} 群 (Ranicki-Yamasaki, 1995)

$$\widetilde{K}^{bdd}_{-i}(P_d(\Gamma)) = \lim_{\delta\to\infty} \widetilde{K}^{\delta}_{-i}(P_d(\Gamma))$$

$\widetilde{K}^{\delta}_{-i}(Y) = \widetilde{K}_0(Y \times \mathbb{R}^i; 1_{Y\times\mathbb{R}^i}, 0, \delta)$:

Y の δ-controlled な局所有限 $\widetilde{K}_{-i}$ 群 (*ibid.*) ※あとで説明

定理 L (G-T-Y)

距離空間 $\boldsymbol{\Gamma}$ が BG および FDC をもてば, 次は同型:

$$A : \lim_{d\to\infty} H_n(P_d(\Gamma);\mathbb{L}) \to \lim_{d\to\infty}\lim_{\delta\to\infty} L_n^{\delta}(P_d(\Gamma))$$

$\lim\limits_{d\to\infty} H_n(P_d(\Gamma);\mathbb{L})$: Γ の $\mathbb{L}$ 係数 coarse homology

$L_n^{\delta}(Y) = L_n^{\delta}(Y; 1 : Y \to Y, \mathbb{Z})$:
　距離空間 Y の δ-controlled な局所有限 L 群 (Ranicki-Yamasaki, 2006)

$L_n^{bdd}(Y) := \lim\limits_{\delta\to\infty} L_n^{\delta}(Y)$: Y の bounded な局所有限 L 群

定理 K,L とも, 証明には帰納法とマイヤー・ビートリス “完全列” を用いる.
X が有界 (有限) のときは “自明”.

FDC の定義 (1/3)

方針

マイヤー・ビートリス列を使うのだから $X = \Gamma$ から出発して, これを二つに分ける：$X = X_0 \cup X_1$.
次にそれぞれを二つに分けて, さらに二つにわけて, ⋯⋯をくり返して有界な部分集合にたどりつければ, そこでは同型が "自明" ☆

ただ, 元々の X はコンパクトではないから, 有限回の操作ではこれは不可能に見える...

しかし, 例えば $\mathbb{Z}$ を 有界な族

$$\mathcal{Y} = \{ Y_n = [1000n, 1000(n+1)] \cap \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

に分割して, $X_0 = \bigsqcup Y_{2n}$, $X_1 = \bigsqcup Y_{2n+1}$ のようにすれば, おのおの自身は有界ではないが, 有界なピースで互いに離れているものの和である。このような分解を頭に, FDC を定義する.

FDC の定義 (2/3)

距離空間 X の部分集合の族 $\mathcal{Z}$ が r-disjoint $\Longleftrightarrow$ $d(Z, Z') \geq r$ $(Z \neq Z' \in \mathcal{Z})$
距離空間の族 $\mathcal{Y}$ が s-bounded $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{diam}(Y) \leq s$ $(\forall Y \in \mathcal{Z})$
距離空間の族 $\mathcal{Y}$ が（一様）有界 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{Y}$ が, ある $s > 0$ に対して s-bounded

r-decomposability

距離空間 X の $\mathcal{Y}$ 上の r-分解:

$$X = X_0 \cup X_1, \quad X_i = \bigsqcup_{r\text{-disjoint}} X_{ij}, \quad X_{ij} \in \mathcal{Y}$$

距離空間の族 $\mathcal{X}$ が $\mathcal{Y}$ 上 r 分解可能 (記号 : $\mathcal{X} \xrightarrow{r} \mathcal{Y}$)
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{X}$ の任意のメンバーが $\mathcal{Y}$ 上の r-分解をもつ

FDC の定義 (3/3)

分解試合

選手:A と B; 初期の距離空間族 $\mathcal{Y}_0$

ラウンド 1 : A が $\mathcal{Y}_0$ を分解することを宣言し, B は A に対して自然数 r_0 を与える. それに対し, A はある族 $\mathcal{Y}_1$ 上で $\mathcal{Y}_0$ を r_0-分解する.

ラウンド k: A が $\mathcal{Y}_{k-1}$ を分解することを宣言し, B は A に対して自然数 r_{k-1} を与える. それに対し, A はある族 $\mathcal{Y}_k$ 上で $\mathcal{Y}_{k-1}$ を r_{k-1}-分解する.

試合はある k に対して, $\mathcal{Y}_k$ を有界な族にできたとき, A の勝ちとなる.

FDC

- $\mathcal{X}$ が FDC をもつとは, $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{X}$ で B がどんな r_i を指定しても必ず A が勝てることをいう.
- 距離空間 X が FDC をもつとは, $\{X\}$ が FDC をもつことをいう.

FDC をもつ距離空間族の階層

$\mathfrak{D}$ = FDC をもつ距離空間族すべて

$\mathfrak{D}_0 = \{\mathcal{X} \mid \mathcal{X}$: 有界 $\}$

α: 順序数 > 0

$\mathfrak{D}_\alpha = \{\mathcal{X} \mid \forall r > 0 \ \ \exists\beta < \alpha, \exists\mathcal{Y} \in \mathfrak{D}_\beta$ s.t. $\mathcal{X} \xrightarrow{r} \mathcal{Y}\}$

$\mathfrak{D}_{\mathrm{fin}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}_n$

ひとつの距離空間をそれだけで族とみなすと……

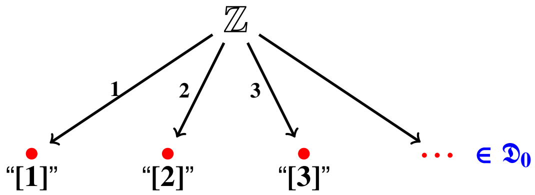
- $\mathbb{Z}^n \in \mathfrak{D}_n$
- $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} \in \mathfrak{D}_\omega, \quad \notin \mathfrak{D}_{\mathrm{fin}}$

一般に次が成り立つ:

- $X \in \mathfrak{D}_{\mathrm{fin}} \iff X$: finite asymptotic dimension をもつ
- $\mathcal{X} \in \mathfrak{D}_\alpha$ ($\exists\alpha$:可算) $\iff \mathcal{X} \in \mathfrak{D}$ ($\mathcal{X}$ が FDC をもつ)

$\mathbb{Z}$ の戦略ツリー（分割ツリー）

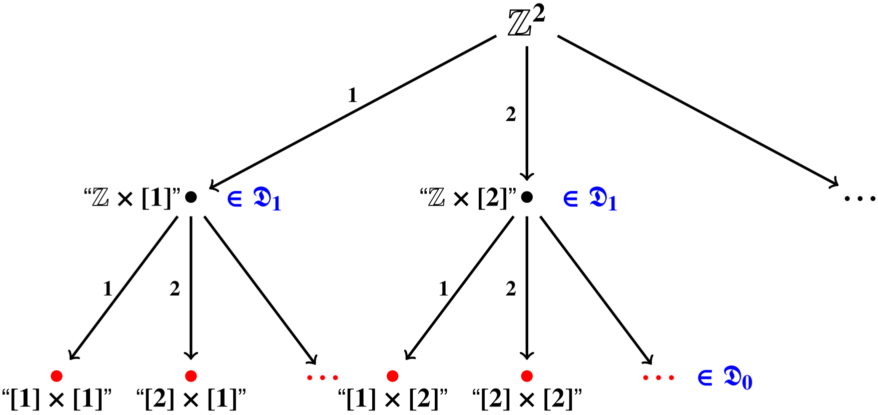
- は有界な距離空間族を表す。



- "[1]" $= \{ \ \ldots, \ \{-2,-1\}, \ \{-1,0\}, \ \{0,1\}, \ \{1,2\}, \ \ldots \ \}$
- "[2]" $= \{ \ \ldots, \ \{-4,-3,-2\}, \ \{-2,-1,0\}, \ \{0,1,2\}, \ \{2,3,4\}, \ \ldots \ \}$
- "[3]" $= \{ \ \ldots, \ \{-3,-2,-1,0\}, \ \{0,1,2,3\}, \ \{3,4,5,6\}, \ \ldots \ \}$
- $\ldots$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{Z} \in \mathfrak{D}_1$$

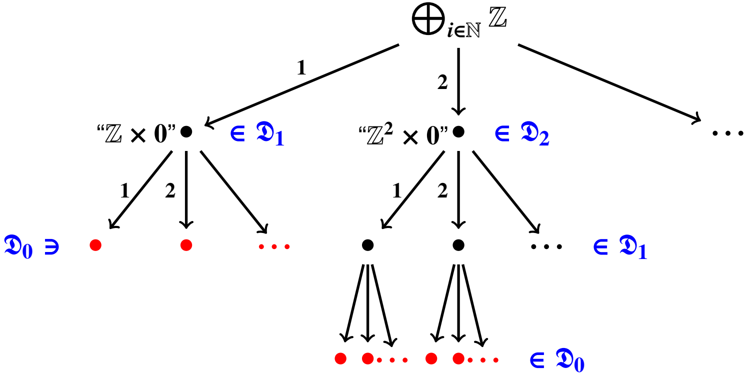
$\mathbb{Z}^2$ の戦略ツリー（分割ツリー）



$$\Longrightarrow \quad \mathbb{Z}^2 \in \mathfrak{D}_2$$

$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ の戦略ツリー（分割ツリー）

$\bigoplus\mathbb{Z} \ni a = (a_i)$ の "ノルム" $|a| = \sum_{i\in\mathbb{N}} i|a_i|$ により距離を入れる.



$$\Longrightarrow \quad \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z} \in \mathfrak{D}_\omega$$

※ $\mathcal{X}$ が FDC をもてば, $\mathcal{X} \in \mathfrak{D}_{\alpha_0}$ となる可算順序数 α_0 が存在する。

$\mathcal{X}$ の戦略ツリー T をひとつとる。各頂点に可算順序数を次のように（超限帰納的に）対応させる。

- まず, その頂点より下に辺が延びていない点たち（T の「葉」）の集合を L_0 とし, その点たちには 0 を対応させる。
- 順序数 α より小さい β に対応する頂点たちの集合 L_β はすでに決まっているとする。
  T から $\beta < \alpha$ をみたす L_β の点たちを終点とする辺たちを取り去る。
- そのツリーに「葉」があるときは、それら全体を L_α と定め、その点たちに α を対応させる。もし「葉」がなければ、その時点でツリーは「根」($\mathcal{X}$) だけになっているので、$L_\alpha = \emptyset$ と定める。

$\alpha_0 = \{\alpha | L_\alpha \neq \emptyset\}$ とし, 「根」には α_0 を対応させる。

$$\alpha_0 \longleftrightarrow \mathcal{L} = \{L_\alpha | \alpha < \alpha_0\} : \text{可算}$$

復習

X, Y : 距離空間, $f : X \to Y$: 連続とは限らない写像

- f が次の条件をみたすとき, 粗埋め込みと呼ぶ。
  - $\exists \rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ （非減少）*s.t.*
    - $\lim_{t \to \infty} \rho_-(t) = \infty$
    - $\rho_-(d(x_1, x_2)) \leq d(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_+(d(x_1, x_2))$ $(\forall x_1, x_2 \in X)$

※ この概念を “写像の族” $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対して拡張する。

$$F = \{f : X \to Y(\in \mathcal{Y})\}_{X \in \mathcal{X}}$$

$F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 族の間の写像

- F が uniformly expansive
  $\iff \exists \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ (非減少) *s.t.*
  $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_+(d(x_1, x_2)) \quad (\forall f \in F, \forall x_1, x_2 \in X)$
- F が effectively proper
  $\iff \exists \rho_- : [0, \infty) \to [0, \infty)$ (proper かつ非減少) *s.t.*
  $\rho_-(d(x_1, x_2)) \leq d(f(x_1), f(x_2)) \quad (\forall f \in F, \forall x_1, x_2 \in X)$
- F が粗埋め込み
  $\iff F$ が effectively proper かつ uniformly expansive

- $\mathcal{X}$ の部分空間とは族 $\mathcal{Y}$ で, その任意のメンバー $Y \in \mathcal{Y}$ がある $X \in \mathcal{X}$ の部分空間になっているもののこと。

補題 1

$F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が uniformly expansive $\Longrightarrow \forall R > 0, \exists S > 0$ *s.t.*
$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ が $\mathcal{Y}$ の部分集合で, $\mathcal{V}$ は $\mathcal{W}$ 上で S-分解するならば, $F^{-1}(\mathcal{V})$ は $F^{-1}(\mathcal{W})$ 上で R-分解する

補題 2

$F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が effectively proper $\Longrightarrow \forall \mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ (有界な部分族) に対して, $F^{-1}(\mathcal{V})$ は $\mathcal{X}$ の有界な部分族。

証明はどちらも容易。

定理 (coarse invariance)

次の 2 条件が成り立てば, $\mathcal{X}$ は FDC をもつ.

- 粗埋め込み $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が存在する.
- $\mathcal{Y}$ は FDC をもつ.

定理 (the fibering theorem)

次の 3 条件が成り立てば, $\mathcal{X}$ は FDC をもつ.

- $\mathcal{Y}$ は FDC をもつ.
- uniformly expansive な写像 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が存在する.
- $\mathcal{Y}$ の任意の有界な部分空間 $\mathcal{V}$ に対し, $F^{-1}(\mathcal{V})$ が FDC をもつ.

幾何的加群の理論 (Quinn 流)

- 距離空間 X 上の幾何的加群 $\mathbb{Z}[S]$
  = 集合 S の元を基底とする自由加群　＋　写像 $S \to X$

  ※ $s \in S$ たちを X の点とみなす. いちいち写像を書かない.
  ※以下, 幾何的加群はすべて局所有限とする.

- 幾何的射 $\alpha : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$ とは形式的な和

$$\sum_{s \in S} \sum_{\lambda(\text{finite})} m_\lambda(s, \rho_\lambda : [0, \tau_\lambda] \to X, t_\lambda)$$

$$(m_\lambda \in \mathbb{Z},\ \rho_\lambda(0) = s,\ \rho_\lambda(\tau_\lambda) = t_\lambda \in T)$$

※係数 0 の項の削除・挿入したものは元の射と同一と考える.
※同類項をまとめることは許さない.
※ α から道の情報を忘れることにより, 加群の準同型写像
$|\alpha| : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$ が誘導される.
※合成 $\beta\alpha$ は道の合成を使って定義する.

射の同値関係・ホモトピー (~)

幾何的射のホモトピーとは次の 2 種類の操作の有限個の列をいう:

1. データ中の道のホモトピー (*rel* ∂) による変形: $m(s,\rho,t) \sim m(s,\rho',t)$
2. 同類項の和をまとめる, もしくはその逆

$$m(s,\rho,t) + n(s,\rho,t) \sim (m+n)(s,\rho,t)$$

■ $\alpha \sim \alpha' \implies |\alpha| = |\alpha'|$

■ 射 $\alpha : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$ が同型とは「逆」$\alpha^{-1} : \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[S]$ ($\beta\alpha \sim 1$, $\alpha\beta \sim 1$) が存在すること.

アセンブリ

$\pi : \widetilde{X} \to X$ を X の regular な被覆, Γ をその被覆変換群とする.

- $\mathbb{Z}[S]$ on $X \implies \mathbb{Z}[\widetilde{S}]$ on $\widetilde{X}$ ($\widetilde{S}$:写像 $S \to X$ による π の引き戻し)
- $\mathbb{Z}[\widetilde{S}]$: $\mathbb{Z}[\Gamma]$-加群
- $\alpha : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T] \implies \tilde{\alpha} : \mathbb{Z}[\widetilde{S}] \to \mathbb{Z}[\widetilde{T}]$ ($\mathbb{Z}[\Gamma]$-加群準同型を誘導)

δ-コントロール

- $\alpha : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$ が半径 δ をもつ
$\iff (s, \rho : [0,\tau] \to X, t)$ が α の中で 0 でない係数をもつならば

$$\rho([0,\tau]) \subset B(s,\delta) \cap B(t,\delta)$$

※ $B(x,r)$: x を中心とした半径 r の閉球体

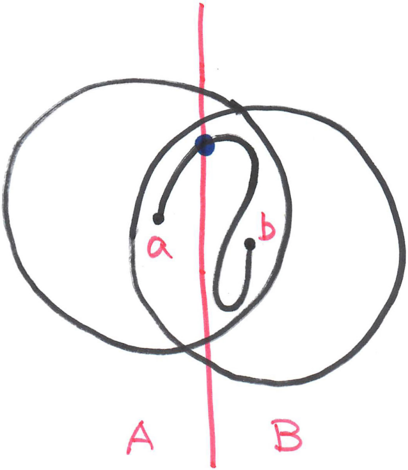
- $\alpha, \beta : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$ が δ ホモトピック $(\sim_\delta) \iff$
操作 1 では各ホモトピーの像が $B(s,\delta) \cap B(t,\delta)$ に含まれる.
操作 2 では対象の項が半径 δ をもつ.

- 同型 $\alpha : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$ が δ 同型 $\iff \exists \beta : \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}[S]$ s.t.
(1) α, β がともに半径 δ (2) $\beta\alpha \sim_{2\delta} 1$, $\alpha\beta \sim_{2\delta} 1$

※この β を α^{-1} と書く.

※ A, B は X の閉集合で, $X = A \cup B$, $C = A \cap B$ が成り立っているとする.
"半径 δ" の道 $\rho : [0, \tau] \to X$ が A の点 a と B の点 b を結んでいるとする.

$$\Longrightarrow \rho([0, \tau]) \subset C^{2\delta} \ (C \text{ の閉 } 2\delta \text{ 近傍})$$



基本変形

- 自己同型 α が elementary とは, ある直和分解について次のような "行列表示" をもつこと
$$\langle\alpha\rangle = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
逆 α^{-1} も自動的に elementary.

- 同型 $\alpha : \mathbb{Z}[S] \to \mathbb{Z}[T]$ が geometric とは, 全単射 $\varphi : S \to T$ があって, $s \in S$ から $t \in T$ へは, $t = \varphi(s)$ のときのみ道があり, その道もただひとつで係数は ± 1 であることをいう.
逆 α^{-1} も自動的に geometric.

変形, δ 変形, δ 単純同型

- 変形 (deformation) とは, elementary な自己同型と geometric な同型の有限列:
$$D : M_1 \xrightarrow{\alpha_1} M_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_m} M_{m+1}$$
- 変形 D が δ 変形とは, すべての部分的合成 $\alpha_j \alpha_{j-1} \ldots \alpha_i$, $\alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}^{-1} \ldots \alpha_j^{-1}$ が半径 δ をもつこと.
$\Longrightarrow$ このとき $\alpha = \alpha_m \alpha_{m-1} \ldots \alpha_1$ は δ 同型.
$\Longrightarrow$ このような α を δ 単純同型という.
- 同型 $\alpha : M \to N$, $\alpha' : M' \to N'$ が安定 δ 単純同値 ($\sim_{ss,\delta}$)
$\Longleftrightarrow$ ∃ 幾何的加群 F, G および δ 単純同型 $f : M \oplus F \to N \oplus G$, $g : N \oplus F \to N' \oplus G$ s.t.

$$(\alpha' \oplus 1) f \sim_\delta g(\alpha \oplus 1), \quad g^{-1}(\alpha' \oplus 1) \sim_\delta (\alpha \oplus 1) f^{-1}$$

※ g, g^{-1}: 行基本変形, f, f^{-1}: 列基本変形を与えている.

X の δ 制御 Whitehead 群 $Wh^\delta(X)$

$=$ { X 上の δ 同型たちの全体 }/安定 40δ 単純同値の生成する同値関係

※ 用いる幾何加群は「局所有限」とする.

命題

$\oplus$ により, $Wh^\delta(X)$ は加群になる. また, もし $[\alpha] = [\alpha'] \in Wh^\delta(X)$ ならば α, α' は安定 86δ 単純同値である.

- $[\alpha] + [\alpha^{-1}] = 0$

$$\alpha \oplus \alpha^{-1} \sim_{4\delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha \oplus \alpha^{-1} \sim_{ss,5\delta} 1$$

- 後半: Chapman のトリック

Chapman のトリック

$$[\alpha] = [\alpha'] \in Wh^{\delta}(X) \implies \alpha = \alpha_0 \sim_{ss,40\delta} \alpha_1 \sim_{ss,40\delta} \cdots \sim_{ss,40\delta} \alpha_m$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 1 \\
\sim_{ss,5\delta}\ & \alpha_0 \oplus (\alpha_0^{-1} \oplus \alpha_0) \oplus (\alpha_1^{-1} \oplus \alpha_1) \oplus \cdots \oplus (\alpha_{m-1}^{-1} \oplus \alpha_{m-1}) \\
\sim_{ss,40\delta}\ & \alpha_0 \oplus (\alpha_0^{-1} \oplus \alpha_1) \oplus (\alpha_1^{-1} \oplus \alpha_2) \oplus \cdots \oplus (\alpha_{m-1}^{-1} \oplus \alpha_m) \\
=\ & (\alpha_0 \oplus \alpha_0^{-1}) \oplus (\alpha_1 \oplus \alpha_1^{-1}) \oplus \cdots \oplus (\alpha_{m-1} \oplus \alpha_{m-1}^{-1}) \oplus \alpha_m \\
\sim_{ss,5\delta}\ & 1 \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 1 \oplus \alpha'
\end{aligned}$$

※　ここでは, $\alpha \sim_{ss,50\delta} \alpha'$. もっと一般の時は 86δ が必要.

A, B: X 上の幾何加群

- $p : A \to A$ が δ 射影 $\iff p^2 \sim_\delta p$
- そのとき, (A, p): X 上の δ 射影加群
- 射 $f : (A, p) \to (B, q)$ とは $f : A \to B$ s.t. $qf \sim f,\ fp \sim f$
- "恒等射" $p : (A, p) \to (A, p)$
- 半径 δ の射 $f : (A, p) \to (B, q)$ が δ 同型
  $\iff \exists$ 半径 δ の $g : (B, q) \to (A, p)$ s.t. $gf \sim_{2\delta} p,\ fg \sim_{2\delta} q$
- δ 射影加群 $(A, p), (B, q)$ が安定 δ 同型
  $\iff \exists (F, 1),\ (G, 1)$ s.t. $(A, p) \oplus (F, 1), (B, q) \oplus (G, 1)$ が δ 同型.

$\widetilde{K}_0^\delta(X)$

$=$ { X 上の (局所有限)δ 射影加群たち }/安定 δ 同型の生成する同値関係

命題

$\oplus$ により, $\widetilde{K}_0^\delta(X)$ は加群になる. また, もし $[(A, p)] = [(B, q)] \in \widetilde{K}_0^\delta(X)$ ならば $(A, p), (B, q)$ は安定 3δ 同型である.

マイヤー・ビートリス系列

$X = A \cup B$, $C = A \cap B$ (A, B:閉集合) と書けているとする. このとき, 自然に次の準同型写像たちが定まる

$$Wh^\delta(C) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_A \\ i_B \end{pmatrix}} Wh^\delta(A) \oplus Wh^\delta(B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_A & j_B \end{pmatrix}} Wh^\delta(X)$$

$$\widetilde{K}_0^\delta(C) \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i_A \\ i_B \end{pmatrix}} \widetilde{K}_0^\delta(A) \oplus \widetilde{K}_0^\delta(B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_A & j_B \end{pmatrix}} \widetilde{K}_0^\delta(X)$$

主張

$\exists K > 1$ s.t.
任意の $\delta > 0$, $X = A \cup B$ ($C = A \cap B$), $\varepsilon \geq K\delta$, $W \supset C^{K\delta}$(C の閉 $K\delta$ 近傍) に対して, 準同型写像

$$\partial_+ : Wh^\delta(X) \longrightarrow \widetilde{K}_0^\varepsilon(W)$$

が定まり, これにより K-安定的に完全 (→次ページ) な列を得る.

連続するふたつの写像の合成は 0 であり, 各項において次のようなことが成り立つ：

$Wh^{\delta}(X)$ における K-安定的完全性

$\partial_+ : Wh^{\delta}(X) \longrightarrow \widetilde{K}_0^{\varepsilon}(W)$ の核の安定化写像

$$Wh^{\delta}(X) \longrightarrow Wh^{K\varepsilon}(X)$$

による像は、次の写像の像にはいる.

$$\widetilde{K}_0^{K\varepsilon}(A \cup W^{K\varepsilon}) \oplus \widetilde{K}_0^{K\varepsilon}(B \cup W^{K\varepsilon}) \xrightarrow{(j_{A\cup W^{K\varepsilon}}\ j_{A\cup W^{K\varepsilon}})} \widetilde{K}_0^{K\varepsilon}(X)$$

他の項でも同様.

同型射の分割障害類（やや雑）1/3

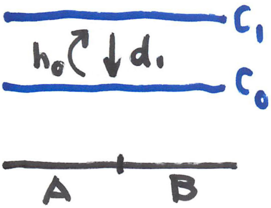
■ $Wh^{\delta}(X)$ の元 α は δ 同型射であたえられるが, これを可縮な 1 次元鎖複体と考える:

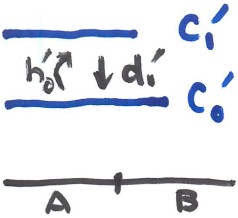
$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

d_1 の逆写像を $h_0 : C_0 \to C_1$ と書き, $h_i = 0$ $(i \neq 0)$ と定めると, $\{h_i\}$ はこの鎖複体の chain contraction $(dh + hd \sim 1)$ を与えている.

■ この鎖複体の部分複体 (C', d') と $h' : C'_0 \to C'_1$ をを次のように定める:

$$C'_1 = C_1|(A \cup C^{2\delta}), \quad C'_0 = C_0|(A \cup C^{3\delta}), \quad d'_1 = d_1|C'_1, \quad h'_0 = h_0|(A \cup C^{\delta})$$





同型射の分割障害類（やや雑）2/3

■ これはもはや可縮ではないが, A 上では $h'_0 d'_1 \sim 1$, $d'_1 h'_0 \sim 1$ が成り立っている.

■ $1 - h'_0 d'_1 : C'_1 \to C'_1$, $1 - d'_1 h'_0 : C'_0 \to C'_0$ はともに A 上では ~ 0.

■ $1 - h'_0 d'_1 : C'_1 \to C'_1$, $1 - d'_1 h'_0 : C'_0 \to C'_0$ らを A 上で 0 と定義し直して $F_i : C'_i \to C'_i$ $(i = 0, 1)$ を定める. 当然 $F_1 \sim 1 - h'_0 d'_1$, $F_0 \sim 1 - d'_1 h'_0$.

■ C' の部分複体 (D, d'') を次のように定める:

$$D_1 = C_1|C^{2\delta}, \quad D_0 = C_0|C^{3\delta}, \quad d''_1 = d_1|D_1 \, .$$

■ 作り方から $F : C' \to C'$ は $f : C' \to D$ を定める. 包含写像 $D \to C'$ を i で書けば, $F = if$ が成り立つ.

同型射の分割障害類（やや雑）3/3

- $h'_i = 0 (i \neq 0)$ と定めると, h' は if と 1 の間の鎖ホモトピーである ($d'h' + h'd' \sim 1 - if$). つまり (D, f, i, h') は C' の domination である. 合成 fi は 1 と鎖ホモトピックとは限らないが, 鎖ホモトピーで idempotent である.

$$(fi)^2 = fifi = f(if)i \simeq fi$$

- (D, f, i, h') を使って, "自由加群" の鎖複体 C' が次の "射影加群" の鎖複体と鎖同値になることがわかる:

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow (D_0 \oplus D_1, 1-p) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1-fi & d'' \end{pmatrix}} (D_0, 1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

$$p = \begin{pmatrix} fi & -d'' \\ -fh'i & 1-fi \end{pmatrix}$$

- $\partial_+(\alpha) = [(D_0 \oplus D_1, p)] \in \widetilde{K}_0^{\varepsilon}(W)$ により, 次が定義される:

$$\partial_+ : Wh^{\delta}(X) \longrightarrow \widetilde{K}_0^{\varepsilon}(W)$$

応用

$X \times \mathbb{R} \supset X \times (-\infty, 0],\ X \times [0, \infty), X \times [a, b]$: 最大値距離, $\delta > 0$

Eilenberg のイカサマ

$$Wh^\delta(X \times (-\infty, 0]) = 0, \qquad Wh^\delta(X \times [0, \infty)) = 0,$$
$$\widetilde{K}_0^\delta(X \times (-\infty, 0]) = 0, \qquad \widetilde{K}_0^\delta(X \times [0, \infty)) = 0$$

$0 < \varepsilon \ll \delta$, $t : [0, \infty) \to [0, \infty)$: ε だけの平行移動
$[\alpha] \in Wh^\delta(X \times [0, \infty))$: 任意にとる

$$\alpha \ \sim_{ss,5\delta}\ \alpha \oplus t_\sharp \alpha^{-1} \oplus t_\sharp^2 \alpha \oplus t_\sharp^3 \alpha^{-1} \oplus \ldots \ \sim_{ss,5\delta}\ 0$$

命題

$$Wh^\delta(X \times [a, b]) = Wh^\delta(X), \qquad \widetilde{K}_0^\delta(X \times [a, b]) = \widetilde{K}_0^\delta(X)$$

応用（続き）

$X \times \mathbb{R} = X \times (-\infty, 0] \cup [0, \infty)$ に対してこれを適用すると……
"安定的な同型" を得る ($\varepsilon \geq K\delta$, $J = [-K\delta, K\delta]$):

$$Wh^{\delta}(X \times \mathbb{R}) \longrightarrow \widetilde{K}_0^{\varepsilon}(X \times J) = \widetilde{K}_0^{\varepsilon}(X)$$

同様に, 次のような "安定的な同型" を得る:

$$Wh^{\delta}_{-i}(X) = Wh^{\delta}(X \times \mathbb{R}^{i+1}) \longrightarrow \widetilde{K}^{\varepsilon}_{-i}(X \times \mathbb{R}^{i}) = \widetilde{K}^{\varepsilon}_{-i}(X)$$

G-T-Y の定理 K

定理 K (G-T-Y)

距離空間 Γ が BG および FDC をもてば, 各 $i \geq 0$ に対し次が成り立つ:

$$\lim_{d\to\infty} Wh^{bdd}_{1-i}(P_d(\Gamma)) = 0, \quad \lim_{d\to\infty} \widetilde{K}^{bdd}_{-i}(P_d(\Gamma)) = 0$$

$$Wh^{bdd}_{1-i}(P_d(\Gamma)) = \lim_{\delta\to\infty} Wh^{\delta}_{1-i}(P_d(\Gamma)), \qquad \widetilde{K}^{bdd}_{-i}(P_d(\Gamma)) = \lim_{\delta\to\infty} \widetilde{K}^{\delta}_{-i}(P_d(\Gamma))$$

主張

$\forall\, \Gamma$ (上の条件), $i \geq 0$, $\delta > 1$, $a > 1$ に対し, $\exists\, b > 1$ s.t. $\forall Z \subset \Gamma$

$$Wh^{\delta}_{1-i}(P_a(Z)) \xrightarrow{0} Wh^{\delta}_{1-i}(P_b(Z))$$

※ $P_a(Z)$, $P_b(Z)$ にはそれぞれ $P_a(\Gamma)$, $P_b(\Gamma)$ の部分距離空間としての距離をいれる.

議論がややこしくなる様々な理由

- $P_a(Z)$ の距離が単体的距離ではない.
- $a < b$ のとき, $P_a(\Gamma)$ は $P_b(\Gamma)$ の部分距離空間ではない.
- $P_a(Z) \cup P_a(Z')$ と $P_a(Z \cup Z')$ は一致しない.
- ...

L 群……
{ ポアンカレ 2 次複体 (鎖複体＋ 2 次構造)}/ポアンカレ・コボルディズム

幾何的加群 (‘自由加群’) を用いて $L_n^\delta(X)$ が定義できる.

$X = A \cup B$, $C = A \cap B$ のときのマイヤー・ビートリス系列:

$$L_n^{\{A,B\},\delta}(C) \to L_n^\delta(A) \oplus L_n^\delta(B) \to L_n^\delta(X) \to L_{n-1}^{\{A\cup W, B\cup W\},K\delta}(W) \to$$

- $K > 1$: ある定数
- $W \supset C^{K\delta}$
- L の肩の $\{A, B\}$ は, 使われている鎖複体が $\widetilde{K}_0^\delta(A)$, $\widetilde{K}_0^\delta(B)$ の中で 0 になることを表している.
- もしある $\varepsilon \gg \delta$ に対して $\widetilde{K}_0^{K\delta}(W) \to \widetilde{K}_0^{K\delta}(W^\varepsilon)$ が 0 写像ならば, K をもっと大きくとりなおして (そして W もとりなおして), 一番右側の項の肩の $\{A \cup W, B \cup W\}$ を取り去ることができる.