春の代数的位相幾何学セミナー

Séminaire de Toplogie Algébrique, Printemps

等角的に euclidean な曲面における正則閉曲線の回転数

山崎　正之

岡山理科大

2016/3/26

目標

M: よいリーマン計量を持つ曲面

γ: M 上の正則閉曲線 (S^1 からの immersion)

$$\longmapsto \textbf{回転数}\ W(\gamma) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \widetilde{M} \neq S^2,\ \gamma \text{ は 向きを保つ} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{上以外} \end{cases}$$

定理

次は同値:

(1) γ_1 と γ_2 は正則ホモトピック.

(2) γ_1 と γ_2 はホモトピック、かつ、$W(\gamma_1) = W(\gamma_2)$.

Whitney の定理

定理 (Whitney の定理, 1937)

ユークリッド平面上の正則閉曲線 γ_1, γ_2 に対して次が成り立つ：

$$\gamma_1 \text{ と } \gamma_2 \text{ は正則ホモトピック} \iff i_{\gamma_1} = i_{\gamma_2} \in \mathbb{Z}$$

ユークリッド平面上の正則曲線の回転数

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{E}^2$: 正則（必ずしも閉ではない）

$e_\gamma(u) = \dfrac{d\gamma}{du} \Big/ \left| \dfrac{d\gamma}{du} \right| = (\cos\theta(u), \sin\theta(u))$: 向き

※**角度関数** $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ は 2π の整数倍だけの自由度を持つ.

定義 (回転数 — i 指数)

$$i_\gamma = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

※ $e_\gamma(a)$ と $e_\gamma(b)$ が同じ向きなら (特に正則閉曲線なら) 整数値

Smale の仕事 (1958)

$$\{[0,1] \looparrowright M\} \to \{[0,1] \to ST(M)\};\ \gamma \mapsto \widehat{\gamma}$$

$x = (p, e) \in ST(M)$ $(p \in M, e \in T_p(M), |e| = 1)$ を固定

- $\pi_0(\{[0,1] \looparrowright M, x \text{ on } \partial\}) \longleftrightarrow \pi_1(ST(M), x)$
- $\pi_2(M) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(ST(M), x) \to \pi_1(M, p)$: exact

γ_i: 正則閉曲線 s.t. $\widehat{\gamma}_i[0] = \widehat{\gamma}_i[1] = x$ $(i = 1, 2)$
$[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(M, p)$

$$\Longrightarrow \mathbb{Z} \ni \exists m \longmapsto [\widehat{\gamma}_1][\widehat{\gamma}_2]^{-1} \longmapsto 1 \in \pi_1(M, p)$$

特に M が aspherical なら、この m は unique。←これは何?

Reinhart(1960)-Chillingworth(1972) の回転数

γ: 曲面 M 上の正則閉曲線
X: M 上のベクトル場 (特異点はたかだかひとつ)
$\Longrightarrow$ $e_\gamma(u)$ と $X(\gamma(u))$ の間の角度関数 θ を使って回転数を定義する。

欠点: γ が正則ホモトピーで変形するとき、もし特異点を通過すると、値が $\chi(M)$ だけジャンプする。つまり、回転数 $\in \mathbb{Z}/\chi(M)\mathbb{Z}$。
しかしいくつかの応用がある。

- M. Abouzaid “On the Fukaya categories of higher genus surfaces” (2008)
- I. Irmer “The Chillingworth class is a signed stable length” (2015)

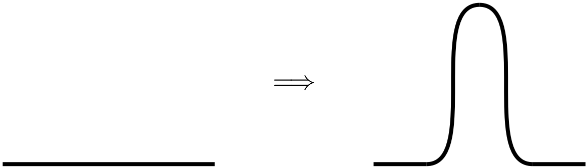
曲面の普遍被覆のよい幾何構造

- ユークリッド的曲面
  - $\widetilde{A} = \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{E}^2, \quad \widetilde{C} = \mathbb{E}^2$
  - $\widetilde{MB} = \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{E}^2, \quad \widetilde{TC} = \mathbb{E}^2$
  - $\widetilde{T} = \mathbb{E}^2$
  - $\widetilde{KB} = \mathbb{E}^2$
- 双曲閉曲面、完備双曲曲面
  - $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \times (0, \infty) \subset \mathbb{E}^2$ (上半平面モデル)
  - $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 = \mathring{D}^2 \subset \mathbb{E}^2$ (Poincaré モデル)
- 球面的曲面 ($* \in S^2$: 南極)
  - $\widetilde{S^2} = \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{S}^2 - * \to \mathbb{E}^2$ (南極からの立体射影)
  - $\widetilde{P^2} = \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{S}^2 - * \to \mathbb{E}^2$ (南極からの立体射影)

※ 赤色の $=$, $\subset$, $\to$ はすべて等角写像.

ホモトピックな γ_1, γ_2 間の正則ホモトピーの構成方針

1. Finger Move で基点を一致させる: 基点 $= p$



2. 必要ならさらに p を基点とする閉曲線にそって Finger Move を行い、$[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(M, p)$ にする。
3. 基点の周りで、局所的な回転により基点における向きを一致させる。
4. 普遍被覆への持ち上げの間の、端点/基点とそこでの向きを止めた正則ホモトピーを作る。

定理 (Whitney の定理の精密化版の拡張)

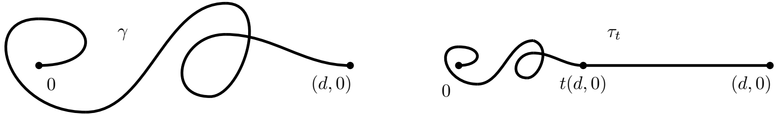
端点および端点における向きが一致する正則平面曲線 γ_1, γ_2 に対して次は同値：

- γ_1 と γ_2 は端点と端点における向きをとめて正則ホモトピック
- $i_{\gamma_1} = i_{\gamma_2} \in \mathbb{R}$

特別な場合に示せば十分 $(d = 10,\ j = 1, 2)$：

- $\gamma_j(a) = 0 = (0, 0),\ \gamma_j(b) = q = (d, 0)$
- $e_{\gamma_j}(a) = e_{\gamma_j}(b) = (1, 0)$
- γ_1, γ_2 は同じ長さ $l(\geq d)$ を持ち、弧長をパラメータとする。

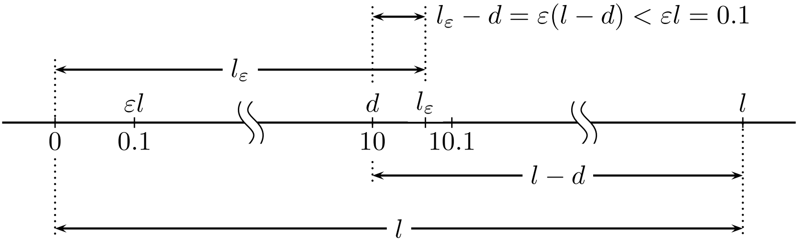
$\gamma = \gamma_j$ に対して、次のような正則ホモトピーを考える：



$$t = \varepsilon := \frac{0.1}{l} \Rightarrow \gamma_j^{\varepsilon}$$

γ_j^{ε} の長さは等しい：$l_{\varepsilon} = \varepsilon l + (1 - \varepsilon)d = d + \varepsilon(l - d)$

また弧長パラメータ s に取り換える $(0 \leq s \leq l_{\varepsilon})$



$$i_{\gamma_1} = i_{\gamma_2} = m$$

$$\theta_{\gamma_j^\varepsilon}(0) = 0, \qquad \theta_{\gamma_j^\varepsilon}(s) = 2m\pi \quad (0.1 \le s \le l_\varepsilon)$$

$$\varphi_t(s) = (1-t)\theta_{\gamma_1^\varepsilon}(s) + t\theta_{\gamma_2^\varepsilon}(s)$$

$$v_t(s) = (\cos\varphi_t(s), \sin\varphi_t(s)) \quad \leftarrow \quad (1,0)\ (0.1 \le s \le l_\varepsilon)$$

$\int_0^s v_t(u)du$: γ_1^ε と γ_2^ε の間の正則ホモトピー

※始点は $(0,0)$ に固定

※端点での向きは $(1,0)$ に固定

終点と $(d,0)$ との差 $\alpha_t^\varepsilon = \int_0^{l_\varepsilon} v_t(u)du - (d,0)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_t^\varepsilon &= \int_0^{0.1} v_t(u)du + \int_{0.1}^{l_\varepsilon} v_t(u)du - (d,0) \\
&= \int_0^{0.1} v_t(u)du + (l_\varepsilon - 0.1, 0) - (d,0) \\
&= \int_0^{0.1} v_t(u)du + (l_\varepsilon - d - 0.1, 0)
\end{aligned}$$

$$|\alpha_t^\varepsilon| \le \int_0^{0.1} |v_t(u)|du + (0.1 - (l_\varepsilon - d)) \le 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$\widetilde{v}_t(s) = v_t(s) - \psi(s)\alpha_t^\varepsilon$ と定める：常に非零ベクトル！
ただし $\psi : [0, l_\varepsilon] \to \mathbb{R}$ は次をみたす滑らかな関数:

- $0 \le \psi(s) \le 1 \quad (0 \le s \le l_\varepsilon)$
- $\psi(s) = 0 \quad (0 \le s \le 7, 9 \le s \le l_\varepsilon)$
- $\int_0^{l_\varepsilon} \psi(s)ds = 1$

端点の付近で $\widetilde{v}_t$ は v_t に一致しており、しかも積分すると終点が $(d, 0)$ になる：

$$\int_0^{l_\varepsilon} v_t(u)du - \left(\int_0^{l_\varepsilon} \psi(u)du\right)\alpha_t^\varepsilon$$
$$= \int_0^{l_\varepsilon} v_t(u)du - \alpha_t^\varepsilon = (d, 0).$$

閉曲線に関する３種類の正則ホモトピー

(1) 基点と基点における向きを止めた正則ホモトピー
(2) 基点を止めた正則ホモトピー
(3) フリーな正則ホモトピー

※ 今の定理から、一般曲面上の正則閉曲線の (1) のタイプの分類が誘導される。（$i_{\widetilde{\gamma}}$ を用いる。ただし、一般に持ち上げ $\widetilde{\gamma}$ の選び方により値が異なる。）

※ 先の例における曲面のうち向き付け可能な曲面および射影平面に対しては、この３つの差はないことがわかる。

(2) のタイプの分類用の回転数 $w(\gamma)$

$\widetilde{\gamma} : [a, b] \to \widetilde{M}$: γ の持ち上げ

γ を基点 p の周りで局所的に角度 α だけ回転してみる。
$\Rightarrow \widetilde{\gamma}$ の端点の近傍も端点のまわりに α だけ回転する。

ただし、両端での回転の向きは……

- γ が向きを保つとき ($\varepsilon_\gamma = 1$) は、一致。
  - $i_{\widetilde{\gamma}} = \dfrac{\theta_{\widetilde{\gamma}}(b) - \theta_{\widetilde{\gamma}}(a)}{2\pi}$ は不変
- γ が向きを逆にするとき ($\varepsilon_\gamma = -1$) は、逆。
  - $i_{\widetilde{\gamma}} = \dfrac{\theta_{\widetilde{\gamma}}(b) - \theta_{\widetilde{\gamma}}(a)}{2\pi}$ は $\pm 2\alpha$ だけ変化

j 指数

そこで、γ が向きを逆にする場合は、$i_{\tilde{\gamma}}$ ではなくて、次の j **指数**を用いて $j_{\tilde{\gamma}}$ を考える。

定義 (回転数 — 平面曲線 γ の j 指数)

$$j_\gamma = \frac{\theta(b) + \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

※ γ の角度関数 θ の取り方は自由度があり、j_γ は mod 2 でのみ well-defined.

※ $\theta(a) = 0$ の場合は $i_\gamma = j_\gamma$.

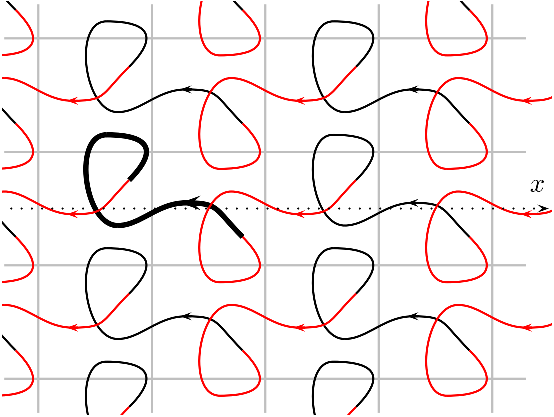
※ 以下, $M \neq S^2, P$ の場合のみ考察する。

曲面 M 上の正則閉曲線 γ の持ち上げたちは、$\widetilde{M}$ の被覆変換で互いに移りあう。

M のリーマン計量から誘導される計量を $\widetilde{M}$ に与えるとき、持ち上げたちはその計量で合同である。ただし、向き付け不可能な場合は、向きを保つ合同変換と向きを逆にする合同変換の２種類がある。

これらの変換は、$\widetilde{M} \subset \mathbb{E}^2$ により持ち上げたちを $\mathbb{E}^2$ の曲線と考えると、一般には合同変換ではない。

ただし、ユークリッド的な計量を持つ場合は持ち上げはすべて互いに合同である。



KB 上のある曲線の持ち上げたち

同じ色の持ち上げ同士は同じ i 指数をもち、色が違えば符号が逆になっている。(j 指数は同じ)

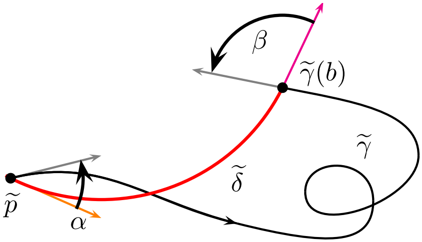
$\gamma(a) = p$: γ の始点

$\widetilde{\gamma} : [a, b] \to \widetilde{M}$: γ の持ち上げ, $\widetilde{\gamma}(a) = \widetilde{p}$

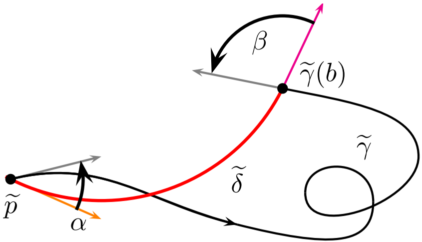
$\widetilde{\delta} : [a, b] \to \widetilde{M}$: $\widetilde{\gamma}(a), \widetilde{\gamma}(b)$ を結ぶ $\widetilde{M}$ の最短測地線

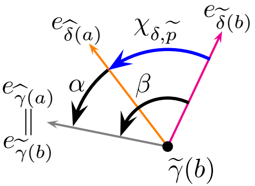
$\delta = p_M \circ \widetilde{\delta} : [a, b] \to M$: p を基点とし、γ と基点をとめてホモトピックな測地線。角があるかも。

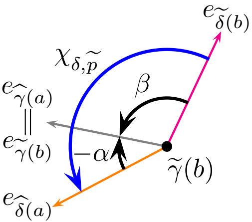
$\widehat{\delta} : [a, b] \to \widetilde{M}$: $\widetilde{\gamma}(b)$ を始点とする δ の持ち上げ



δ の外角 $-\pi < \chi_{\delta,\widetilde{p}} < \pi$







$$\chi_{\delta,\widetilde{p}} \equiv \beta - \varepsilon_\gamma \alpha \bmod 2\pi$$

定義 (回転数 $w_{\widetilde{p}}(\gamma)$)

- $[\gamma] = 1 \in \pi_1(M, p)$ のとき
  $w_{\widetilde{p}}(\gamma) = i_{\widetilde{\gamma}} \in \mathbb{Z}$

- $[\gamma] \neq 1 \in \pi_1(M, p)$ のとき

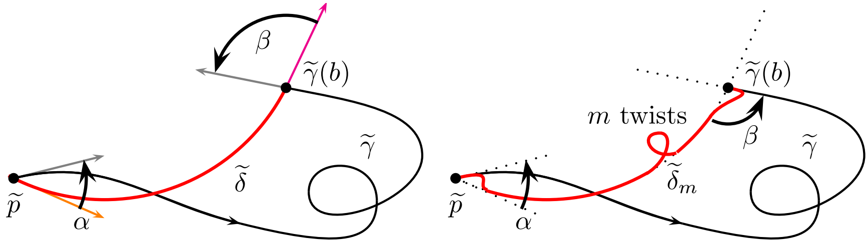
$$w_{\widetilde{p}}(\gamma) = \begin{cases} i_{\widetilde{\gamma}} - \left(i_{\widetilde{\delta}} + \dfrac{\chi_{\delta,\widetilde{p}}}{2\pi} \right) & \varepsilon_\gamma = 1 \text{ のとき} \\ j_{\widetilde{\gamma}} - \left(j_{\widetilde{\delta}} + \dfrac{\chi_{\delta,\widetilde{p}}}{2\pi} \right) \mod 2 & \varepsilon_\gamma = -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

※ $\widetilde{p}$ の取り方によるのは、M が向き付け不可能で γ が向きを保つときだけ.

※ $\varepsilon_\gamma = 1$ のとき、$w_{\widetilde{p}}(\gamma) \in \mathbb{Z}$.

※ $\varepsilon_\gamma = -1$ のとき、$w_{\widetilde{p}}(\gamma) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\widetilde{\delta}$ を下図のように変形して $\widetilde{\delta}_m$ を作り、$i_{\widetilde{\delta}_m} = i_{\widetilde{\gamma}}$ とする。



$$\theta_{\widetilde{\delta}_m}(b) = \theta_{\widetilde{\delta}}(b) + 2m\pi + \beta \quad \text{i.e.} \quad \theta_{\widetilde{\delta}_m}(b) - \theta_{\widetilde{\delta}}(b) = 2m\pi + \beta \qquad (1)$$

$$\theta_{\widetilde{\delta}_m}(a) = \theta_{\widetilde{\delta}}(a) + \alpha \quad \text{i.e.} \quad \theta_{\widetilde{\delta}_m}(a) - \theta_{\widetilde{\delta}}(a) = \alpha \qquad (2)$$

(1)−(2) $\quad i_{\widetilde{\gamma}} - i_{\widetilde{\delta}} = i_{\widetilde{\delta}_m} - i_{\widetilde{\delta}} = m + \dfrac{\beta - \alpha}{2\pi} \equiv_{(1)} m + \dfrac{\chi_{\delta,\widetilde{p}}}{2\pi}$

(1)+(2) $\quad j_{\widetilde{\gamma}} - j_{\widetilde{\delta}} \equiv_{(2)} j_{\widetilde{\delta}_m} - j_{\widetilde{\delta}} \equiv_{(2)} m + \dfrac{\beta + \alpha}{2\pi} \equiv_{(1)} m + \dfrac{\chi_{\delta,\widetilde{p}}}{2\pi}$

ここまでくれば、次は容易に示される。

定理

γ_1, γ_2: M の正則閉曲線, 基点 $= p$
$\widetilde{p}$: p の $\widetilde{M}$ への持ち上げ
次は同値：

- γ_1 と γ_2 は基点を止めて正則ホモトピック
- $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(M, p)$ かつ $w_{\widetilde{p}}(\gamma_1) = w_{\widetilde{p}}(\gamma_2)$

定理

γ: p を基点とする M の正則閉曲線
$\widetilde{p}, \widehat{p}$: p の $\widetilde{M}$ への持ち上げ

$$\Rightarrow \quad w_{\widetilde{p}}(\gamma) = \begin{cases} w_{\widehat{p}}(\gamma) & \widetilde{p} \text{ と } \widehat{p} \text{ は同じ向き} \\ -w_{\widehat{p}}(\gamma) & \widetilde{p} \text{ と } \widehat{p} \text{ は逆の向き} \end{cases}$$

系

M が向き付け可能な場合、および、M が向き付け不可能で γ が向きを逆にする場合、$w_{\widetilde{p}}(\gamma)$ は $\widetilde{p}$ の取り方によらない。

定理の証明

$\widetilde{\gamma}, \widehat{\gamma}$: $\widetilde{p}, \widehat{p}$を始点とする持ち上げ
（ともに $\widetilde{M}$ の計量では合同な曲線）

$[\gamma] = 1 \in \pi_1(M, p)$ のとき:
ともに平面の正則閉曲線
'squeeze' して持ち上げを比較
$\Rightarrow$ ユークリッド計量でも、ほとんど相似

$[\gamma] \neq 1 \in \pi_1(M, p)$ かつ $\varepsilon_\gamma = 1$ のとき:

$$i_{\widetilde{\gamma}} - i_{\widetilde{\delta}} = m + \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \Rightarrow i_{\widetilde{\gamma}} - i_{\widetilde{\delta}} = \pm(i_{\widehat{\gamma}} - i_{\widehat{\delta}})$$

δ の外角も局所的な情報で定義されている

$$\Rightarrow \chi_{\delta,\widetilde{p}} = \pm\chi_{\delta,\widehat{p}} \quad (\pm \text{ は上と同順})$$

$\varepsilon_\gamma = -1$ のときも j に対して同様の議論をすればよい。

□

free な正則ホモトピー

p_1 を基点とする γ_1 を (free な) 正則ホモトピーで p_2 を基点とする γ_2 に変形したとする。
そのホモトピーは持ち上げ $\widetilde{\gamma}_1$ の正則ホモトピーに持ち上がる。その他端を $\widetilde{\gamma}_2$ とすると次を得る：

$$w_{\widetilde{p}_1}(\gamma_1) = w_{\widetilde{p}_2}(\gamma_2)\,.$$

ただし, $\widetilde{p}_j$ は $\widetilde{\gamma}_j$ の始点 $(j = 1, 2)$.

したがって、M が向き付け可能な場合、および M が向き付け不可能で γ が向きを逆にする場合、$W(\gamma)$ を $w_{\widetilde{p}}(\gamma)$ で定めればこれは正則ホモトピーについての**不変量**となる。

M が向き付け不可能で γ が向きを保つ場合 (1)

γ の持ち上げは２種類あり、$w_{\widetilde{p}}(\gamma)(\in \mathbb{Z})$ の符号が逆になっている。

定義

γ が reversible $\Leftrightarrow \exists[\xi] \in \pi_1(M, p)$ (向きを逆にする)

s.t. $[\xi\gamma\bar{\xi}] = [\gamma] \in \pi_1(M, p)$

※ reversibility は (正則) ホモトピーで不変。

※ reversible な γ を上のような ξ に沿って finger move を行ったものを γ' とすると、$w_{\widetilde{p}}(\gamma') = -w_{\widetilde{p}}(\gamma)$。

定義 (γ が reversible の場合の $W(\gamma)$)

$$W(\gamma) = |w_{\widetilde{p}}(\gamma)| \in \mathbb{Z}_+$$

M が向き付け不可能で γ が向きを保つ場合 (2)

以下の２つを固定：

γ_0: 向きを保ち reversible でないループ

$\widetilde{\gamma}_0$: その持ち上げ

定義 (自由な回転数 $W_{\widetilde{\gamma}_0}(\gamma)$)

γ: γ_0 と閉曲線として自由にホモトピックな正則閉曲線

$H : \gamma_0 \simeq \gamma$: 自由なホモトピー

$\widetilde{H} : \widetilde{\gamma}_0 \simeq \widetilde{\gamma}$: H の持ち上げ

$\widetilde{p}$: $\widetilde{\gamma}$ の始点

$$W_{\widetilde{\gamma}_0}(\gamma) = w_{\widetilde{p}}(\gamma) \in \mathbb{Z}$$

※　H の取り方によらない。

$M = S^2$, P の場合

$\widetilde{M} = S^2$
$\widetilde{\gamma}$ は南極 $(*)$ を通らないとしてもよい。
立体射影 $S^2 - * \to \mathbb{R}^2$ で $\widetilde{\gamma}$ を $\mathbb{R}^2$ の曲線と考える。

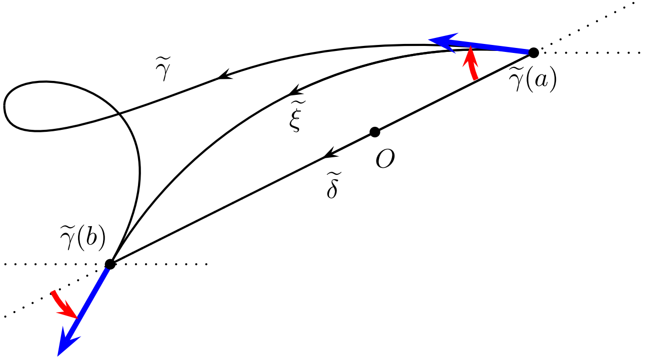
定義 (γ が null-homotopic な場合)

$$w(\gamma) = W(\gamma) = i_{\widetilde{\gamma}} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

※ $\widetilde{\gamma}$ は閉曲線。
※ $\widetilde{\gamma}$ の正則ホモトピーが $*$ を通過するとき、回転数 $i_{\widetilde{\gamma}}$ が ± 2 変化する。

$M = P$ で γ が null-homotopic でない場合

$\widetilde{\gamma}$ は S^2 上の対蹠点を結ぶ曲線となる。
端点を結ぶ測地線をふたつ $(\widetilde{\delta}, \widetilde{\xi})$、図のように選ぶ。



定義

$$w(\gamma) = W(\gamma) = j_{\widetilde{\gamma}} - j_{\widetilde{\delta}} = i_{\widetilde{\gamma}} - i_{\widetilde{\xi}} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$