Surgery Theory and Geometry

Masayuki Yamasaki (山崎正之)
Dept. of Math., Josai University (城西大学理学部数学教室)

This is a brief survey of surgery theory. The first part describes the classical surgery theory. The second part describes the developments in the last 10 years mainly concerning controlled surgery theory.

1 古典的手術理論

1.1 既存のテキスト・解説書

最初に, 手術に関連した書籍で専門的すぎないものを紹介したい. 私が大学院生の頃には既に教科書 (?) として次の 3 冊があった：

[24] C. T. C. Wall, Surgery on Compact Manifolds (1970)

[1] W. Browder, Surgery on Simply-Connected Manifolds (1972)

[9] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothing, and Triangulations (1977)

その後, 1980 年代初頭の (やや専門的だが)

[17] A. Ranicki, Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery (1981)

や, 1990 年代の

[7] S. C. Ferry, A. Ranicki, and J. Rosenberg (eds.), Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity (1993)

[25] S. Weinberger, The Topological Classification of Stratified Spaces (1994)

[20] A. A. Ranicki (ed.), The Hauptvermutung Book (1996)

などが出版された. また 1999 年には, Wall の本の第 2 版が Ranicki の若干の注釈つきで出版された.

2000 年代の最初には, 手術理論の誕生 40 周年と C. T. C. Wall の還暦を記念して,

[3] S. Cappell, A. Ranicki, J. Rosenberg (eds.), Surveys on Surgery Theory (Volume 1:2000, Volume 2:2001)

の 2 巻が出た. ページ数総計は 900 ページ近く, 28 のサーベイ記事からなっている. 1960 年代の手術理論を振り返る記事から、将来の展望を行う記事 [23]、そしてありとあらゆる応用に関する記事が満載である.

また, 2001 年初夏に Trieste の ICTP で "School on high-dimensional manifold theory" が 3 週間にわたり開催された. 最初の 2 週間は大学院生向けの入門集中講義が行われ, 最後の週は通常の研究集会が行われたようだ. 前半部分の講義ノートは ITCP のサイトで公開されている：

[5] F. T. Farrell, L. Göttshe, and W. Lück (eds.), Topology of High-Dimensional Manifolds, ICTP Lecture Notes Series Vol.9
`http://www.ictp.trieste.it/~pub_off/lectures/vol9.html`

また研究集会のほうの会議録は

[6] F. T. Farrell and W. Lück (eds.), Proceedings 2001 ICTP School on High-dimensional Manifold Topology, (2003)

として出版されている．

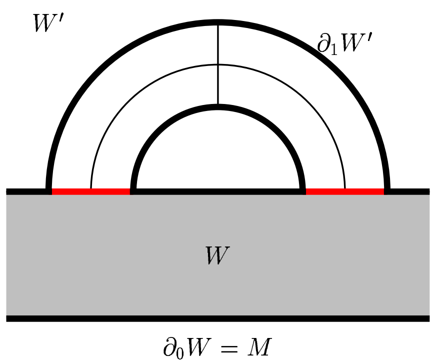
「[3] と [5] を読んで下さい」と言えば手術理論に関する紹介は終わってしまうと言ってもよいのだが, それではあんまりなので, まず前半で, 古典的手術理論の基礎の中で後の発展に関係する部分を抜き出して復習し, 後半は自分のやっている幾何学的制御の概念をもつ「制御手術理論」の最近の発展を中心に解説することにする．

1.2 手術

n 次元の多様体 M が与えられとする．M と単位区間 $I = [0,1]$ の直積 $W = M \times I$ を考える．その境界 ∂W は $\partial_0 W = M \times \{0\} = M$ と $\partial_1 W = M \times \{1\}$ に分かれている．そこに $(n+1)$ 次元の i ハンドルとよばれるものを用意する：$h = D^i \times D^{n+1-i}$．ただし i は $0 \leq i \leq n+1$ をみたす整数である．その境界を $\partial_0 h = S^{i-1} \times D^{n+1-i}$ と $\partial_1 h = D^i \times S^{n-i}$ とにわける．埋め込み写像 $\varphi : \partial_0 h \to \partial_1 W$ が与えられたとして、それによって h を W に貼り付けて得られる多様体を W' と書くことにすると, その境界は $\partial_0 W' = \partial_0 W = M$ と

$$\partial_1 W' = (\partial_1 W - \varphi(S^{i-1} \times \mathrm{int}(D^{n+1-i}))) \cup D^i \times S^{n-i} = M'$$

に分かれる．



このようにして, またはこの操作を繰り返して, M から新しい多様体 M' を構成することを**手術**とよぶ．M と M' を境界とする $n+1$ 次元の多様体 W' は M と M' の間のコボルディズムになっているわけだが, これを手術の**トレース**という．実際には別の空間 X への写像 $f : M \to X$ が与えられていて, f が連続写像 $F : W' \to X \times [0,1]$ に拡張するような手術を考え F の M' への制限 $f' : M' \to X = X \times \{1\}$ が何らかな意味で f を改善したものになるように用いる．なお, このような F は f と f' の間の**ボルディズム**と呼ばれる．手術が多様体の分類にどのように使われるのかを次節以下で説明する．

1.3 Poincaré 複体と 法写像

与えられた有限 CW 複体 X が滑らかな n 次元閉多様体のホモトピー型をもつための条件を考えてみる．まず第一に, 多様体は Poincaré 双対性をもつのであるから, X は **Poincaré 複体**でなければならない．つまり次の写像が $\mathbb{Z}\pi_1(X)$ 加群の同型になるようなホモロジー類 $[X] \in H_n(X;\mathbb{Z})$ が存在する：

$$[X]\cap : H^{n-*}(\widetilde{X};\mathbb{Z}) \to H_*(\widetilde{X};\mathbb{Z}) \ .$$

ただし $\widetilde{X}$ は X の普遍被覆を表す．というか, 鎖複体レベルで、

$$\tilde{\xi}\cap : C^{n-*}(\widetilde{X};\mathbb{Z}) \to C_*(\widetilde{X};\mathbb{Z})$$

が鎖ホモトピー同値になるような輪体 $\xi \in C_n(X;\mathbb{Z})$ が存在すると考えてもよい．以下 X は上の条件を満たすとする．X を十分高い次元の球面 S^{n+k} に埋め込み, 正則近傍 N を考える．変形レトラクション $N \to X$ の境界 ∂N への制限 $\nu_X : \partial N \to X$ を考える．∂N をそれとホモトピー同値なある空間 E [1]で置き換えることにより, ν_X をファイブレーションと思うことができ, そのファイバー ($\nu_X : \partial N \to X$ の**ホモトピー・ファイバー**とよばれる) は S^{k-1} とホモトピー同値である．つまりホモトピー的には ν_X は球面をファイバーとするファイブレーションである．さらに, 球面の次元をあげると各ファイバーがその懸垂で置き換わることがわかるが, このファイブレーションは上の意味で安定的なファイバーホモトピー同値のもとでユニークである．これを X の **Spivak ファイブレーション**とよぶ.

安定球面ファイブレーションの分類空間は BG (場合によっては BF) と書かれ, X 上の安定球面ファイブレーションのファイバーホモトピー同値類の全体は $[X;BG]$ (X から BG への連続写像のホモトピー類全体) と同一視される．また BG のホモトピー群は球面の安定ホモトピー群である．

X が滑らかな多様体の場合, Spivak ファイブレーションは X の法バンドルに随伴する球面バンドルに他ならない．従って, X が滑らかな多様体とホモトピー同値であるためには ν_X の分類写像 (これも ν_X で表す) は BO への写像 η にリフトしなければならない:

$$\begin{tikzcd} & BO \arrow[d] \\ X \arrow[ur, dashed, "\eta"] \arrow[r, "\nu_X"'] & BG \ . \end{tikzcd}$$

以下, リフト η の存在を仮定する．(リフトは複数存在するかもしれないが, ひとつを固定する．) このとき, それに対応して次のような法写像とよばれるもので次数が 1 のものを構成することができる:

定義 1.1. (1) 滑らかな n 次元多様体 M から n 次元 Poincaré 複体 X への**法写像** $(f, b) : M \to X$ とは, 写像 $f : M \to X$ と, M の安定法束 $\nu_M : M \to BO$ から X 上のあるベクトル束 $\eta : X \to BO$ への安定な束写像 $b : \nu_M \to \eta$ で f を覆うものの組をいう.
(2) ふたつの法写像 $(f : M \to X, b : \nu_M \to \eta)$, $(f' : M' \to X, b' : \nu_{M'} \to \eta')$ が**法同境**であるとは, f と f' の間のボルディズム $F : W \to X \times I$, $X \times I$ 上のベクトル束 H, および F を覆う安定な束写像 $B : \nu_W \to H$ で両端への制限が b, b' になるものが存在することをいう．X への法写像で次数が 1 のものの法同境類全体の集合を $\mathcal{N}(X)$ で表す.

[1]一般に連続写像 $p : Y \to X$ が与えられたとき, $E = \{(\gamma, y) | y \in Y,\ \gamma : I \to X,\ \gamma(1) = p(y)\}$, $p' : E \to X;\ (\gamma, y) \to \gamma(0)$ と定めると E は Y にホモトピー同値であり, p' はファイブレーションである.

構成は次のようにして行う．まず, ν_X の Thom 空間 $T(\nu_X)$ を $N/\partial N$ で定める．すると S^{n+k} における N の内部の補集合を一点につぶすことにより写像 $\rho_X : S^{n+k} \to T(\nu_X)$ を得る．$T(\nu_X)$ は, ベクトル束 η の Thom 空間 $T(\eta)$ とホモトピー同値になるので, その写像を合成して $\rho : S^{n+k} \to T(\eta)$ を得る．ρ を零切断 $X \subset T(\eta)$ に横断的にすることにより, 法写像 $M = \rho^{-1}(X) \to X$ を得る．

定理 1.2. X の Spivak ファイブレーションの BO へのリフトが存在するとき, リフトのホモトピー類全体は, X から写像 $BO \to BG$ のホモトピー・ファイバー G/O への連続写像のホモトピー類全体の集合 $[X; G/O]$ とみなすことができ, さらに $[X, G/O]$ と $\mathcal{N}(X)$ は 1 対 1 に対応する．

この法写像 (f, b) が手術の対象である．もし手術により f からホモトピー同値写像 $f' : M' \to X$ へ変形できるのなら, X は多様体とホモトピー同値であることになる．そのような手術が実際に可能であるための障害類が Wall の L 群と呼ばれる可換群の中に定まる．

1.4 Wall の L 群

n 次元の手術の障害類は Wall の L_n 群に定まる．以下では, 対合をもつ環 Λ に対する偶数次元の L 群 $L_{2m}(\Lambda)$ の定義を紹介する．奇数次元の $L_{2m+1}(\Lambda)$ に関しては定義を省略するが, 後で紹介する Ranicki による統一的な方法による定義を用いれば偶数・奇数で場合分けする必要はなくなる．

1 を持つ環 A の**対合**とは $a \in A$ を $\overline{a} \in A$ に移す対応で

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{ab} = \overline{b} \cdot \overline{a}, \quad \overline{\overline{a}} = a, \quad \overline{1} = 1$$

をみたすもののことを言う (群環 $A = \mathbb{Z}\pi$ の場合, 例えば $\sum_{g \in \pi} m_g g \mapsto \sum_{g \in \pi} m_g g^{-1}$ は上の条件を満たしている)．左 A 加群 K の双対 $K^* = \mathrm{Hom}_A(K, A)$ の左 A 加群構造を, 対合を用いて, $(af)(x) = f(x) \cdot \bar{a}$ と定めることができる．

定義 1.3. K は有限生成自由左 A 加群とする．写像 $\lambda : K \times K$ が

- $\psi(x + x', y) = \psi(x, y) + \psi(x', y)$, $\psi(x, y + y') = \psi(x, y) + \psi(x, y')$
- $\psi(ax, by) = b\psi(x, y)\bar{a}$

をみたすとき, λ は A 上の**半双線形形式**という．さらに, $\eta = \pm 1$ とし[2],

- $\lambda(y, x) = \eta\overline{\lambda(x, y)}$

が成り立つとき, λ は η **エルミート形式**であるという．エルミート形式 λ を与えることは, それに随伴する A 加群準同型写像 $\lambda : K \to K^*$ を与えることにほかならないので, この両者は区別なく用いることにする．$\lambda : K \to K^*$ が同型であるとき, λ は**非退化**であるという．

定義 1.4. $\eta = \pm 1$ とする．A 上の**非退化** η **2 次形式** (K, λ, μ) とは,

- 有限生成自由左 A 加群 K,
- K 上の非退化 η エルミート形式 $\lambda : K \times K \to A$
- λ に付随する 2 次関数 $\mu : K \to Q_\eta(A) = A/\{b - \eta\bar{b} | b \in A\}$
  - $\lambda(x, x) = \mu(x) + \eta\overline{\mu(x)} \in Q^\eta(A) = \{a \in A | \eta\bar{a} = a\}$ [3],

[2] 前節のリフトの文字とかぶって申し訳ありません．

[3] $a \mapsto a + \eta\bar{a}$ は準同型写像 $Q_\eta(A) \to Q^\eta(A)$ を定めます！

– $\mu(x+y)-\mu(x)-\mu(y)=\lambda(x,y)\in Q_\eta(A)$,

– $\mu(ax)=a\mu(x)\bar{a}\in Q_\eta(A)$,

の組をいう.

定義 1.5. (1) 有限生成自由左 A 加群 L に対して, 非退化 η 2 次形式 $H_\eta(L)=(L\oplus L^*,\lambda,\mu)$ を

$$\lambda=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \eta & 0\end{pmatrix}: L\oplus L^*\to(L\oplus L^*)^*=L^*\oplus L\ ,\quad \mu(x,f)=f(x)$$

で定める.
(2) 非退化 η 2 次形式 (K,λ,μ), (K',λ',μ') が**同境**であるとは, ある有限生成自由左 A 加群 L, L' に対し

$$(K,\lambda,\mu)\oplus H_\eta(L)\cong(K',\lambda',\mu')\oplus H_\eta(L')$$

となることをいう.
(3) 非特異 $(-1)^m$ 2 次形式 (K,λ,μ) の同境類の全体を $L_{2m}(A)$ と書く. これは直和によってアーベル群となる.

$m\geq 3$ とする. 次数 1 の法写像 $(f:M^{2m}\to X,b)$ が与えられたとき, 手術を繰り返すことにより, $f:M\to X$ を m 連結 $(\pi_i(f)=0,\, i\leq m)$ にすることができる. さらに $(m+1)$ 連結にするための障害類が, 交叉と自己交叉を用いて $L_{2m}(\mathbb{Z}\pi_1(X))$ の中に定義することができる. この障害類が消えていれば f を手術によりホモトピー同値写像に変形することができることになる.

$\mathbb{Z}$ に自明な対合を与える. $[K,\lambda,\mu]\in L_{4k}(\mathbb{Z})$ をとると, 定義より λ は偶形式となり符号数 $\sigma(\lambda)$ は 8 の倍数になるので, $\sigma(\lambda)/8\in\mathbb{Z}$ が定まり, これが同型 $L_{4k}(\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ を与える. また, $[K,\lambda,\mu]\in L_{4k+2}(\mathbb{Z})$ に対してはその Arf 不変量 $\mathrm{Arf}(K,\lambda,\mu)$ を対応させることにより, 同型 $L_{4k+2}(\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる.

手術とはやや話がそれるが, これに関連して古典的な結び目 $k\subset S^3$ を考えてみる. k にザイフェルト膜 S を張る. $K=H_1(S;\mathbb{Z})$ とおくと, 交叉数により非退化な (-1) エルミート形式 $\lambda:K\times K\to\mathbb{Z}$ が定まり, mod 2 自己絡み数により λ に付随する 2 次関数 $\mu:K\to Q_{-1}(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が定まる. こうして得られる非退化 (-1) 2 次形式 (K,λ,μ) の Arf 不変量 $(\in L_2(\mathbb{Z}))$ が結び目 k の Arf 不変量である. ところで, K にはザイフェルト形式とよばれる半双線形形式 $\psi_0:K\times K\to\mathbb{Z}$ が $\psi_0([c],[d])=lk(c^+,d)$ によって定まる. ただし, c^+ はサイクル c を S の表側に押し出したもので, lk は S^3 における絡み数を表すものとする. このとき, 等式

$$\lambda(x,y)=\psi_0(x,y)-\psi_0(y,x)\in\mathbb{Z},\quad \mu(x)=\psi_0(x,x)\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

が成り立つ. つまり (K,λ,μ) は (K,ψ_0) によって完全に記述される.

これと同様なことが一般の (K,λ,μ) に対しても成り立つ. つまり, A 上の非特異 η 2 次形式 (K,λ,μ) に対して, 半双線形形式 $\psi_0:K\times K\to A$ で

$$\lambda(x,y)=\psi_0(x,y)+\eta\,\overline{\psi_0(y,x)}\in Q^\eta(A),\quad \mu(x)=\psi_0(x,x)\in Q_\eta(A)$$

をみたすものが存在する. 逆に K 上の任意の双線形形式 (K,ψ_0) に対して上の式で λ と μ を定めることができるので, そのようにして得られる λ が非退化であるときに (K,ψ_0) を非退化 η 2 次形式と呼ぶことにしてもよい.

例. (1) $L_0(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ の生成元 1 は次の行列で与えられるような $\mathbb{Z}$ 上の非退化 $(+1)$ 2 次形式 $(\mathbb{Z}^8,\psi_0)$ で代表される (対応する λ も並べてある):

$$\psi_0=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad \lambda=\begin{pmatrix}2&0&0&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0&0&0\\0&1&2&1&0&0&0&0\\1&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&1&0&0\\0&0&0&0&1&2&1&0\\0&0&0&0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

(2) $L_2(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元 $\bar{1}$ は次の行列で与えられるような $\mathbb{Z}$ 上の非退化 (-1) 2 次形式 $(\mathbb{Z}^2,\psi_0)$ で代表される (対応する λ も並べてある):

$$\psi_0=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad \lambda=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

(3) L を有限生成自由左 A 加群とする．非退化 η 2 次形式 $H_\eta(L)=(L\oplus L^*,\lambda,\mu)$ は, 次のような ψ_0 に対応している:

$$\psi_0=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ :\ L\oplus L^*\to L^*\oplus L\ .$$

1.5　Ranicki の 2 次複体

前節では 2 次形式を用いて $L_{2m}(A)$ を定義した．$L_{2m+1}(A)$ の定義は省略するが, この節では Ranicki の 2 次複体の理論 [17] [18] を解説し, $L_n(A)$ と同型になる群を定義する．A は引き続き対合をもつ環とし, $\eta=\pm1$ とする．

n 次元有限生成自由左 A 加群鎖複体

$$C\ :\ \cdots\to 0\to C_n\xrightarrow{d}C_{n-1}\to\cdots\to C_1\xrightarrow{d}C_0\to 0\to\dots$$

に対し, その n **双対** C^{n-*} を $(C^{n-*})_r=C^{n-r}=(C_{n-r})^*$ および

$$d_{C^{n-*}}=(-1)^r d^*\ :\ (C^{n-*})_r=C^{n-r}\to C^{n-r+1}=(C^{n-*})_{r-1}$$

で定める．次に $T_\eta:\mathrm{Hom}_A(C^p,C_q)\to\mathrm{Hom}_A(C^q,C_p)$ を $T_\eta(\phi)=\eta(-1)^{pq}\phi^*$ で定める．

定義 1.6. A 上の n **次元** η **2 次複体** (C,ψ) とは, n 次元有限生成自由左 A 加群鎖複体 C と A 加群準同型写像の列 $\psi=\{\psi_s:C^{n-r-s}\to C_r\}_{s\geq 0}$ で次をみたすものの対のことをいう:

$$d\psi_s+(-1)^r\psi_s d^*+(-1)^{n-s-1}(\psi_{s+1}+(-1)^{s+1}T_\eta\psi_{s+1})=0\ :\ C^{n-r-s-1}\to C_r\ .$$

このとき, $(1+T_\eta)\psi_0:C^{n-*}\to C$ は鎖写像になるが, これが鎖同値であるとき (C,ψ) は **Poincaré** であるという．また A 上の $(n+1)$ **次元** η **2 次複体対** $(f:C\to D,(\delta\psi,\psi))$ とは, n 次元有限生成自由左 A 加群鎖複体 C から $(n+1)$ 次元有限生成自由左 A 加群鎖複体 D への鎖写像 $f:C\to D$ および A 加群準同型写像の集合

$$\{\delta\psi_s:D^{n+1-r-s}\to D_r,\ \psi_s:C^{n-r-s}\to C_r\}_{s\geq 0}$$

で ψ_s は上の式をみたし $\delta\psi_s$ は次をみたすものの対のことをいう:

$$d\delta\psi_s + (-1)^r \delta\psi_s d^* + (-1)^{n-s}(\delta\psi_{s+1} + (-1)^{s+1} T_\eta \delta\psi_{s+1}) + (-1)^n f\psi_s f^* = 0 \ : \ D^{n-r-s} \to D_r \ .$$

このとき $((1+T_\eta)\delta\psi_0 \quad f(1+T_\eta)\psi_0) : \mathcal{C}(f)^{n+1-*} \to D$ は鎖写像になるが, これが鎖同値であるとき $(f, (\delta\psi, \psi))$ は **Poincaré** であるという．(C, ψ) は自動的に Poincaré になる．

注意. (1) 0 次元 Poincaré η 2 次複体 (C, ψ) は非退化 2 次形式 $(C_0, \psi_0 : C_0^* \to C_0)$ に他ならない．
(2) Poincaré 2 次複体対が定義されたので, Poincaré 2 次複体対の間の**同境**の概念も定義できる．
(3) A 上の n 次元 Poincaré η 2 次複体の同境類を $L_n(A, \eta)$ とかく．$L_n(A, \eta)$ は直和による群の構造をもち, 同型 $L_n(A, +1) \cong L_n(A)$ が成り立つ．実際 (1) やその類似により $L_0(A, +1) = L_0(A)$, $L_0(A, -1) = L_2(A)$, さらに右辺の定義は紹介していないが $L_1(A, +1) = L_1(A)$, $L_1(A, -1) = L_1(A)$ がわかり, このことと Ranicki の群の 2 周期性 $L_n(A, -1) \cong L_{n+2}(A, +1)$ から同型が導かれる．以降 $\eta = 1$ の場合は $+1$ を省略して, 二つの群を区別しない．
(4) 法写像が与えられたときその手術障害類を計算するにはまず中間次元未満の手術を実行しなければならない．しかし, Ranicki の群を用いれば与えられた法写像のデータから直接障害類を求めることができる．もちろん, その障害類を $L_n(\mathbb{Z}\pi)$ $(0 \le n \le 3)$ の中に求めるためには, 2 周期性を用いなければならないが, 実はその証明には 2 次複体に関する代数的な「中間次元未満の手術」を用いる必要がある．
(5) $L_{2m+1}(\mathbb{Z}) = 0$ である．

1.6 手術の完全列

定義 1.7. X を n 次元 Poincaré 複体とするとき, X の**構造集合** $\mathcal{S}(X)$ を

$$\mathcal{S}(X) = \{f : M^n \to X \mid \ M^n : \text{滑らかな } n \text{ 次元閉多様体}, \ f : \text{ホモトピー同値写像}\}/\sim$$

で定める．ただしボルディズム $(F; f, f') : (W; M, M') \to X \times (I; \{0\}, \{1\})$ で $(W; M, M')$ が h 同境であるようなものがあるとき, $f : M \to X$ と $f' : M' \to X$ は同値とする．

X の Spivak ファイブレーション $\nu_X : X \to BG$ が BO にリフトし, さらにリフトたちの中に, 対応する法写像の手術障害類が消えるものがあれば $\mathcal{S}(X)$ が空でない．つまり X は滑らかな閉多様体のホモトピー型を持つ．以下, X は多様体とした場合を考える．

定理 1.8. (Browder, Novikov, Sullivan, Wall) $n \ge 5$ とする．X は n 次元の滑らかな閉多様体とし, $\pi = \pi_1(X)$ とおく．このとき次の「完全列」がある：

$$\cdots \to [X \times I, \partial; G/O, *] \to L_{n+1}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathcal{S}(X) \to [X; G/O] \to L_n(\mathbb{Z}\pi) \ .$$

注意. (1) 一番右端の写像は法写像に対しその手術障害類を対応させる写像であり、その左はホモトピー同値写像に対しそれが自然に定める法写像を対応させる写像である．
(2) 前節までで, 滑らかな閉多様体に関する手術の理論を述べてきたが, 境界のある多様体の場合でも, 与えられた法写像が境界ではすでにホモトピー同値写像になっているという設定の元に,$L_*(\mathbb{Z}\pi)$ に手術のための障害類が定まることがわかる．$\mathcal{S}(X)$ より左はそのようにして得られる．
(3) $L_{n+1}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathcal{S}(X)$ は恒等写像 $1 : X \to X$ から出発して Wall realization [24] を用いて与えられた障害類を持つようなして作った法同境の上端を対応させる写像である．
(4) 上はあくまでも「集合」の完全列であり, 「群」の完全列ではない．

(5) 色々な例でこの列を理解しようとするとホモトピー論や特性類などに関するさまざまなことがらを必要とする．その方面に関しては例えば [10] を参照してほしい．

さて今までは滑らかな多様体を扱ってきたが, PL 多様体やさらには位相多様体でも同様な結果が成り立つ．しかも手術障害類群は滑らかな場合と同じである．位相多様体のカテゴリーの場合を以下に述べる．

定理 1.9. (Kirby-Siebenmann [9]) $n \geq 5$ とする．X は n 次元のコンパクト位相多様体とし, $\pi = \pi_1(X)$ とおく．このとき次の完全列がある：

$$\cdots \to [X \times I, \partial; G/\mathrm{TOP}, *] \to L_{n+1}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X, \partial X) \to [X, \partial X; G/\mathrm{TOP}, *] \to L_n(\mathbb{Z}\pi) \ .$$

注意. (1) この列が可換群の完全列になるように各項の群構造を与えることができる (L 群に関しては普通の群構造を与える).
(2) $\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X, \partial X)$ は境界で同相写像になっているようなホモトピー同値写像たちをもちいて定義する．

G/TOP は安定位相束の分類空間 $B\mathrm{TOP}$ から BG への自然な写像のホモトピーファイバーであり, $\pi_0(G/\mathrm{TOP}) = 0$, $\pi_i(G/\mathrm{TOP}) \cong L_i(\mathbb{Z})$ $(i \geq 1)$ である．これは高次元のポアンカレ予想 ($\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(D^n, \partial) = \{0\}$) と手術完全列から考えて, ある程度納得できると思う．

さらに強く次のことがわかる．各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し複体 $\mathbb{L}_n$ を, 0 単体は $\mathbb{Z}$ 上の n 次元 Poincaré 2 次複体, 1 単体はそれらの間のコボルディズム, 2 単体はちょうど 2 単体のように境界が分割された $(n+2)$ 次元 Poincaré 2 次複体対, ...のようにして作ると, $\pi_i(\mathbb{L}_n) \cong L_{n+i}(\mathbb{Z})$ となりさらに $\Omega(\mathbb{L}_n) \simeq \mathbb{L}_{n+1}$ がわかる．通常のスペクトルの添え字と符号が逆になっているが, Ω スペクトル $\mathbb{L} = \{\mathbb{L}_n\}$ (単連結手術のスペクトル) が定まる．このとき, $\mathbb{L}_0 \simeq \mathbb{Z} \times G/\mathrm{TOP}$ が成り立つ．実は G/TOP 自身も無限ループ空間になっており, Ω スペクトル $\mathbb{L}'$ で $\mathbb{L}'_0 \simeq G/\mathrm{TOP}$ となるものも存在する．(以上は Ranicki[19] による代数的な構成を述べたが Quinn[14] による幾何的な構成もある．Nicas[11] にも丁寧な記述がある.)

n 次元閉位相多様体 $X (n \geq 5)$ に対し, $[X \times I^i, \partial; G/\mathrm{TOP}, *]$ はこの $\mathbb{L}'$ を使ってコホモロジー群 $H^{-i}(X; \mathbb{L}')$ として表すことができるが, ポアンカレ双対定理から, さらにホモロジー群 $H_{n+i}(X; \mathbb{L}')$ とみなすことができ, 手術完全列に現れる写像 $[X \times I^i, \partial; G/\mathrm{TOP}, *] \to L_{n+i}(\mathbb{Z}\pi)$ は Quinn のアセンブリ写像 $H_{n+i}(X; \mathbb{L}') \to L_{n+i}(\mathbb{Z}\pi)$ と同一視される $(i \geq 0)$.

$\mathbb{L}$ のホモトピー群は π_0 も含めて周期 4 をもつが, $\mathbb{L}'$ は π_0 のところで 4 周期性が崩れている．境界がある多様体 X に対しては

$$[X, \partial X; G/\mathrm{TOP}, *] = [X, \partial X; \mathbb{Z} \times G/\mathrm{TOP}, *]$$

であるから, この項も 4 周期性をもち, 結果的に構造集合の 4 周期性

$$\mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X \times I^4, \partial) \cong \mathcal{S}^{\mathrm{TOP}}(X)$$

が成り立つ (Siebenmann [9], Nicas [11])．閉多様体の場合は必ずしも構造集合の 4 周期性は成り立たない[4].

[4] [9] p.283 参照.

2　最近１０数年の進歩

2.1　ホモロジー多様体

現在のような「多様体」の概念は 19 世紀後半から徐々に形作られてきたが, その中で最も大きい貢献をしたのは Poincaré である．彼は多様体の様々な定義を試みているが, 「多面体 X で各点のリンク L が S^{n-1} と同相なものを n 次元多様体とよぶ」というものがある．彼は (現在のことばでいいかえて) $H_*(L) \cong H_*(S^{n-1})$ であるならば, つまり X の局所ホモロジーが $\mathbb{R}^n$ の局所ホモロジーと同型であるならば, L は球面であり X は多様体になると考えた．いいかえると, 多面体が n 次元ホモロジー多様体であるならば n 次元位相多様体になっていると考えた．これは誤りであり, ここから Poincaré 予想が生じることとなった.

以下では n **次元ホモロジー多様体**とは, 多面体と限らずに, ANR である X で各点 $x \in X$ に対し $H_*(X, X - \{x\}) \cong H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{O\})$ が成り立つもののこととする.

1990 年代の前半, Bryant-Ferry-Mio-Weinberger らはホモロジー多様体のカテゴリーでの手術理論を構築した [2]．彼らは n 次元 Poincaré 複体 ($n \geq 6$) が n 次元ホモロジー多様体とホモトピー同値になるための障害類の構成とホモロジー多様体に対する手術の完全列を作った:

定理 2.1. $n \geq 6$ とする．n 次元ホモロジー多様体 K に対して周期 4 をもつ手術完全列が存在する:

$$\cdots \to H_{n+1}(K; \mathbb{L}) \to L_{n+1}(\mathbb{Z}\pi) \to \mathcal{S}^H(K) \to H_n(K; \mathbb{L}) \to L_n(\mathbb{Z}\pi)\ .$$

ただし, $\pi = \pi_1(K)$ であり, $\mathcal{S}^H(K)$ はホモロジー多様体を用いて定義される構造集合である.

K として S^n ($n \geq 6$) を考えた場合, 上の完全列において $H_{n+1}(S^n; \mathbb{L}) \to L_{n+1}(\mathbb{Z})$ は同型であり, $H_n(S^n; \mathbb{L}) = L_n(\mathbb{Z}) \oplus L_0(\mathbb{Z}) \to L_n(\mathbb{Z})$ は射影である．これより $\mathcal{S}^H(S^n) \cong L_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ がわかる．この対応で $[X \to S^n] \in \mathcal{S}^H(S^n)$ に対応する整数は Quinn[16] の定義した $i(X)$ である: $i(X) = 0$ であることが X の **resolution** (閉位相多様体 M から X への CE 写像) が存在するための必要十分条件である [15][16]．Edwards[4] によれば X が DDP(Disjoint Disks Property) を持つ n 次元ホモロジー多様体 ($n \geq 5$) であるならば任意の resolution は同相写像で近似できるから, X 自身が位相多様体となる．$i(X) \neq 0$ ならば X のどの点も $\mathbb{R}^n$ と同相な点を持たない.

2.2　制御手術理論

前節で述べたホモロジー多様体の手術理論の基礎となったのが制御手術理論である．まず定義を行う．M は位相空間, K は距離空間とする.

定義 2.2. (1) ホモトピー $H : M \times [0,1] \to K$ が ϵ **ホモトピー**であるとは，各 $a \in M$ に対して K における道の像 $H(a \times [0,1])$ の直径が ϵ 以下であることをいう.
(2) 連続写像 $f : M \to K$ が ϵ **ホモトピー同値写像**であるとは，連続写像 $g : K \to M$，およびホモトピー $H : g \circ f \simeq 1_M$，$K : f \circ g \simeq 1_K$ で，$f \circ H$ および K がともに ϵ ホモトピーとなるものが存在することをいう.
(3) 連続写像 $f : M \to K$ が **制御ホモトピー同値写像**であるとは, f が任意の $\epsilon > 0$ に対して ϵ ホモトピー同値写像になっていることをいう.

注意. K を n 次元ホモロジー多様体とするとき, K の resolution とは n 次元多様体からの制御ホモトピー同値写像のことに他ならない.

K は Poincaré 複体とし, 小さい $\epsilon > 0$ を与えたとき, 法写像 $(f : M \to K, b)$ はいつ ϵ ホモトピー同値写像に同境になるだろうか？という問題を考えるのが制御手術理論である．注意しなければならないのは, M の局所ユークリッド性から導かれる Poincaré 双対性は「小さな」サイズをもっている (セル分割してあるとすれば, セルとその双対セルは近い!) のだから, もし $f' : M \to K$ が ϵ ホモトピー同値写像になったとすると, K の Poincaré 双対性も「小さな」サイズをもたなければならない．その意味を明確にするためには加群の間の準同型写像に関して「小ささ」の概念を導入しなければならない．これはとりあえず対称を自由加群のみに制限して, その生成元は K 上の点であるとみなしてやることにより可能である．これにより ϵ **Poincaré 複体**の概念を導入できる．ホモロジー多様体は任意の $\epsilon > 0$ に対し, ϵ 複体である．また手術障害類群も通常の $L_n(\mathbb{Z}\pi_1 K)$ ではなく, ϵ Poincaré 2 次複体やそれらの間の δ Poincaré 同境 $(\delta \geq \epsilon)$ の概念を導入して, ϵ-δ 制御手術障害類群 $L_n^{\epsilon,\delta}(K;\mathbb{Z})$ を定めることができる．この群に関して次のような安定性がなりたつ:

定理 2.3. $n \geq 0$ を固定する．コンパクト ANR K に対し, $\delta_0 > 0$ および $T \geq 1$ が存在して, $T\epsilon \leq \delta \leq \delta_0$ をみたす任意の $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ に対し, 群 $L_n^{\epsilon,\delta}(K;\mathbb{Z})$ たちはみな同型となる．

その共通する群を $L_n^c(K;\mathbb{Z})$ で表すことにすると 次のことがわかる:

定理 2.4. $L_n^c(K;\mathbb{Z}) \cong H_n(K;\mathbb{L})$.

以上のふたつの定理は [12] [8] に証明がある．どちらの論文もこの状況で制御ホワイトヘッド群 [21] が消えているということ (それはさらに $Wh(\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}) = 0$ から来ている) を使っている．[12] では [26] の議論に倣って, 小さなサイズを持つ 2 次複体を細かく分割していくことによる証明を与えている．

制御手術群の安定性から, ϵ ホモトピー同値写像の間の δ ホモトピーを用いて定義される ϵ-δ 構造集合 $\mathcal{S}^{\epsilon,\delta}(K)$ の安定性が導かれることが, 非安定制御手術列を用いて証明できる．それにより定まる集合を $\mathcal{S}^c(K)$ と書くことにする．次が制御手術の完全列である (簡単のため状況を単純な場合にしてある):

定理 2.5. $n \geq 6$ とする．n 次元閉位相多様体 M に対し, 次の制御手術完全列が存在する:

$$\to H_{n+1}(M;\mathbb{L}) \to \mathcal{S}^c(M) \to H_n(M;\mathbb{L}') \to H_n(M;\mathbb{L}) \ .$$

応用上は M の上で直接距離をはかるのではなく, 別の距離空間 X とそこへの写像 $p : M \to X$ を用意して, すべて p により X の上で大きさをはかることにより $L_n^{\epsilon,\delta}(M;\mathbb{Z},p)$, $\mathcal{S}^{\epsilon,\delta}(X;p)$ を考えることが必要になる．上の制御手術完全列は p が UV^1($\simeq$ 各ファイバーが単連結) の場合にも一般化されている ([8], [12]).

さらに, 一般の対合をもつ環 A を $\mathbb{Z}$ の代わりに用いて $L_n^{\epsilon,\delta}(X;A,p)$ を定義することができる．筆者は Pedersen と共同で次のようなより一般的な安定性の証明に成功した [13].

定理 2.6. 整数 $n \geq 0$ と有限多面体 X を固定する．このとき $\delta_0 > 0$ および $T \geq 1$ が存在して次が成り立つ：$p : M \to X$ が X 上の stratified system of fibrations で, A が対合をもつ環であるならば, $T\epsilon \leq \delta \leq \delta_0$ をみたす $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ に対して, 群 $L_n^{\epsilon,\delta}(X;A,p)$ たちはみな同型となる．

$p : M \to X$ に関する上の条件は例えば Seifert fibration のようなもので成り立っているし, 多面体間の PL 写像でもなりたっている．またファイブレーションであるような p のみを考えるのならば, X が有限多面体であるという条件はコンパクト ANR であるという条件に置き換えてよい．

この定理により定義される制御手術群 $L_n^c(X;A,p)$ が一般ホモロジー $H_n(X;\mathbb{L}(A)(p))$ と同型になるかというと, それは悲観的である．こちらは制御 K 理論的な障害が本質的に残る．[22] では Ranicki と共同で, 制御手術群とホモロジー群の比較を行っている．

3　手術の応用

実際の応用例・発展例をいろいろあげることは不可能に近いので, Rosenberg のサーベイ [23] から, 上ですでに取り上げていないものを中心にごく一部を拾い上げてみる：

> エキゾチックな球面の分類 / にせトーラス, にせ射影空間などの分類 / 変換群論, nonlinear similarity の問題など / Hauptvermutung の否定的解決 / 輪環面予想の解決 / 部分多様体の問題 / 4 次元位相的ポアンカレ予想の解決 / Borel 予想, Novikov 予想, 特に Farrell-Jones の一連の仕事 / ……

最後に Ranicki が集めた手術に関する色んな資料 (ジョークも含む) を集めたページ "Surgery Bits and Pieces" の URL を紹介しておく:

`http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/surgery/index.htm`

参考文献

[1] W. Browder, *Surgery on Simply Connected Manifolds*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgeb. **65**, Springer, Berlin and New York, 1972.

[2] J. Bryant, S. Ferry, W. Mio and S. Weinberger, Topology of homology manifolds, Ann. of Math. (2) **143** (1996), 435 – 467.

[3] S. Cappell, A. Ranicki and J. Rosenberg (eds.), *Surveys on Surgery Theory* (2 vols), Ann. of Math. Studies **145** and **149**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, 2001.

[4] R. Edwards, The topology of manifolds and cell-like maps, *Proc. ICM, Helsinki*, 111 – 127(1978)

[5] F. T. Farrell, L. Göttshe, and W. Lück (eds.), *Topology of High-Dimensional Manifolds*, ICTP Lecture Notes Series **9**
`http://www.ictp.trieste.it/~pub_off/lectures/vol9.html`

[6] F. T. Farrell and W. Lück (eds.), *Proceedings 2001 ICTP School on High-dimensional Manifold Topology*, ICTP, Trieste, Italy 21 May – 8 June 2001, World Scientific, Singapore, 2003.

[7] S. Ferry, A. Ranicki and J. Rosenberg (eds.), *Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity* (2 vols), London Math. Soc. Lecture Notes **226** and **227**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[8] S. Ferry, Epsilon-delta surgery over $\mathbb{Z}$, preprint.

[9] R. Kirby and L. Siebenmann, *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings and Triangulations*, Ann. of Math. Studies **88**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1977.

[10] I. Madsen and R. J. Milgram, *The Classifying Spaces for Surgery and Cobordism of Manifolds*, Ann. of Math. Studies **92**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1979.

[11] A. Nicas, *Induction Theorems for Groups of Manifold Homotopy Structure Sets*, Mem. Amer. Math. Soc. **39** (1982), no. 267.

[12] E. Pedersen, F. Quinn and A. Ranicki, Controlled surgery with trivial local fundamental groups, *High dimensional manifold topology, Proceedings of the conference, ICTP, Trieste Italy*, World Scientific, 421 – 426 (2003).

[13] E. Pedersen and M. Yamasaki, Stability in controlled L-theory (preprint, arXiv:math.GT/0402218).

[14] F. Quinn, A geometric formulation of surgery, in *Topology of Manifolds, Proceedings of 1969 Georgia Topology Conference*, Markham Press, 500 –511 (1970).

[15] ———, Resolutions of homology manifolds, and the topological characterization of manifolds, Invent. math. **72**, 267 – 284 (1983); Corrigendum:*ibid.* **85**, 653 (1986).

[16] ———, An obstruction to the resolution of homology manifolds, Mich. Math. J. **34**, 284–291 (1987).

[17] A. Ranicki, *Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery*, Math. Notes **26**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.

[18] ———, Additive L-Theory, K-theory, **3**, 163 – 195 (1989).

[19] ———, *Algebraic L-Theory and Topological Manifolds*, Cambridge Tracts in Math. **102**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[20] ——— (ed.), *The Hauptvermutung Book, A Collection of Papers on the Topology of Manifolds*, K-Monographs in Math. **1**, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[21] A. Ranicki and M. Yamasaki, Controlled K-theory, Topology Appl. **61**, 1 – 59 (1995).

[22] ———, Controlled L-theory (preprint, arXiv:math.GT/0402217).

[23] J. Rosenberg, Surgery theory today — what it is and where it's going, in *Surveys on Surgery Theory, Vol. 2*, Ann. of Math. Studies **149**, 3–47 (2001).

[24] C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, London Math. Soc. Monographs **1**, Academic Press, London and New York, 1970; 2nd ed., ed. by A. Ranicki, Math. Surv. and Monographs **69**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[25] S. Weinberger, *The Topological Classification of Stratified Spaces*, Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago, 1994.

[26] M. Yamasaki, *L-groups of crystallographic groups*, Invent. Math. **88**, 571 – 602 (1987).

---

http://math.josai.ac.jp/~yamasaki/